Capítulo 5

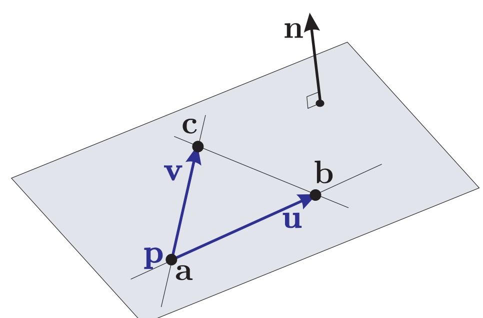
La Esfera y el Espacio

En este capítulo estudiaremos la geometría de la esfera. Veremos cómo se puede hacer, y hay, geometría en otros "espacios" además del plano euclidiano. Pero antes tenemos que repazar y ver ciertas propiedades de su "habitat" natural, del espacio ambiente en el que vive.

5.1 Planos en $\mathbb{R}^3$

Hemos visto que los planos en $\mathbb{R}^3$ se pueden definir de, al menos, tres maneras. Una, su *descripción paramétrica*, es dando un punto base $\mathbf{p}$ y dos vectores direccionales $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, no paralelos, para describir a un plano Π con dos parametros libres s y t como

$$\Pi = \{\, \mathbf{p} + s\,\mathbf{u} + t\,\mathbf{v} \mid s, t \in \mathbb{R} \,\}\,.$$



Otra, su *descripción baricéntrica*, es dando tres puntos $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ en él, no colineales, y describirlo por coordenadas baricéntricas (o combinaciones afines):

$$\Pi = \{\, \alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b} + \gamma\,\mathbf{c} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\,;\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \,\}\,.$$

Y finalmente, una descripción *intrínseca*, por medio de una *ecuación normal*, dando un vector normal $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ y una constante $d \in \mathbb{R}$

$$\Pi : \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = d$$

Pasar de una descripción baricéntrica a una paramétrica, y viceversa, es fácil pues tomando $\mathbf{a} = \mathbf{p}, \mathbf{b} = \mathbf{p} + \mathbf{u}$ y $\mathbf{c} = \mathbf{p} + \mathbf{v}$ por ejemplo, podemos transformar una en la otra (Sección 1.??). El primer problema importante que vamos a atacar es cómo encontrar una ecuación normal para un plano dado paramétricamente. Es decir, dados $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, no paralelos, encontrar un vector $\mathbf{n}$ perpendicular a ambos. Pero antes, veámos con un ejemplo cómo es fácil encontrar una descripción paramétrica, o baricéntrica, de un plano dado por una ecuación normal.

Tomemos por ejemplo la ecuación

$$2x + y - z = 2$$

que define un plano Π normal al vector $(2, 1, -1)$. Para encontrar una descripción baricéntrica basta encontrar tres soluciones particulares no colineales. Y para esto, podemos asignar valores arbitrarios a dos de las variables y despejar la tercera. Lo más fácil es hacerlas cero. Así, si hacemos $y = 0$ y $z = 0$ la ecuación implica que $x = 1$ y por tanto que $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$ es una solución. Análogamente, $\mathbf{b} = (0, 2, 0)$ y $\mathbf{c} = (0, 0, -2)$ son soluciones. Y estos tres puntos nos dan una descripción baricéntrica del mismo plano pues son los puntos de intersección de Π con los tres ejes y en este caso no son colineales.

Para obtener una descripción paramétrica, podemos tomar a $\mathbf{a}$ como punto base y a $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ y $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ como vectores direccionales:

$$\begin{aligned} \Pi &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 - s - t \\ 2s \\ -2t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Y efectivamente, estos valores siempre satisfacen la ecuación original; para corroborarlo, podemos sustituir en la ecuación original y ver que simbólicamente, es decir, independientemente de los valores de los parámetros, siempre se cumple:

$$2\,(1 - s - t) + (2s) - (-2t) = 2$$

Hay que observar que a veces puede ser un poco, pero no mucho, más difícil encontrar soluciones particulares no colineales (veánse los siguientes ejercicios).

Por último, es bonito ver lo fácil que resulta demostrar porque el método que acabamos de esbozar funciona siempre.

Lema 5.1.1 *Si $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ son soluciones de la ecuación lineal $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = d$, entonces cualquier combinación afín de ellos también lo es.*

Demostración. Recordemos que una combinación afín de $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ es un vector que se expresa de la forma

$$\alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b} + \gamma\,\mathbf{c} \qquad \text{con} \qquad \alpha + \beta + \gamma = 1$$

De la linearidad del producto interior, la hipótesis y esta última ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b} + \gamma\,\mathbf{c}) &= \alpha\ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}) + \beta\ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}) + \gamma\ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{c}) \\ &= \alpha\,d + \beta\,d + \gamma\,d \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)\ d = d \end{aligned}$$

$\square$

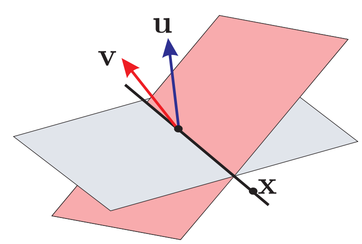
EJERCICIO 5.1 Encuentra descripciones baricéntricas y paramétricas para los siguientes planos: $\Pi_1 : 2x - 3y + z = 6$; $\Pi_2 : x + 4y - 2z = 4$; $\Pi_3 : -x + y - 2z = 2$; $\Pi_4 : 5x - 2y + z = 1$.

EJERCICIO 5.2 Enuncia y demuestra el Lema anterior para combinaciones afínes de longitud arbitraria (no necesariamente de tres vectores) y en cualquier espacio vectorial.

