



Tarea IV

Combinatoria Analítica

1. Dada una familia de árboles generada por $T(z) = z\phi(T(z))$, donde ϕ es una serie de potencias con coeficientes enteros $\phi_k = [u^k]\phi(u) \geq 0$, $\phi_0 \neq 0$, demuestre que la función bivariada $T(z, u)$, donde u marca el número de nodos de grado k , satisface

$$T(z, u) = z (\phi(T(z, u)) + \phi_k(u-1)T(z, u)^k)$$

y también demuestre que la función generadora cumulativa es

$$\Omega(z) = z \frac{\phi_k T(z)^k}{1 - z\phi'(T(z))} = \phi_k z^2 T(z)^{k-1} T'(z).$$

2. Sea $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_r\}$ un alfabeto de r letras. Considere el conjunto $\mathcal{W} = \mathcal{A}^*$ de todas las palabras que se pueden formar con el alfabeto $\mathcal{A}$. Sea $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_r)$, donde $\chi_j(w)$ es el número de ocurrencias de la letra a_j en w . Determine $W(z, \mathbf{u})$ y $W_{n, \mathbf{k}}$ para cada n y $\mathbf{k} = (n_1, \dots, n_r)$ con $n = n_1 + \dots + n_r$.
3. Determine el crecimiento asintótico de los coeficientes de las siguientes funciones generadoras, enunciando explícitamente los factores exponenciales y subexponenciales:

$$a) f(z) = \frac{1}{(1-z)^3(1-z^3)^2(1-\frac{z^2}{2})^3}$$

$$b) f(z) = \frac{1}{(3-2z)^2(4-3z)^3}$$

4. En un extraño país hay cuatro monedas con denominaciones 1, 9, 29 y 59. Determine el comportamiento asintótico, enunciando explícitamente los factores exponenciales y subexponenciales, de las formas de dar un total de n en cambio.