Universidad Nacional
Autónoma de México

Instituto de
Matemáticas UNAM

Prof. Ricardo Gómez Aíza
Ayud. Rosa Georgina Rodríguez Mota

Variable Compleja II

TAREA V

1. Sean Ω_1 y Ω_2 dos regiones simplemente conexas contenidas propiamente en $\mathbb{C}$. Sea $f \in H(\Omega_1)$ una función analítica inyectiva que mapea Ω_1 sobre Ω_2. Sea $a \in \Omega_1$ y sea $\alpha = f(a)$. Demuestre que cualquier función analítica inyectiva $h\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ tal que $h(a) = \alpha$ satisface $|h'(a)| \leq |f'(a)|$. Explique qué ocurre si h no necesariamente es inyectiva.

2. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región propia de los números complejos tal que $\overline{z} \in \Omega$ si $z \in \Omega$. Sea $a \in \Omega \cap \mathbb{R}$ y suponga que $f\colon \Omega \to D = \{z \ : \ |z| < 1\}$ es analítica, inyectiva y $f(a) = 0$, $f'(a) > 0$ y $f(\Omega) = D$. Sea $\Omega_+ = \{z \in \Omega \ : \ \operatorname{Im} z > 0\}$. Demuestre que
$$f(\Omega_+) \subset \{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Im}\, z > 0\} \quad \text{ó} \quad f(\Omega_+) \subset \{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Im}\, z < 0\}.$$

3. Use mapeos conformes conocidos o composición de ellos, como transformaciones lineales fraccionales, potencias, raices, $\operatorname{sen} z$, $\log z$, etc., para encontrar una función analítica biyectiva entre la región dada A y el semiplano superior $U = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Im}\, z > 0\}$:
   (a) $A = \{z = x + iy \ : \ x, y > 0\}$.
   (b) $A = \{z = x + iy \ : \ |y - 1| < 2\}$.
   (c) $A = \{z = x + iy \ : \ |z| > R \text{ y } \operatorname{Im} z > 0\}$ con $R > 0$.
   (d) $A = \mathbb{C} - \{(-\infty, -1] \cup [1, \infty)\}$.

4. Encuentre una transformación conforme de la región entre las dos circunferencias $|z| < 1$ y $|z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ sobre el disco $|w| < 1$. (**Sugerencia:** primero aplique $z \mapsto \frac{1}{z-1}$).

5. Encuentre una transformación de Schwarz-Christoffel del semiplano complejo superior $U = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Im}\, z > 0\}$ en el dominio A dado:
   (a) $A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 < \operatorname{Arg} z < 4\pi/3\}$.
   (b) $A = \{z = x + iy \ : \ -\pi/2 < x < \pi/2 \text{ y } y > 0\}$.