

Capítulo 6

Geometría Proyectiva

6.1 Motivación

6.1.1 Cónicas a la griega

Mucho antes del surgimiento de la geometría analítica (Descartes), los griegos estudiaron a las cónicas definidas como la intersección de un plano con un cono circular (!y de ahí su nombre!). Dicho de una manera más contemporánea, las cónicas, o pedazos de ellas, son la frontera entre la zona iluminada y la penumbra cuando dirigimos el cono de luz de una lámpara de mano hacia una pared. Dependiendo de la inclinación de la lámpara respecto a la pared, se ven elipses, parábolas o una rama de una hipérbola. Pero nosotros ya definimos, estudiamos y clasificamos (afín e isométricamente) a las cónicas, así que las aseveraciones anteriores, es decir, la definición que dieron los griegos, debería poder demostrarse. ¿Cómo se demuestra esto? Veremos que este problema lleva directamente a la geometría proyectiva.

Por el momento, razonemos a la inversa, construyendo un cono a partir de una cónica C en \mathbb{R}^2 . Esto implica meter al plano en \mathbb{R}^3 , en el “piso” digamos para fijar ideas; tomar un punto arriba de él, el *foco* llámémoslo, que podemos pensar como nuestro ojo; y luego el cono, $\text{Cono}(C)$, está formado por los segmentos que van del foco a los puntos de C . Cuando C es una elipse, el cono es muy parecido a un cono circular, y habría que checar que para algún foco es precisamente circular. Esto es intuitivamente claro pues al alejar el foco en la dirección del eje mayor, este se reduce visualmente; siempre hay un punto desde donde una elipse parece círculo. Cuando C es una parábola, el cono casi se cierra y solo le falta un rayo infinito en la dirección en que se aleja C . Y cuando es una hipérbola, una rama forma un pedazo de cono y la otra otro. Si modificamos nuestra definición de cono no solo a los segmentos sino a las rectas completas, estas dos mitades ajustan perfectas en un cono (doble ahora) al que le faltan dos rectas paralelas a las asíntotas. Incluir a estas rectas faltantes equivale a entender el comportamiento al infinito de las cónicas; e incluir a esos “puntos al infinito” de manera coherente es la geometría proyectiva.

6.1.2 El problema del pintor

En el renacimiento se fué haciendo claro que un dibujo “realista” de una escena cotidiana se logra proyectando desde un “foco” (ojo hipotético) sobre el lienzo. Es decir, a cada punto, \mathbf{x} digamos, de la escena le corresponde un punto en el lienzo, Π digamos, al tomar la recta que pasa por el foco y \mathbf{x} e intersectarla con Π . La razón por la que los cuadros dibujados con esta técnica nos parece “realista” es que si se le observa desde el foco, la imagen que se percibe es casi idéntica (en teoría idéntica viendo con un solo ojo) que la escena original. Y si lo vemos desde otro punto cualquiera, nuestro cerebro se encarga de adaptarlo para recrear la tridimensionalidad que se plasmó en el lienzo. Cómo lo hace, es harina de otro costal, pero que es un hecho que sabe hacerlo, y muy bien, se demuestra observando que de dos imágenes planas obtenidas bajo el mismo principio (las imágenes que se proyectan en la retina) nos dá una idea muy clara del espacio tridimensional que habitamos. Los pintores renacentistas desarrollaron técnicas para dibujar con este principio, “metodos de la perspectiva” las llamaron, que incluyen el uso de “puntos de fuga”. Como veremos más adelante estos puntos no son otra cosa que “puntos al infinito” que, al desarrollar la geometría proyectiva, se pueden tratar como puntos cualquiera.

El problema concreto con el que empezamos la discusión formal en este capítulo, puede plantearse en este contexto. Pensemos que queremos dibujar, en perspectiva, una vía de tren sobre una planicie inmensa. Los dos rieles se dibujan como segmentos que convergen a un punto de fuga. El problema es como dibujar los durmientes. Si en la realidad están espaciados cada metro, digamos, ¿Cada cuántos centímetros habrá que dibujarlos? Dicho de otra manera, cómo cambia la escala al proyectar desde un punto. Este problema, numérico, y de tres a dos dimensiones es el que resuelven automáticamente las computadoras en la realidad virtual. Veremos también cómo lo hacen.