5.2 El producto cruz

Consideremos ahora el problema inverso: encontrar una ecuación normal para un plano descrito paramétricamente. Puesto que sabemos pasar de una descripción baricéntrica a una paramétrica y viceversa, el problema se reduce a encontrar un vector perpendicular a dos vectores **u** y **v** dados. Es decir, tenemos que resolver el sistema

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} &= 0 \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} &= 0 \end{aligned}$$



o bien, encontrar un punto **x** en la intersección de los planos ortogonales a **u** y a **v**. Tenemos siempre a la solución *trivial* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, pero esa no nos sirve pues el vector normal a un plano debe ser distinto de cero. De tal manera que si encontramos $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ que satisfaga las dos ecuaciones anteriores entonces el plano que pasa por **p** con vectores direccionales **u** y **v** tendrá la ecuación normal

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$$

Además, resolvamos de una buena vez el problema de manera general, tratando de no hacer suposiciones extras sobre los vectores dados.

Démosle coordenadas a nuestros vectores usando subindices, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ para que el sistema se escriba

$$\begin{aligned} u_1\, x + u_2\, y + u_3\, z &= 0 \\ v_1\, x + v_2\, y + v_3\, z &= 0 \end{aligned}$$

con $\mathbf{x} = (x, y, z)$ cómo nuestro vector variable o incógnita. Para eliminar una de las variables, podemos usar el mismo método que en sistemas de 2×2. Eliminémos z multiplicando la segunda ecuación por u_3, la primera por $-v_3$ y sumando para obtener

$$(u_3 v_1 - v_3 u_1)\ x + (u_3 v_2 - v_3 u_2)\ y = 0$$

Esta ecuación ya la conocemos aunque con otros nombres para las constantes (recuérdese nuestro primer encuentro con el compadre ortogonal). Tiene una solución canónica "volteando" los coeficientes y a uno de ellos también el signo, es decir:

$$x = u_2 v_3 - v_2 u_3 \; ; \; y = u_3 v_1 - v_3 u_1$$

Sustituyendo ahora estos valores en la primera ecuación y simplificando se obtiene

$$\begin{aligned} u_1 \,(u_2 v_3 - v_2 u_3) + u_2 \,(u_3 v_1 - v_3 u_1) + u_3 \, z &= 0 \\ u_3 \,(u_2 v_1 - v_2 u_1 + z) &= 0 \end{aligned}$$

que, independientemente del valor de u_3, tiene la solución

$$z = u_1 v_2 - v_1 u_2 \,.$$

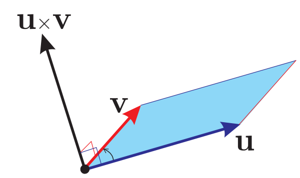
La solución particular que acabamos de encontrar (y que siempre funciona pues nunca dividimos ni hicimos ninguna suposición sobre si los coeficientes son cero o no) es tan importante que tiene nombre establecido. Se llama el *producto cruz* de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Y para resumir, remarcar, y establecer su notación, definámoslo como el vector

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_2 v_3 - v_2 u_3 \\ u_3 v_1 - v_3 u_1 \\ u_1 v_2 - v_1 u_2 \end{pmatrix} \,. \tag{5.1}$$

La fórmula parece complicada, pero la "cantaleta" que nos ayuda a recordarla la hace sencilla. Obsérvese que en la primera coordenada del producto cruz no aparecen las primeras coordenadas de los ingredientes: es justo el determinante de la matriz 2×2 que se obtiene al eliminar el primer renglón de la matriz 3×2 de los dos vectores. La segunda coordenada es de nuevo el determinante eliminando ahora al segundo renglón, pero con signo negativo. Y la tercera vuelve a ser el determinante tal cual al olvidarse del tercer renglón. El producto cruz se arma de subdeterminantes 2×2 olvidando datos (coordenadas) correspondientes y teniendo cuidado de los signos (el de enmedio lleva un menos).

Geometricamente, el producto cruz es a $\mathbb{R}^3$ lo que el compadre ortogonal es a $\mathbb{R}^2$. En el plano, dado un vector $\mathbf{u}$, se puede escoger un vector canónico ortogonal a él girándolo 90° en la orientación positiva; ese es su compadre ortogonal $\mathbf{u}^\perp$ que tanto nos ha ayudado; nótese que $\mathbf{u}^\perp$ está en la media recta de vectores ortogonales a $\mathbf{u}$ que está a "su izquierda" y que tiene la magnitud de $\mathbf{u}$.

En $\mathbb{R}^3$ no es posible escoger para un vector $\mathbf{u}$ un ortogonal de manera coherente, pues $\mathbf{u}$ tiene todo un plano de ortogonales y es imposible decidir cuál de ellos es "el bueno". Pero para dos vectores, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, sí se puede elegir al "bueno" de manera geométrica: si generan un plano, tenemos que escoger un vector en su recta ortogonal. Primero escogemos el lado de ese plano donde el giro de $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ se ve contra las manesillas del reloj (positivo). Esto nos da media recta de sus posibles ortogonales. Y de estos, escogemos al que tiene magnitud igual al área del paralelogramo que generan $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Así obtenemos un ortogonal a ellos, escogido canónicamente, y que es precisamente su producto cruz, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, como veremos más adelante. Obsérvese además que la *construcción geométrica* del producto cruz que acabamos de esbosar funciona también cuando $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ no generan un plano, pues entonces están en una línea por el origen, el área de su paralelogramo es cero, y les toca entonces el vector $\mathbf{0}$. Así que el producto cruz también debe detectar si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son linealmente dependientes.



