Universidad Nacional
Autónoma de México

Instituto de
Matemáticas UNAM

Prof. Ricardo Gómez Aíza
Ayud. Rosa Georgina Rodríguez Mota

Variable Compleja II

TAREA III

1. Sea Ω una región acotada y suponga que $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ es continua en $\overline{\Omega}$ y analítica en Ω. Demuestre que si existe una constante $c \geq 0$ tal que $|f(z)| = c$ para toda $z \in \partial\Omega$, entonces f es constante o bien f tiene un cero en Ω.

2. Suponga que $|f(z)| \leq 1$ para toda $|z| < 1$ y que f es una función analítica que no es constante. Sea $D = \{z : |z| < 1\}$ y defina $g\colon D \to D$ por
$$g(z) = \frac{f(z) - a}{1 - \overline{a} f(z)}$$
donde $a = f(0)$. Demuestre que
$$\frac{|f(0)| - |z|}{1 + |f(0)|\ |z|} \leq |f(z)| \leq \frac{|f(0)| + |z|}{1 - |f(0)|\ |z|} \qquad \forall\ z \in D.$$

3. Suponga que $f\colon D \to \mathbb{C}$ satisface $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$ para toda $z \in D = \{z : |z| < 1\}$ y suponga que $f \neq$ *constante* es analítica.
   (a) Demuestre que $\operatorname{Re} f(z) > 0$ para toda $z \in D$.
   (b) Use una transformada de Möbius adecuada y use el Lema de Schwarz para demostrar que si $f(0) = 1$, entonces
   $$|f(z)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \qquad \forall\ z \in D.$$
   ¿Qué pasa si $f(0) \neq 1$?
   (c) Demuestre que si $f(0) = 1$, entonces
   $$|f(z)| \geq \frac{1 - |z|}{1 + |z|} \qquad \forall\ z \in D$$
   (*Sugerencia:* Utilize la parte 3a).