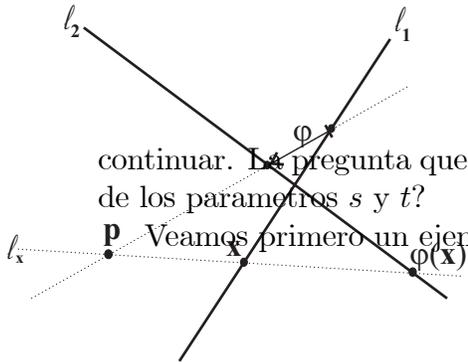
6.1.3 El quinto postulado

Historicamente

6.2 Proyecciones de rectas en rectas

Supongamos que tenemos dos rectas l_1 y l_2 en \mathbb{R}^2 parametrizadas con parámetros s y t respectivamente. Sea $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ un punto fuera de ellas. Podemos definir la *proyección desde \mathbf{p}* de l_1 a l_2 geoméricamente como sigue. Dado $\mathbf{x} \in l_1$, sea $l_{\mathbf{x}}$ la recta que pasa por \mathbf{p} y \mathbf{x} ; sea entonces

$$\begin{aligned} & \text{“}\varphi : l_1 \rightarrow l_2\text{”} \\ & \varphi(\mathbf{x}) = l_2 \cap l_{\mathbf{x}} \end{aligned} \tag{6.1}$$



continuar. La pregunta que nos interesa responder es ¿cómo se expresa φ en términos de los parámetros s y t ?

Veamos primero un ejemplo concreto y sencillo, siendo $\mathbf{p} = \mathbf{0}$,

$$\begin{aligned} l_1 &= \{(1, t) \mid t \in \mathbb{R}\}, \\ l_2 &= \{(s, 1) \mid s \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Dado $\mathbf{x} = (1, t) \in l_1$, la recta l_x es $\{(r, rt) \mid r \in \mathbb{R}\}$. Así que $l_x \cap l_2$ estará dado por la r que cumple $rt = 1$, es decir $r = 1/t$, y por lo tanto

$$\varphi(1, t) = (1/t, 1)$$

que está bien definida excepto cuando $t = 0$, correspondiendo a que la recta por $(1, 0)$ y el origen no interseca a l_2 . Pensando a φ como función entre los parámetros, tenemos entonces

$$\text{“} \varphi(t) = \frac{1}{t} \text{”}$$

donde el entrecomillado significa que hemos abusado de la notación. Para hacer esto más preciso, y de una vez más general, notemos primero que la proyección desde un punto a una recta se puede extender a casi todo el plano.

Fijando a una recta l y a un punto \mathbf{p} fuera de ella, podemos definir para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, a $\varphi(\mathbf{x}) \in l$ como la intersección de la recta que pasa por \mathbf{p} y por \mathbf{x} (que denotaremos como $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle$) con la recta l .

$$\varphi(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \cap l$$

Esta definición tiene sentido solo cuando \mathbf{x} no está en la paralela a l por \mathbf{p} , pues entonces no hay tal intersección. Sea l_p la paralela a l que pasa por \mathbf{p} , entonces φ esta bien definida como función

$$\varphi : \mathbb{R}^2 - l_p \rightarrow l.$$

Por ejemplo, en el caso en que l es la recta $y = 1$ (l_2 del ejemplo anterior) y que $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, se tiene que

$$\varphi(x, y) = (x/y, 1), \tag{6.2}$$

que está bien definida cuando $y \neq 0$.

Ahora sí estamos en posición de demostrar el siguiente lema que responde a nuestra pregunta inicial

Lema 6.2.1 Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas en \mathbb{R}^2 parametrizadas afinmente con parametros s y t respectivamente; y sea \mathbf{p} un punto fuera de ellas (i.e. $\mathbf{p} \notin \ell_1 \cup \ell_2$). La proyección desde \mathbf{p} de ℓ_1 a ℓ_2 tiene la expresión paramétrica

$$\mu(s) = \frac{as + b}{cs + d}$$

para algunas constantes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y no todas ellas cero.

Demostración. Por el Teorema ?? existe una única transformación afín de \mathbb{R}^2 que manda al punto \mathbf{p} en el origen y a la recta ℓ_2 en la recta $\ell : y = 1$ haciendo corresponder al parametro t con el parametro natural x ; es decir que manda a \mathbf{p} en $\mathbf{0}$, al punto base en ℓ_2 ($t = 0$) en $(0, 1)$ y al punto en ℓ_2 con $t = 1$ en $(1, 1)$. Esta transformación afín manda a la recta ℓ_1 en una nueva recta ℓ'_1 que al parametrizarse con s tiene la expresión

$$\ell'_1 = \{(as + b, cs + d) \mid s \in \mathbb{R}\},$$

para algunos $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ no todas cero, pues $(c, d) \neq (0, 0)$ ya que $\mathbf{p} \notin \ell_1$. Puesto que la proyección desde un punto es una construcción geométrica que no cambia por transformaciones afines (ya que estas preservan rectas), entonces de la ecuación (6.2) y lo anterior se obtiene el Lema. \square

Para fijar ideas, veamos un ejemplo concreto y a través de él la idea de otra demostración que si siguiéramos en general daría una enorme complicación de letras, aunque no así de números.