Hemos hecho muchas afirmaciones que ahora debemos demostrar. Empezemos por las propiedades elementales del producto cruz respecto a las otras operaciones que ya conocemos.

Teorema 5.2.1 *Sean* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ *tres vectores cualesquiera y* $t \in \mathbb{R}$. *Se cumplen entonces las siguientes propiedades del producto cruz:*

$$\begin{array}{rl}
\textbf{\textit{i)}} & (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0 \\
\textbf{\textit{ii)}} & \mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u} \\
\textbf{\textit{iii)}} & \mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \\
\textbf{\textit{iv)}} & \mathbf{u} \times (t\,\mathbf{v}) = t\ (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \\
\textbf{\textit{v)}} & (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \\
\textbf{\textit{vi)}} & (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\ \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\ \mathbf{u} \\
\textbf{\textit{vii)}} & |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| \operatorname{sen} \theta
\end{array}$$

donde θ *(entre* 0 *y* π*) es el ángulo entre* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$.

Demostración. La propiedad **(i)** es justo la motivación que usamos para definir el producto cruz (que es ortogonal a $\mathbf{u}$ y a $\mathbf{v}$). La propiedad **(ii)** se conoce como *antisimetría*, las variables no conmutan sino que *aticonmutan*. Las propiedades **(iii)** y **(iv)** son la *linearidad* del producto cruz, que junto con **(ii)** dan que tambien es lineal en la primera variable; se dice que es *bilineal*. Todas ellas se siguen directamente de la definición (5.1) y se las dejamos como ejercicio al lector.

El inciso **(v)** es igualmente fácil pero es tan importante que preferimos darle un pequeño espacio. Al desarrolar ambos lados (según las definiciones de los productos cruz e interior) se obtiene una suma de monomios de la forma $\pm u_i v_j w_k$ con $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. A saber, siguiendo el orden de $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ y la correspondiente fórmula (5.1) para $(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$, tenemos

$$\begin{aligned} & u_1(v_2w_3 - v_3w_2) + u_2(v_3w_1 - v_1w_3) + u_3(v_1w_2 - v_2w_1) \\ = \ & u_1v_2w_3 + u_2v_3w_1 + u_3v_1w_2 - (u_1v_3w_2 + u_2v_1w_3 + u_3v_2w_1) \end{aligned}$$

que son todas las posibles permutaciones de los tres índices. Nótese que las que tienen signo positivo son las tres que preservan el orden cíclico $1\to 2\to 3\to 1$ y las que tienen menos son las tres que lo invierten. Para concluir **(v)** basta ver que al desarrollar $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$ se obtienen de nuevo los seis posibles monomios y con los mismos signos, aunque en diferente orden. Esta función de tres vectores es el *determinante* y la estudiaremos con detalle más adelante.

La razón geométrica de **(vi)** es que cualquier vector ortogonal a $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$ está contenido en el plano que generan $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, y por tanto se expresa en términos de ellos. Pero que los coeficientes sean tan nítidos es agradable. Para demostrarlo hay que desarrollar

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - v_2u_3 \\ u_3v_1 - v_3u_1 \\ u_1v_2 - v_1u_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}.$$

Hagamos con cuidado la primera coordenada; las otras dos son análogas y se dejan al lector. Aplicando de nuevo la fórmula del producto cruz se tiene que la primera coordenada es

$$\begin{aligned} & (u_3v_1 - v_3u_1)\ w_3 - w_2\ (u_1v_2 - v_1u_2) \\ = \ & (u_3w_3 + u_2w_2)\ v_1 - (v_3w_3 + v_2w_2)\ u_1 \\ = \ & (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3)\ v_1 - (v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3)\ u_1 \\ = \ & (\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\ v_1 - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\ u_1 \end{aligned}$$

que claramente es la primera coordenada de $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\ \mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\ \mathbf{u}$.

Observémos, antes de entrarle a **(vii)**, que de aquí se sigue que el producto cruz **no es asociativo** (más que un “producto algebráico” es un “producto geométrico”). Usando la antisimetría, **(ii)**, y la fórmula para un doble producto, **(vi)**, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) &= -(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\times\mathbf{u} \\ &= -((\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\ \mathbf{w} - (\mathbf{w}\cdot\mathbf{u})\ \mathbf{v}) \\ &= (\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\ \mathbf{v} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\ \mathbf{w} \end{aligned}$$

que no tiene porque ser igual a $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}$.

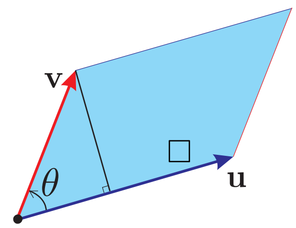
Para demostrar **(vii)** desarrollemos $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|^2$ usando en las dos primeras igualdades a **(v)** y a la fórmula que acabamos de ver respectivamente:

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) &= \mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v}))\\ &= \mathbf{u}\cdot((\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\;\mathbf{u}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\;\mathbf{v})\\ &= (\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2\\ &= |\mathbf{v}|^2\,|\mathbf{u}|^2-|\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2\cos^2\theta\\ &= |\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2\left(1-\cos^2\theta\right)=|\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2\operatorname{sen}^2\theta\end{aligned}$$

De donde se sigue **(vii)** pues todos los factores son positivos. □

Corolario 5.2.1 *La magnitud de* $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ *es el área del paralelogramo generado por* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$.

Demostración. Si tomamos a $\mathbf{u}$ como base del paralelogramo entonces su altura es $|\mathbf{v}|\operatorname{sen}\theta$; y el corolario se sigue de **(vii)**. □



Corolario 5.2.2 *Los vectores* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *son paralelos si y sólo si su producto cruz,* $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$*, es igual a* $\mathbf{0}$.

