TAREA VII

1. Calcule el radio de convergencia de las siguientes series de potencias.

   (a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$

   (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n$

   (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}$

2. Para cada una de las siguientes funciones, encuentre la serie de Taylor alrededor del punto x_0 dado, y determine el radio de convergencia mediante el criterio de la razón.

   (a) $\frac{1}{1-x}$ $\qquad x = 0$

   (b) $\frac{1}{1+x}$ $\qquad x_0 = 0$

   (c) $\ln x$ $\qquad x_0 = 1$

3. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales usando series de Taylor al rededor del punto x_0 dado. Indique claramente la relación de recurrencia y calcule los primeros cuatro coeficientes de la serie. De ser posible, encuentre una fórmula general para todos los coeficientes.

   (a) $y'' - xy' - y = 0 \qquad x_0 = 0$

   (b) $y'' - xy' - y = 0 \qquad x_0 = 1$

   (c) $(1-x)y'' + y = 0 \qquad x_0 = 0$

   (d) $(1+x^2)y'' - 4xy' + 6y = 0 \qquad x_0 = 0$

4. Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, encuentre los primeros cuatro coeficientes de la solución en series de Taylor que satisface la condición inicial dada.

   (a) $y'' - xy' - y = 0 \qquad y(0) = 2 \quad y'(0) = 1$

   (b) $(2+x^2)y'' - xy' + 4y = 0 \qquad y(0) = -1 \quad y'(0) = 3$

   (c) $(1-x)y'' + xy' - y = 0 \qquad y(0) = -3 \quad y'(0) = 2$

5. Encuentre dos soluciones linealmente independientes en series de potencias para la ecuación diferencial de Chebyshev

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$$

con $-1 < x < 1$

6. Del libro de Simon y Blume:
   - 23.7
   - 23.8
   - 23.9
   - 23.11
   - 23.16
   - 23.17
   - 23.26
   - 23.28

7. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

   (a) $\mathbf{Y}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$

   (b) $\mathbf{Y}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$

   (c) $\mathbf{Y}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$

   (d) $\mathbf{Y}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$

   (e) $\mathbf{Y}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$

   (f) $\mathbf{Y}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$

8. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones con condiciones iniciales:

   (a) $\mathbf{Y}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{Y}, \quad \mathbf{Y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$

   (b) $\mathbf{Y}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{Y}, \quad \mathbf{Y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

   (c) $\mathbf{Y}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{Y}, \quad \mathbf{Y}(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$

9. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

   (a) $\mathbf{Y}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$

   (b) $\mathbf{Y}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$

   (c) $\mathbf{Y}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$

   (d) $\mathbf{Y}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$

10. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones con condiciones iniciales:

   (a) $\mathbf{Y}' = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{Y}, \quad \mathbf{Y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

   (b) $\mathbf{Y}' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{Y}, \quad \mathbf{Y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$