6.2.1 Ejemplo

Sean $\mathbf{p} = (1, 3)$,

$$\ell_1 = \{(2s + 1, s + 2) \mid s \in \mathbb{R}\},$$

$$\ell_2 = \{(t - 1, 2 - t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Queremos escribir la proyección φ de ℓ_1 a ℓ_2 desde \mathbf{p} definida en (6.1) como una función μ entre los parametros correspondientes. Para hacerlo, será conveniente escribir a las rectas como función, es decir $\ell_1(s) = (2s + 1, s + 2)$ y análogamente para ℓ_2 . Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \mu(s) = t &\Leftrightarrow \ell_1(s), \ell_2(t) \text{ y } \mathbf{p} \text{ están alineados} \\ &\Leftrightarrow \ell_1(s) - \mathbf{p} \parallel \ell_2(t) - \mathbf{p} \\ &\Leftrightarrow (2s, s - 1) \parallel (t - 2, -t - 1) \\ &\Leftrightarrow 2s(-t - 1) - (s - 1)(t - 2) = 0 \end{aligned}$$

donde usamos el criterio de que dos vectores son paralelos si y sólo si su determinante es cero. Y de esta última ecuación ya se puede despejar t en términos de s . Al desarrollarla nos da:

$$\begin{aligned} -3st + t - 2 &= 0 \\ t(-3s + 1) &= 2 \\ t &= \frac{-2}{3s - 1} \end{aligned}$$

que nos dice que la función buscada es

$$\mu(s) = \frac{-2}{3s - 1}.$$

EJERCICIO 6.1 En el ejemplo anterior, encuentra la función inversa de μ . Es decir la expresión paramétrica de la proyección desde \mathbf{p} de ℓ_2 en ℓ_1 ; llamémosla ν .

EJERCICIO 6.2 ¿En dónde no están definidas las funciones μ y ν ? ¿A que corresponden geoméricamente? Haz un dibujo.

EJERCICIO 6.3 Existe un único punto en ℓ_2 que no está en la imagen de la proyección. ¿A qué t corresponde, y quién es geoméricamente?

EJERCICIO 6.4 Análogamente, quién es la única s que no está en la imagen de ν . Dibújala.

EJERCICIO 6.5 Sean $\ell_1 = \{(s - 1, 2s + 2) \mid s \in \mathbb{R}\}$ y $\ell_2 = \{(3t + 2, -t + 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Encuentra las expresiones paramétricas de las proyecciones de ℓ_1 a ℓ_2 y de ℓ_2 a ℓ_1 desde los puntos $\mathbf{p} = (-1, 1)$ y $\mathbf{q} = (2, 2)$.

6.3 Transformaciones de Möbius

Motivados por la sección anterior definamos una *transformación de Möbius* como la expresión

$$\mu(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \tag{6.3}$$

donde x es una variable en \mathbb{R} y $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ son constantes y no todas ellas son cero.

La hemos llamado “expresión” y no función pues tiene un problema. Para el número real x_0 que cumple $cx_0 + d = 0$ ($x_0 = -d/c$) no está definida como número real, pues no se puede dividir por cero. Sin embargo, es claro que el límite de $\mu(x)$ cuando x tiende a x_0 es infinito. Al aproximarnos por un lado de x_0 (de tal manera que $cx + d$ tenga el mismo signo que $ax + d$) da valores tan grandes como queramos (nos aproximamos a ∞ por el lado positivo), y al aproximarnos a x_0 por el otro lado nos aproximamos a ∞ por el lado negativo. Si le añadimos a la recta real un punto al infinito, μ mandaría naturalmente a $-d/c$ al infinito. Formalizemos esta idea:

Definición 6.3.1 La recta proyectiva, \mathbb{P}^1 , es

$$\mathbb{P}^1 := \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

es decir, consta de los números reales junto con un nuevo punto llamado infinito y denotado ∞ al que se aproxima uno creciendo tanto por el lado positivo de la recta como por el negativo.

Y entonces hemos demostrado una parte del siguiente lema.

Lema 6.3.1 *La transformación de Möbius (6.3) define una función*

$$\mu : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$$

que es biyectiva si y solo si $ad - bc \neq 0$.

Demostración. Hemos visto que μ está bien definida en todo \mathbb{R} , haciendo $\mu(-c/d) = \infty$. Nos falta definir $\mu(\infty)$; y esta definición de nueva cuenta es natural pues μ tiene un límite bien definido en ∞ . Esto se ve cambiando de variable:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + b}{cx + d} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{a(1/y) + b}{c(1/y) + d} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{a + by}{c + dy} = \frac{a}{c}.$$

Definimos entonces $\mu(\infty) = a/c$ si $c \neq 0$, y $\mu(\infty) = \infty$ si $c = 0$. Por lo tanto μ está bien definida en todo el dominio.