Demostración. Se sigue de **(vii)**, pues $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ (no nulos) son paralelos si y sólo el ángulo θ entre ellos es 0 o π, y esto sucede si y sólo si $\operatorname{sen}\theta=0$. □

Nótese además que si $\mathbf{u}$ o $\mathbf{v}$ son el vector cero, entonces su producto cruz también es cero. Por lo tanto tenemos que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ generan un plano si y sólo si su producto cruz es distinto de cero, y en este caso $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ es normal a ese plano.

EJERCICIO 5.3 Encuentra una ecuación normal para los siguientes planos:

$$\Pi_1=\{(2+t-s\,,\,1-2t+s\,,\,3t-s-3)\mid t,s\in\mathbb{R}\}$$

$$\Pi_2=\{(\alpha+\beta-2\gamma\,,\,2\alpha-2\beta+\gamma\,,\,3\alpha+\beta-\gamma)\mid \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\;;\;\alpha+\beta+\gamma=1\}$$

$$\Pi_3=\{(2\alpha+\beta-\gamma\,,\,\alpha-3\beta+\gamma\,,\,\alpha-\beta+\gamma)\mid \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\;;\;\alpha+\beta+\gamma=1\}$$

$$\Pi_4=\{(3+2t+s\,,\,2s-t\,,\,t+5s-3)\mid t,s\in\mathbb{R}\}$$

EJERCICIO 5.4 ¿Cuáles de las siguientes cuartetas de puntos en $\mathbb{R}^3$ son coplanares? Y si lo son define al plano en el que están.

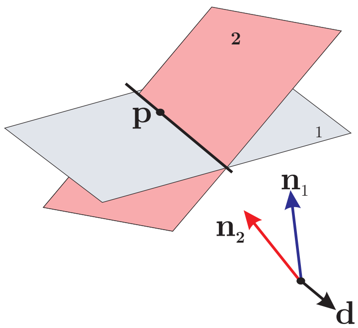
a) $\mathbf{a}=(2,-1,0)\,,\mathbf{b}=(1,2,-2)\,,\mathbf{c}=(0,1,0)\,,\mathbf{d}=(4,-1,-1)\,.$

b) $\mathbf{a}=(2,-1,0)\,,\mathbf{b}=(1,2,-2)\,,\mathbf{c}=(0,1,0)\,,\mathbf{d}=(3,-1,-1)\,.$

EJERCICIO 5.5 Encuentra un criterio general para saber si cuatro puntos $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\in\mathbb{R}^3$ son coplanares o no, y demuéstralo.

5.2.1 Intersección de planos

Consideremos dos planos dados por una ecuación normal



$$\begin{aligned} \Pi_1 &: \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{x} = d_1 \\ \Pi_2 &: \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{x} = d_2 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Supongamos que sus dos vectores normales no son paralelos. Entonces el vector $\mathbf{d} := \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ es no nulo por el Corolario 5.2.2. Esta es la única "dirección común" a los dos planos, pues es normal a los dos vectores normales; de tal manera que la recta donde se intersectan debe tener esa dirección. Supongamos que $\mathbf{p}$ es una solución particular al sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas anterior, es decir, que $\mathbf{p}$ es un punto en la intersección: $\mathbf{p} \in \Pi_1 \cap \Pi_2$. Vamos a demostrar que entonces la recta

$$\ell = \{\mathbf{p} + t\,\mathbf{d} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

es precisamente la intersección.

Primero veamos que un punto en ℓ satisface las ecuaciones (5.2). Para $i = 1, 2$ se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_i \cdot (\mathbf{p} + t\,\mathbf{d}) &= \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{p} + \mathbf{n}_i \cdot (t\,\mathbf{d}) \\ &= \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{p} + t\,(\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{d}) = \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{p} = d_i \end{aligned}$$

pues $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{d} = 0$ por definición de $\mathbf{d}$. Lo que demuestra que $\ell \subset \Pi_1 \cap \Pi_2$. Y por el otro lado, si $\mathbf{q} \in \Pi_1 \cap \Pi_2$ probaremos que $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ es paralelo a $\mathbf{d}$, para lo cual usamos el criterio del Corolario 5.2.2 y el Teorema 5.2.1:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} \times (\mathbf{q} - \mathbf{p}) &= \mathbf{d} \times \mathbf{q} - \mathbf{d} \times \mathbf{p} \\ &= (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) \times \mathbf{q} - (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) \times \mathbf{p} \\ &= (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{q})\,\mathbf{n}_2 - (\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{q})\,\mathbf{n}_1 - (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{p})\,\mathbf{n}_2 + (\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{p})\,\mathbf{n}_1 \\ &= d_1\,\mathbf{n}_2 - d_2\,\mathbf{n}_1 - d_1\,\mathbf{n}_2 + d_2\,\mathbf{n}_1 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Hemos completado la parte central de la demostración del siguiente.