Para ver si es biyectiva o no, intentaremos encontrar la función inversa. Pensamos entonces en una nueva variable, y digamos, definida por

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

y tratemos de despejar a x :

$$\begin{aligned} y(cx + d) &= ax + b \\ cxy + dy - ax &= b \\ x(cy - a) &= -dy + b \end{aligned}$$

de donde,

$$x = \frac{dy - b}{-cy + a}.$$

Hasta ahora, no hemos puesto cuidado en si dividimos por cero o no; hemos procedido intempestivamente. Pero procedamos ahora más formalmente para demostrar lo que nos falta. Esta última expresión nos dice quién, si acaso, debía ser la inversa. Así que definamos

$$\nu(x) = \frac{dy - b}{-cy + a}. \quad (6.4)$$

Por la primera parte de esta demostración, ν es una función de \mathbb{P}^1 en \mathbb{P}^1 ; y cumple

$$\begin{aligned} (\nu \circ \mu)(x) &= \frac{d\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) - b}{-c\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) + a} \\ &= \frac{adx + bd - bcx - bd}{-acx - bc + acx + ad} \\ &= \frac{(ad - bc)x}{ad - bc} . \end{aligned}$$

Si $ad - bc \neq 0$, esta última expresión es x (para cualquier $x \in \mathbb{R}$ y también cuando $x = \infty$ usando las definiciones); de tal manera que μ es biyectiva pues su inversa es ν .

Nos falta ver que si $ad - bc = 0$ entonces μ no es biyectiva; de hecho es constante. Esto se ve por cuatro casos cuando alguna de las constantes es distinta de cero. Por ejemplo, si $d \neq 0$, multiplicando arriba y abajo por d en la expresión de μ se obtiene

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \frac{d(ax + b)}{d(cx + d)} = \frac{adx + bd}{d(cx + d)} \\ &= \frac{bcx + bd}{d(cx + d)} = \frac{b(cx + d)}{d(cx + d)} = \frac{b}{d} \end{aligned}$$

independientemente de la x . Como los otros casos son análogos, esto demuestra el Lema. \square

Observemos que en la demostración anterior, encontramos la fórmula de la inversa de una función de Moebius y que está de nuevo resultado del mismo tipo. Si definimos a las *proyectividades de \mathbb{P}^1* (también conocidas como las *transformaciones de Moebius*) como

$$\text{Pr}(1) = \left\{ \mu : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \mid \mu(x) = \frac{ax + b}{cx + d}; ad - bc \neq 0 \right\}$$

tenemos entonces:

Teorema 6.3.1 $\text{Pr}(1)$ es un grupo de transformaciones de la recta proyectiva \mathbb{P}^1 .

Demostración. Como la identidad es claramente una transformación de Moebius (tómese $a = d = 1$ y $b = c = 0$) y hemos visto que sus inversas también lo son, sólo nos falta ver que la composición de transformaciones de Moebius también es de Moebius. Sean

$$\mu(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad \text{y} \quad \nu(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} .$$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} (\mu \circ \nu)(x) &= \frac{a \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \right) + b}{c \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \right) + d} = \frac{a(\alpha x + \beta) + b(\gamma x + \delta)}{c(\alpha x + \beta) + d(\gamma x + \delta)} \\ &= \frac{(a\alpha + b\gamma)x + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)x + (c\beta + d\delta)} \in \text{Pr}(1). \end{aligned} \quad (6.5)$$

□

Si pensamos que la recta proyectiva es una extensión de la recta real (se le añadió el punto al infinito), resulta entonces que las transformaciones afines son precisamente las proyectivas que fijan al infinito. Es decir, las proyectivas son una extensión de las afines. Pues si $\mu \in \text{Pr}(1)$ es tal que $\mu(\infty) = \infty$, entonces (siguiendo con la expresión (6.3)), como $\mu(\infty) = a/c$, se tiene que $c = 0$. Esto implica que $d \neq 0$ (pues $ad - bc \neq 0$) y por tanto

$$\mu(x) = (a/d)x + (b/d)$$

que es una transformación afín. Hemos demostrado que $\mathbf{Af}(1) \subset \text{Pr}(1)$, y más precisamente que

$$\mathbf{Af}(1) = \{\mu \in \text{Pr}(1) \mid \mu(\infty) = \infty\}$$

pues estas transformaciones de Moebius se pueden interpretar como transformaciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} .

EJERCICIO 6.6 Para diversas transformaciones de Moebius (las que aparecen en los ejercicios anteriores, cuando menos), encuentra sus composiciones y sus inversas.

6.3.1 Teorema de 3 en 3

Si las transformaciones afines mandan cualquier pareja de puntos en cualquier otra, ahora las proyectivas mandan ternas en ternas (correspondiendo al hecho de que con $\text{Pr}(1)$ el infinito ya puede ir a cualquier otro punto).

Teorema 6.3.2 *Dadas dos ternas $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ y $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ de puntos distintos en \mathbb{P}^1 ; existe una única transformación proyectiva $\mu \in \text{Pr}(1)$ tal que $\mu(\alpha_i) = \beta_i$ para $i = 0, 1, 2$.*

Demostración. Veamos primero el caso en que $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = \infty$. Estamos buscando

$$\mu(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (6.6)$$

(i.e. las constantes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) tal que $\mu(\alpha_i) = \beta_i$ para $i = 0, 1, 2$. Las condiciones nos dan tres ecuaciones

$$\frac{b}{d} = \beta_0, \quad \frac{a+b}{c+d} = \beta_1, \quad \frac{a}{c} = \beta_2. \quad (6.7)$$

Supongamos primero que las β_i son reales (i.e. que ninguna es ∞). De la primera y la tercera ecuación se obtiene $b = \beta_0 d$ y $a = \beta_2 c$, que, sustituyendo en la segunda, nos da

$$(\beta_2 - \beta_1)c + (\beta_0 - \beta_1)d = 0$$

Esta ecuación lineal en dos incógnitas tiene como una solución no trivial (recuérdese al compadre ortogonal), a:

$$c = \beta_1 - \beta_0, \quad d = \beta_2 - \beta_1$$

y por tanto

$$a = \beta_2(\beta_1 - \beta_0), \quad b = \beta_0(\beta_2 - \beta_1).$$

Si alguna de las β_i fuera ∞ (digamos $\beta_0 = \infty$), la ecuación correspondiente nos indica que el denominador es cero (en el ejemplo, que $d = 0$). Y de cualquier manera el sistema tiene solución (que se deja al lector).

En el caso general (las α_i son cualesquiera), se puede proceder de dos maneras. La primera, más económica en casos particulares, sería traducir las ecuaciones $\mu(\alpha_i) = \beta_i$ a ecuaciones lineales para obtener el sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas siguiente

$$\begin{aligned} \alpha_0 a + b - \alpha_0 \beta_0 c - \beta_0 d &= 0 \\ \alpha_1 a + b - \alpha_1 \beta_1 c - \beta_1 d &= 0 \\ \alpha_2 a + b - \alpha_2 \beta_2 c - \beta_2 d &= 0 \end{aligned}$$

(en el caso en que todas las constantes sean reales, o uno equivalente cuando aparezcan infinitos), y encontrar una solución no trivial. O bien se puede proceder usando el caso que ya resolvimos y que las transformaciones de Moebius no constantes tienen inversa. Si ν (y, respectivamente, μ) es la transformación de Moebius que manda a $0, 1, \infty$ en $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ (y, respectivamente, en $\beta_0, \beta_1, \beta_2$) entonces la que estamos buscando es $\mu \circ \nu^{-1}$.

Falta demostrar que la transformación de Moebius que hemos encontrado es única. Para esto, consideremos primero un caso muy especial, cuando las dos ternas en cuestión son la *terna canónica* $0, 1, \infty$. Supongamos entonces que una transformación de Moebius μ , dada por (6.6) cumple que $\mu(0) = 0$, $\mu(1) = 1$ y $\mu(\infty) = \infty$. Queremos compararla con la identidad. En este caso, las ecuaciones (6.7) nos dan:

$$\frac{b}{d} = 0, \quad \frac{a+b}{c+d} = 1, \quad \frac{a}{c} = \infty.$$

La primera dice que $b = 0$ y la tercera que $c = 0$, así que la segunda implica que $a = d$. Y en consecuencia

$$\mu(x) = \frac{a}{d}x = x$$

como ya sabemos. Nótese que no se puede demostrar que $a = 1 = d$; simplemente demostramos que $a = d$ (y que son no cero), y por tanto que $a/d = 1$. Pues aunque las transformaciones de Moebius están bien definidas, las constantes a, b, c, d que las definen no están específicamente determinadas: si multiplicamos a todas ellas por una misma constante no cero, obtenemos la misma función. Para concluir con el caso general conviene entonces recapitular un poco y establecer nueva notación.