Teorema 5.2.2 *Dos planos en $\mathbb{R}^3$ se intersectan en una recta si y solo si sus vectores normales no son paralelos. En caso contrario, o no se intersectan (son* paralelos*) o son el mismo plano.*

Demostración. Nos falta nadamás afinar detalles. Primero, suponiendo que los vectores normales no son paralelos, tenemos que ver que existe una solución particular $\mathbf{p}$ como la que usamos arriba; y segundo, observar que cuando son paralelos, que exista o no esta solución particular determina los dos casos correspondientes. Para esto, consideremos al sistema (5.2) en coordenadas:

$$\begin{aligned} a_1\, x + b_1\, y + c_1\, z &= d_1 \\ a_2\, x + b_2\, y + c_2\, z &= d_2 \end{aligned}$$

Para encontrar una solución particular podemos asignar un valor arbitrario a cualquiera de las variables y resolver el sistema 2×2 que queda. Lo más fácil es hacerla 0; por ejemplo si $z = 0$ tenemos un sistema 2×2 clásico (en x y y) que tiene solución única dependiendo de su determinante. Puesto que las coordenadas del producto cruz son precisamente ($\pm$) estos determinantes, que los vectores normales no sean paralelos implica que alguno de los tres subsistemas 2×2 que se obtienen al hacer una variable 0 tiene determinante no nulo y por tanto solución. En el caso en que son paralelos los vectores normales entonces los lados izquierdos son múltiplos: si las constantes lo son por el mismo factor definen al mismo plano, pero si no lo son no existen soluciones comunes. $\square$

Asi que las rectas en $\mathbb{R}^3$ se pueden determinar por dos ecuaciones lineales o bien describirse paramétricamente.

EJERCICIO 5.6 Encuentra una descripción paramétrica para la recta de intersección de las siguientes parejas de planos:

$\Pi_1 : 2x + y - z = 1; \quad \Pi_2 : -2x + y - 3z = 3.$
$\Pi_1 : x - y - z = 0; \quad \Pi_2 : x + y - z = 1.$
$\Pi_1 : 2x + y - z = 2; \quad \Pi_2 : -x + y - 2z = 2.$
$\Pi_1 : 2x + z = 1; \quad \Pi_2 : -2x + z = 3.$

EJERCICIO 5.7 Describe las siguientes rectas *intrínsecamente*, es decir, como las soluciones de dos ecuaciones lineales:

$\ell_1 = \{(2 + t\,,\, 1 - 2t\,,\, 3t - 3) \mid t \in \mathbb{R}\}$
$\ell_2 = \{(s\,,\, 2 - 3s\,,\, 2s - 3) \mid s \in \mathbb{R}\}\,.$

EJERCICIO 5.8 Sea Π el plano dado por la ecuación $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = c$ y sea ℓ la recta $\{\mathbf{p} + t\,\mathbf{d} \mid t \in \mathbb{R}\}$. Demuestra (sustituyendo la expresión de los puntos de ℓ en la ecuación de Π) que Π y ℓ se intersectan en un único punto si y sólo si $\mathbf{n} \cdot \mathbf{d} \neq 0$. Observa que si no es así (es decir, si $\mathbf{n} \cdot \mathbf{d} = 0$) entonces la dirección $\mathbf{d}$ es paralela al plano; por tanto demostraste que un plano y una recta se intersectan en un único punto si y sólo si la direccion de la recta no es paralela al plano.

EJERCICIO 5.9 Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ tres vectores tales que $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \neq 0$. Demuestra que tres planos normales a $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ respectivamente se intersectan en un único punto.

5.2.2 El determinante y orientación

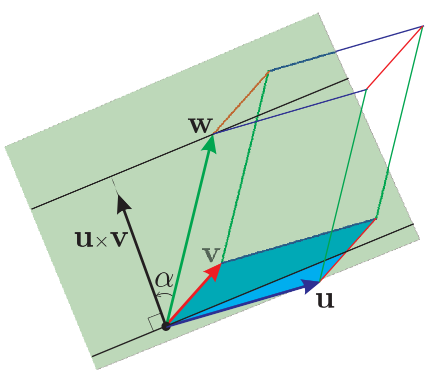
Dados tres vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, definimos su *determinante* como el número real

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \\ &= (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} \\ &= (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \end{aligned} \tag{5.3}$$

donde hemos usado la propiedad **(v)** del producto cruz y la simetría del producto punto. El determinante tiene el siguiente significado geométrico.

Proposicion 5.2.1 *Dados tres vectores* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$*, su determinante es el volumen signado del paralelepipedo que definen; donde el signo corresponde a su "orientación".*

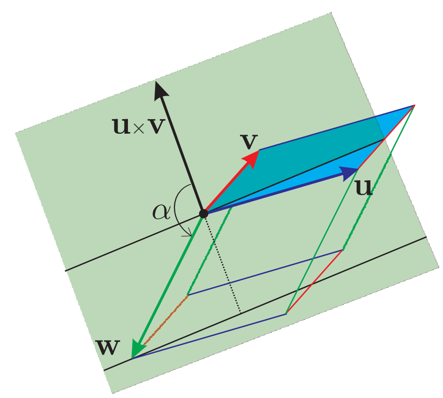
Demostración. Consideremos la fórmula $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$. Sabemos que $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ es el área del paralelogramo $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ que podemos tomar como base del paralelepipedo en cuestión. Y por la fórmula geométrica del producto punto tenemos entonces que



$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|\ |\mathbf{w}| \cos\alpha$$

donde α es el ángulo entre $\mathbf{w}$ y $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

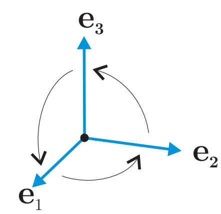
Supongamos primero que $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. Entonces, en el plano generado por $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ (en el que el plano $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ –generado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, recuérdese– se ve como la linea perpendicular a $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$), es fácil ver que la altura del paralelepipedo es $|\mathbf{w}| \cos\alpha$ y se sigue el resultado: tenemos que $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ es "base por altura". Si $\pi/2 \leq \alpha \leq \pi$ entonces $|\mathbf{w}| \cos\alpha$ es también esa altura pero con signo negativo. Corresponde a que $\mathbf{w}$ vive en el otro lado del plano $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ en el que está $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Pero en valor absoluto, $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ sigue siendo el volumen del paralelepipedo que definen $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.