Una función de Moebius está determinada por cuatro constantes reales, que, como ya sabemos, y por varias “casualidades” que se nos han presentado, conviene empaquetar en una matriz. Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Si esta matriz es distinta de la matriz cero ($A \neq \mathbf{0}$), le podemos asociar la función de Moebius

$$\mu_A(x) = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Obsérvese que para $t \neq 0$ se tiene que $\mu_A = \mu_{tA}$, pues

$$\mu_{tA}(x) = \frac{tax + tb}{tcx + td} = \frac{t(ax + b)}{t(cx + d)} = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Esta asignación de matrices a funciones de Moebius tiene además las bonitas propiedades siguientes. Primero, μ_A es una transformación (biyectiva) si y sólo si $\det(A) \neq 0$; es decir, si y sólo si A es invertible (ver Teorema 6.3.1). Segundo, en este caso, la inversa de la transformación de Moebius corresponde a la inversa de la matriz, pues en la ecuación (6.4) las constantes corresponden a la matriz $\det(A)A^{-1}$, que por lo anterior tiene asociada la función de Moebius $\mu_{A^{-1}}$ (podemos resumir, $(\mu_A)^{-1} = \mu_{A^{-1}}$). Y tercero, por la ecuación (6.5), la composición de transformaciones de Moebius corresponde a la multiplicación de matrices, es decir, $\mu_A \circ \mu_B = \mu_{AB}$. Estas tres propiedades se resumiran en la frase: “la asociación $\mathbf{GL}(2) \rightarrow \text{Pr}(1)$ dada por $A \mapsto \mu_A$ es un *homomorfismo de grupos*”.

Ahora sí podemos concluir con elegancia la demostración del Teorema “tres en tres”.

Habíamos demostrado que si μ_A cumple que $\mu_A(0) = 0$, $\mu_A(1) = 1$ y $\mu_A(\infty) = \infty$ entonces existe $t \neq 0$ (de hecho $t = a$) tal que $A = tI$, es decir, que A es diagonal (y no cero). Supongamos ahora que A es una matriz cuya transformación de Moebius fija tres puntos distintos cualesquiera; es decir, tal que $\mu_A(\alpha_i) = \alpha_i$ para $i = 0, 1, 2$

con $\alpha_0 \neq \alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_0$. Por la primera parte de este Teorema, existe una matriz invertible B tal que $\mu_B(0) = \alpha_0$, $\mu_B(1) = \alpha_1$ y $\mu_B(\infty) = \alpha_2$. Es fácil ver que entonces la transformación de Moebius $\mu_{B^{-1}} \circ \mu_A \circ \mu_B$ fija a $0, 1, \infty$ y entonces, por lo que ya vimos, existe $t \neq 0$ tal que

$$B^{-1}AB = tI$$

Multiplicando por la izquierda por B y por la derecha por B^{-1} se obtiene

$$A = B(tI)B^{-1} = t(BIB^{-1}) = t(BB^{-1}) = tI .$$

Supongamos, por último, que A y B son dos matrices cuyas transformaciones de Moebius mandan una terna en otra terna igual. Entonces $\mu_{A^{-1}} \circ \mu_B$ fija a la primera terna, y por lo anterior se tiene que existe $t \neq 0$ tal que

$$A^{-1}B = tI ,$$

multiplicando por A tenemos que

$$B = A(tI) = t(AI) = tA .$$

Lo cual demuestra que son la misma transformación. □

EJERCICIO 6.7 Considera las siguientes ternas de puntos en \mathbb{P}^1 : $\mathbf{a} = (0, 1, \infty)$, $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{c} = (-1, 0, 1)$, $\mathbf{d} = (-1, \infty, 1)$. Encuentra una expresión para las doce transformaciones de Moebius que mandan, ordenadamente, a una de estas ternas en otra.

6.4 La recta proyectiva y \mathbb{R}^2

No por casualidad aparecieron las matrices para ayudarnos en la sección anterior. Recapitulemos. Las matrices invertibles habían surgido como los paquetes de información para definir las transformaciones lineales de \mathbb{R}^2 . Y ahora surgen como paquetes de información para transformaciones de Moebius con la ambigüedad de una constante no cero. Para que la matriz A “actúe” en \mathbb{R}^2 teníamos la siguiente fórmula

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

Recordemos también (6.2) que la proyección desde el origen de \mathbb{R}^2 a la recta canónica $y = 1$ tiene la expresión

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/y \\ 1 \end{pmatrix},$$

de tal manera que si identificamos al punto $(x, 1)$ en la recta canónica con su primera coordenada x en \mathbb{R} , podemos escribir (entrecomillado por el abuso de notación):

$$“\mu_A(x) = \varphi\left(A \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \varphi \begin{pmatrix} ax + b \\ cx + d \end{pmatrix} = \frac{ax + b}{cx + d}.”$$

Más formalmente, si ℓ es la recta canónica $y = 1$ y f es la función lineal asociada a A . Podemos concluir que μ_A es la función de Moebius que relaciona los parametros naturales de la recta $f(\ell) = \{(ax + b, cx + d) \mid x \in \mathbb{R}\}$ y la recta ℓ con la proyección desde el origen. Lo cual demuestra que toda transformación de Moebius surge de una proyección.

Pero esto se puede formalizar de manera más elegante y sin entrecomillados.