□

El producto cruz $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ "escoge" un lado *positivo* del plano $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$; los vectores $\mathbf{w}$ que están en ese lado (un *semiespacio*) ven el giro de $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ en contra de las manesillas del reloj (la orientación positiva del plano $\mathbb{R}^2$). El lado positivo corresponde, por convención, a la regla de la mano derecha. Es decir, si con la punta de los dedos de la mano derecha simulamos el giro de $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, entonces el pulgar apunta hacia el lado positivo del plano, hacia $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Para los vectores $\mathbf{w}$ que estan en el otro lado, el *negativo*, decimos que la terna $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ induce la *orientación negativa* a $\mathbb{R}^3$.

Así, por ejemplo, la terna canónica $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ tiene orientación positiva, pero la terna $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$ tiene orientación negativa. De tal manera que si, por convención, ponemos las coordenadas de la pantalla de una computadora con el eje x ($\mathbf{e}_1$) horizontal a la derecha (como se lee), y el segundo eje (y o el vector $\mathbf{e}_2$) hacia arriba; entonces el lado positivo del eje z (o el tercer vector canónico $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$) apunta hacia nosotros.



Podemos concluir con una regla geométrica para saber si tres vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ en nuestro espacio tienen orientación positiva o negativa (la regla algebráica, abstracta, es simplemente computar el signo de $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$). Gírese de $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ con los dedos de la mano derecha; si el pulgar apunta cerca de $\mathbf{w}$, su orientación es positiva, y si de plano apunta hacia el otro lado es negativa; pues, por convención, insistimos, los vectores canónicos se situan conforme a esta regla.

Proposicion 5.2.2 *Sean* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *dos vectores que generan un plano* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ *en* $\mathbb{R}^3$*. Entonces* $\mathbf{w}$ *está en el plano* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ *si y sólo si* $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$*.*

Demostración. Por el Corolario 5.2.2 tenemos que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Entonces el plano definido por la ecuación $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{x} = 0$ es precisamente el plano generado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, y se sigue la proposición, pues $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$. □

En términos de la Proposición anterior, $\mathbf{w}$ está en el plano $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ si y sólo si el volumen del paralelepipedo definido por $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ es cero.

EJERCICIO 5.10 Demuestra que el determinante cumple las siguientes propiedades

i) $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\det(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = -\det(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = -\det(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u})$
ii) $\det(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$
iii) $\det(t\,\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = t\,\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$
iv) $\det(\mathbf{u} + \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \det(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$

EJERCICIO 5.11 Demuestra, usando unicamente el Ejercicio anterior, que el determinante no cambia si sumamos un multiplo de un vector a alguno de los otros, es decir, que

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v} + t\,\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

5.2.3 Sistemas de ecuaciones

Aplicaremos ahora el producto cruz a la resolución de sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. Como vimos en el Capítulo 3, tal sistema se puede escribir como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

donde A es una matriz de 3×3, $\mathbf{x}$ es el vector variable, o de las incógnitas (x, y, z), y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ es un vector constante. Si denotamos por $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ a las columnas de A (es decir, si $A = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$) entonces es natural definir el *determinante de la matriz A* como

$$\det A = \det (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

y tenemos:

Teorema 5.2.3 *El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución única si y sólo si $\det A \neq 0$.*

Demostración. Con la notación del parrafo anterior $(A = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}), \mathbf{x} = (x, y, z)^\top)$, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es equivalente a la ecuación vectorial

$$x\,\mathbf{u} + y\,\mathbf{v} + z\,\mathbf{w} = \mathbf{b}$$

Tomando el producto punto con el producto cruz de dos de los vectores se eliminan las dos variables correspondientes. Así, para eliminar a x y a y tomamos el producto punto con $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ para obtener la ecuación

$$z\,((\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{b}$$

pues $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ es ortogonal a $\mathbf{u}$ y a $\mathbf{v}$. De aquí, si $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \det A \neq 0$, se tiene que

$$z = \frac{(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{b}}{\det A}$$

Y análogamente, por (5.3), $\det A \neq 0$ implica que

$$y = \frac{(\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{b}}{\det A} \quad , \quad x = \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{b}}{\det A}$$

Por lo tanto, si $\det A \neq 0$ entonces la solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es única y esta dada por las ecuaciones anteriores que son conocidas como "la regla de Krammer".

Ahora tenemos que demostrar el inverso, supongamos entonces que $\det A = 0$ y hay que ver que el sistema no tiene solución única. Expresemos el determinante como $\det A = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$. Si $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ entonces por el Corolario 5.2.2 tenemos que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos, y si $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \neq 0$ entonces por la Proposición 5.2.2, tenemos que $\mathbf{w} \in \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. En ambos casos podemos afirmar que existen números r_0, s_0 y t_0 con alguno de ellos distinto de cero que cumplen

$$r_0\,\mathbf{u} + s_0\,\mathbf{v} + t_0\,\mathbf{w} = \mathbf{0}, \tag{5.4}$$

pues en el primer caso $(\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0)$ tenemos una igualdad $\mathbf{u} = s\,\mathbf{v}$ o $\mathbf{v} = r\,\mathbf{u}$, y en el segundo $(\mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq 0)$ podemos expresar $\mathbf{w} = r\,\mathbf{u} + s\,\mathbf{v}$; y de cualquiera de estas igualdades obtenemos una expresión (5.4) con alguno de los coeficientes igual a 1 al pasar a todos los sumandos al lado izquierdo. Esto implica que el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ no tiene solución única pues encontramos una diferente de la *trivial* que es $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (los tres coeficientes cero). Resumiendo, si suponemos que $\det A = 0$, hemos demostrado que existe $\mathbf{x}_0 = (r_0, s_0, t_0) \neq \mathbf{0}$ tal que $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Esta será la base para demostrar que para cualquier $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ la solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no es única:

Si el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no tiene solución (el caso, por ejemplo, en el que $\mathbf{w}$ está en el plano generado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ pero $\mathbf{b}$ no está en ese plano) entonces, en particular, **no** hay solución única. Pero si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sí tiene solución, digamos que $\mathbf{x}_1$ es tal que $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}$ entonces

$$A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$$

y como $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0$ pues $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ entonces la solución **no** es única. Dicho de otra manera, si existen r, s y t tales que

$$r\,\mathbf{u} + s\,\mathbf{v} + t\,\mathbf{w} = \mathbf{b}$$

entonces también se cumple que

$$(r + r_0)\;\mathbf{u} + (s + s_0)\;\mathbf{v} + (t + t_0)\;\mathbf{w} = \mathbf{b}$$

Lo cual concluye la demostración del Teorema pues que no haya solución única quiere decir que o bien no hay solución o si sí la hay, entonces hay muchas (en el fondo hemos demostrado que hay tantas como para la homogénea $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$). □

EJERCICIO 5.12 Sea $A = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ una matriz de 3×3 con $\det A \neq 0$. Demuestra que entonces tiene matriz inversa A^{-1} y que esta está dada por la fórmula

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} (\mathbf{v} \times \mathbf{w})^\top \\ (\mathbf{w} \times \mathbf{u})^\top \\ (\mathbf{u} \times \mathbf{v})^\top \end{pmatrix}$$

donde, recuerda, $\mathbf{x}^\top$ es el vector renglón transpuesto del vector columna $\mathbf{x}$.

5.2.4 Dependencia e independencia lineal

En la demostración del regreso (si $\det A = 0$, la solución no es única) del Teorema anterior hubo un paso fundamental que amerita comentarios y profundización. El de encontrar una solución no trivial a la ecuación homogénea $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, porque es la manera más democrática y general de decir que las columnas de la matriz A no son tan generales como podrían ser; que en vez de generar a todo $\mathbb{R}^3$ sólo generan a un plano o una linea o al origen (si las tres son $\mathbf{0}$). Amerita una pomposa definición que funciona en general, aunque en este libro sólo se le dé uso en instancias pequeñas ($k \leq 4$ y $n \leq 3$).

Definición 5.2.1 Sean $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_k$ vectores en $\mathbb{R}^n$. Se dice que son *linealmente independientes* si

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, \mathbf{u}_i = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$$

es decir, si la única combinación lineal de ellos que da el vector $\mathbf{0}$ es la *trivial.* Y si, por el contrario, existen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ no todas ellas cero, tales que $\lambda_1 \, \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \, \mathbf{u}_2 + \cdots + \lambda_k \, \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$ entonces se dice que son *linealmente dependientes.*

Así se tiene que un vector es linealmente dependiente si y sólo si es el vector $\mathbf{0}$, que dos vectores no $\mathbf{0}$ son linealmente dependientes si y sólo si son paralelos y que tres vectores son linealmente dependientes si y sólo si los tres están en un mismo plano por el origen; que son los casos que nos interesan y que han quedado debida y elegantemente incluidos en una sola definición. Podemos refrasear entonces que el paso fundamental de la demostración anterior fué ver que $\det A = 0$ si y sólo si las columnas de A son linealmente dependientes.

A manera de resumen, enlistemos una serie de equivalencias, cuya demostración o bien ya dimos o bien falta sólo algun argumento sencillo que dejamos como ejercicio mental para el lector.

Teorema 5.2.4 *Sea $A = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ una matriz 3×3, y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ su función lineal asociada (es decir, definida por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Entonces son equivalentes:Sea Π el plano dado por la ecuación $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = c$ y sea ℓ la recta $\{\mathbf{p} + t\,\mathbf{d} \mid t \in \mathbb{R}\}$. Demuestra que Π y ℓ se intersectan en un único punto si y sólo si $\mathbf{n} \cdot \mathbf{d} \neq 0$. Observa que si no es así (es decir, si $\mathbf{n} \cdot \mathbf{d} = 0$) en*

- ***i)*** $\det \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$
- ***ii)*** $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *son linealmente independientes*
- ***iii)*** *el sistema* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *tiene solución única para alguna* $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$
- ***iv)*** *el sistema* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *tiene solución única para toda* $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$
- ***v)*** $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{R}^3$ *(i.e.,* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *generan* $\mathbf{R}^3$)
- ***vi)*** $\mathbf{f}$ *es inyectiva*
- ***vii)*** $\mathbf{f}$ *es suprayectiva*
- ***viii)*** $\mathbf{f}$ *es biyectiva*

EJERCICIO 5.13 Demuestra que tres planos en $\mathbb{R}^3$ se intersectan en un único punto si y sólo si sus tres vectores normales son linealmente independientes.

EJERCICIO 5.14 Sean $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$ linealmente independientes, y sean ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas cualesquiera con direcciones $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$ respectivamente. Demuestra que existe una única recta ℓ_3 con dirección $\mathbf{d}_3$ que pasa por ℓ_1 y ℓ_2.