6.4.1 Proporciones

Los griegos pensaban a los números reales como proporciones entre números enteros. Por ejemplo, lo que ahora conocemos como $1/2$ o 0.5 , ellos lo pensaban como la proporción del 1 al 2, o del 2 al 4 o del 3 al 6... que en la primaria se denota “ $1 : 2 = 2 : 4 = \dots$ ”. Se llevaron una gran sorpresa cuando geoméricamente encontraron un número (una distancia), a saber $\sqrt{2}$ (la hipotenusa del triángulo rectángulo isóceles con lado unitario) que no se podía expresar de esta manera. Ahora sabemos que no todos los números reales son racionales, pero en fin, la idea básica es buena y ahora la retomamos pero de manera más general, pensando en proporciones no sólo de números enteros sino de números reales.

Cada número real $x \in \mathbb{R}$ se puede pensar como la proporción del x al 1, que es la misma proporción del $2x$ al 2, o del tx al t para cualquier t . Una pareja (x, y) cualquiera, como proporción $x : y$, representa al número que multiplicado por y nos da x . El 0 es entonces la proporción del 0 a cualquier t y podemos pensar al ∞ como la proporción de cualquier número al 0. En el texto anterior surge una terrible ambigüedad respecto a la pareja $(0, 0)$; vuélvase a leer con ese ejemplo maligno en mente y se verá que podría representar a cualquier proporción, a cualquier número. Pero si eliminamos a la pareja $(0, 0)$ y le pedimos a t que nunca sea cero, la ambigüedad desaparece. Formalizemos la idea, con la notación de las proporciones de primaria.

Definición 6.4.1 Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \neq (0, 0)$, sea

$$[x : y] := \{(tx, ty) \mid t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}. \quad (6.9)$$

Que se puede leer “la proporción de x a y ”. Siempre que consideremos la expresión $[x : y]$, suponemos que no ambas “coordenadas” son cero.

Observemos ahora que los puntos de la recta proyectiva corresponden biunivocamente a las proporciones, pues a $x \in \mathbb{R}$ le corresponde la proporción $[x : 1]$ y al ∞ le corresponde la proporción $[1 : 0]$. E inversamente, a la proporción $[x : y]$ le corresponde el número x/y (donde $x/0 = \infty$ cuando $x \neq 0$). De tal manera que podemos

redefinir a la recta proyectiva como

$$\mathbb{P}^1 = \{[x : y] \mid (0, 0) \neq (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

A esta manera de ver la recta proyectiva se le conoce como la dada por *coordenadas homogéneas*. Así, un punto en \mathbb{P}^1 dado por coordenadas homogéneas es la proporción $[x : y]$. La gran ventaja es que ahora todos los puntos de \mathbb{P}^1 pueden ser tratados de la misma manera; ya no hay que hacer distinciones para ∞ ; la homogeneidad es evidente.

6.4.2 Rectas por el origen

Hemos definido a $[x : y]$ en (6.9) como un subconjunto de \mathbb{R}^2 , que es precisamente una recta por el origen. Así que los puntos de \mathbb{P}^1 corresponden a las rectas por el origen en \mathbb{R}^2 . Si pensamos, como ya lo hicimos antes, en la recta $y = 1$ como los reales, la correspondencia $[x : y] \mapsto x/y$ corresponde a intersectar la recta por el origen $[x : y]$ con la recta canónica $y = 1$, y la única que no tiene intersección (el eje de las x dado por $y = 0$) corresponde al infinito.

Conviene entonces introducir la notación

$$[\mathbf{x}] := [x : y], \text{ donde } (0, 0) \neq (x, y) = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2.$$

Que nos da una función de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ sobre \mathbb{P}^1 , en la cuál la imagen inversa de un punto en \mathbb{P}^1 es la recta por el origen a la que corresponde, pues obsérvese que por la definición $[\mathbf{x}] = [t\mathbf{x}]$ para cualquier $t \neq 0$.

Ahora, las transformaciones proyectivas se expresan en coordenadas homogéneas de manera muy natural. Dada una matriz $A \in \mathbf{GL}(2)$ su transformación proyectiva μ_A se expresa como

$$\begin{aligned} \mu_A : \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^1 \\ \mu_A([\mathbf{x}]) &= [A\mathbf{x}] \end{aligned}$$

pues si A es como en (6.8) y $\mathbf{x} = (x, y)$ tenemos que

$$[A\mathbf{x}] = [ax + by : cx + dy].$$

Esto corresponde a nuestra antigua idea de transformación de Moebius pues el número x en coordenadas homogéneas es $[x : 1]$ al cual A manda en $[ax + b : cx + d]$ que corresponde a $(ax + b)/(cx + d)$, y el infinito corresponde al $[1 : 0]$ que va en $[a : c]$ que corresponde a a/c como debía ser.