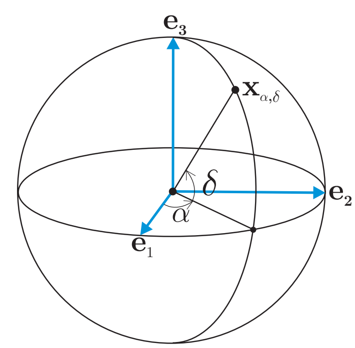
5.3 La Esfera

Ahora sí, estudiaremos algo de la geometría de la *esfera*:

$$\mathbb{S}^2 := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| = 1 \right\},$$

es decir, el conjunto de todos los vectores *unitarios* (de norma 1) en $\mathbb{R}^3$. No está de más remarcar que es la frontera de la "*bola sólida*" $\mathbb{B}^3 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| \leq 1\}$ y que si bien está última tiene tres dimensiones, su frontera, la esfera, tiene sólo dos. Intrinsecamente es una superficie y su símil más parecido en el mundo real son las pompas de jabón.

Por su parte es la representante teórica de cosas importantes como la superficie de la tierra o el firmamento. Siguiendo este símil, podemos dar dos coordenadas angulares para sus puntos. El *ecuador* consta de los puntos



$$\{(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha, 0) \mid \alpha \in [0, 2\pi]\}$$

donde α es llamada la *latitud*, y se identifica naturalmente con el círculo unitario $\mathbb{S}^1$. Y luego, para una latitud α dada podemos variar la *altitud* $\delta \in [-\pi, \pi]$ para obtener el punto

$$\mathbf{x}_{\alpha,\delta} = (\cos\delta\cos\alpha, \cos\delta\operatorname{sen}\alpha, \operatorname{sen}\delta)$$

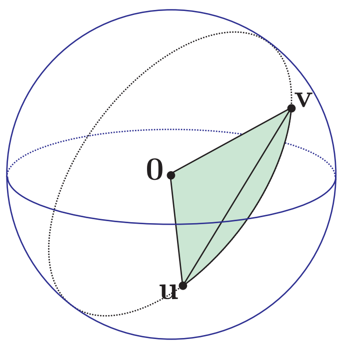
que efectivamente está en la esfera pues

$$\begin{aligned}
|\mathbf{x}_{\alpha,\delta}|^2 &= (\cos\delta\cos\alpha)^2 + (\cos\delta\operatorname{sen}\alpha)^2 + \operatorname{sen}^2\delta \\
&= \cos^2\delta\left(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha\right) + \operatorname{sen}^2\delta \\
&= \cos^2\delta + \operatorname{sen}^2\delta = 1
\end{aligned}$$

Asi que podemos llegar a cualquier punto de la esfera por sus dos coordenadas, latitud α y altitud δ, pero para el "polo norte", $\mathbf{e}_3$, y el "polo sur", $-\mathbf{e}_3$, la latitud no está bien definida; cualquiera es buena. Los mapas planos de la tierra usan estas coordenadas, pero entonces los polos "son" las lineas horizontales extremas y las distancias no corresponden a las distancias reales en la esfera. Tampoco las lineas rectas en un mapa corresponden a las trayectorias más cortas en la esfera.

5.3.1 Geodésicas

Consideremos dos puntos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en la esfera $\mathbb{S}^2$, ¿cuál será la trayectoria más corta para ir de $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$? Nos referimos a la trayectoria dentro de $\mathbb{S}^2$, es decir, sin salir nunca de la esfera, como si fueramos una hormiguita sobre ella o un humano en la tierra. En $\mathbb{R}^3$ la trayectoria más corta es el segmento $\overline{\mathbf{uv}}$ entre los puntos; pero este inmediatamente deja de estar en la esfera, su interior cae dentro del interior de la bola sólida. Lo que más se parece al segmento $\overline{\mathbf{uv}}$ dentro de la esfera es su proyección



desde el origen, su sombra en la esfera pensando que el centro de la esfera, el origen, es un foco. Pues entre más grande sea el radio de un círculo más se parece localmente a una recta y los círculos más grandes que hay en la esfera son los que tienen su centro en el origen, y que por tanto tienen radio uno.

No vamos a demostrar que las trayectorias más cortas (o eficientes) dentro de la esfera son los *círculos máximos* (i.e., intersección de la esfera con planos por el origen) pues requiere herramientas de cálculo. Pero las vamos a tomar como definición de *líneas esféricas* (que aunque suene contradictorio, viene de "líneas en la esfera") siguiendo la intuición de que son lo más parecido a las líneas rectas dentro de $\mathbb{S}^2$.

Definición 5.3.1 Una *línea* en la esfera, o una *línea esférica* es la intersección de $\mathbb{S}^2$ con un plano por el origen.

Tenemos entonces que por dos puntos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en la esfera $\mathbb{S}^2$ pasa una línea esférica. Pues si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ no son paralelos, entonces generan un plano (por el origen) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ de tal manera que la línea esférica

$$\xi = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \cap \mathbb{S}^2$$

los contiene a ambos. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{u} = t\,\mathbf{v}$, pero entonces por estar ambos en la esfera se tiene

$$1 = |\mathbf{u}| = |t\,\mathbf{v}| = |t|\ |\mathbf{v}| = |t|$$

y por tanto $t = \pm 1$: o bien $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son iguales, o bien son *antipodas*, es decir, $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$. Hemos demostrado que por dos puntos (distintos) no antipodas pasa una única línea esférica. Pero obsérvese además que toda línea que pasa por un punto $\mathbf{u} \in \mathbb{S}^2$ también pasa por su punto antipoda $-\mathbf{u}$, asi que por cualquier par de puntos pasa una línea que además es única si y sólo si no son antipodas.

Esta condición es muy parecida a la de la geometría clásica donde por cualquier par de puntos pasa una recta.