Este enfoque es el adecuado pues fácilmente se generaliza a más dimensiones. Pero antes de hacerlo regresemos con el pintor y algunos de sus problemas prácticos.

EJERCICIO 6.8 Con nuestra nueva definición de \mathbb{P}^1 y de transformaciones proyectivas, es decir, con coordenadas homogéneas y matrices, demuestra el Teorema de 3 en 3.

6.5 El problema del pintor II

Recordemos el problema del pintor que quiere pintar en un lienzo una vía de ferrocarril, y nos pregunta ¿a cada cuántos centímetros dibujo los durmientes? Hemos desarrollado una gran teoría a raíz de esta pregunta y además con posibilidades de generalizarse a otras dimensiones; antes de hacerlo, hagamos una pausa y respondámosle.

El riel (izquierdo, para fijar ideas) se dibuja como una línea recta en el lienzo, y esta línea tiene un punto distinguido: el punto de fuga en donde los dos rieles de la vía parecen juntarse. Con ese punto y cualquier otro, el del durmiente 0 digamos, se define esa recta. Sabemos que la función que nos dice a dónde debe ir el durmiente n es una transformación de Moebius, y que esta estará determinada por la imagen del durmiente 0, el punto de fuga, ∞ , y algún otro punto. Así que si el pintor nos da el ∞ , el durmiente 0 y el durmiente 1 en el lienzo, podríamos calcular los coeficientes de la función de Moebius (después de medir cuidadosamente las distancias en el lienzo), programarla en una calculadora y regresársela al pintor para que continúe con su trabajo. La calculadora le dirá exactamente donde dibujar al durmiente 2, al 3, etc., con el simple acto de meter un número, darle “enter” y vamos: aparece la distancia en centímetros desde el 0 y con tantos decimales como queramos. Problema resuelto

Pero no para el pintor, que requeriría de un matemático de cabecera. El quisiera una solución dentro de sus posibilidades, más cercana a las técnicas que maneja. Veamos de nuevo. También hemos demostrado que cualquier transformación de Moebius se puede ver como la proyección de una línea en otra. Queremos proyectar una escala afín (la del ferrocarril real con unidad de durmientes) a la escala proyectiva del lienzo desde el punto fijo de visión del pintor. Puesto que es una transformación de Moebius entre rectas, y estas se comportan bien, entonces debiera ser posible diseñarle una construcción geométrica para que con líneas y puntos auxiliares en el lienzo reconstruya la escala proyectiva (del riel en el lienzo) a partir de una escala afín sin necesidad de una calculadora, o de estarle atinando a ojo.

Suponemos entonces que tenemos definido el riel en el lienzo junto con sus tres puntos distinguidos. Fijemos arbitrariamente un punto de proyección \mathbf{p} (fuera del riel). La recta ℓ que pasa por \mathbf{p} e ∞ determina la dirección de la recta cuya escala afín vamos a proyectar (pues el infinito de esta debe proyectarse en el infinito que tenemos dado). Para cualquier recta paralela a ℓ , sus puntos de intersección con las rectas por \mathbf{p} y el 0 y por \mathbf{p} y el 1 (nos referimos a el 0 y el 1 en el riel), determinan la escala. Con un compás se puede reproducir esta escala afín que, proyectándola desde \mathbf{p} , nos da la escala proyectiva en el riel. Lo maravilloso de la teoría que hemos desarrollado es que demuestra que este procedimiento no depende del punto de proyección o de la recta a proyectar que escojamos; además, demuestra también que coincide con el primer método (el de la calculadora), y, por si fuera poco, que estos dos métodos coinciden con el (irrealizable) de proyectar al riel verdadero sobre el riel del lienzo.

Con este método, el pintor puede sacar la escalaprojectiva del riel derecho, a partir

del infinito, que comparten los rieles, y los puntos donde se ven el durmiente 0 y el durmiente 1. Y concluir con una buena perspectiva de la vía de tren. Pero se puede aún simplificar el procedimiento si la vía del tren está totalmente de frente, de tal manera que los durmientes se ven paralelos (ver Ejercicio ??), o bien si está lo suficientemente ladeada para que los durmientes estén en perspectiva suficiente. En este caso, que analizaremos a continuación, conviene plantearse un problema que parece más difícil: el de dibujar un piso cuadrículado en perspectiva. Es decir, proyectar desde un punto fijo de vista un piso cuadrículado sobre un lienzo. Si le pedimos al pintor que dibuje, a ojo de buen pintor, una simple lozeta, podremos reconstruir todo el piso. Pensemos en que la franja del piso que contiene a la lozeta y que se aleja a la derecha (*horizontal*, llamémosla) es una vía de ferrocarril con durmientes verticales. Las dos líneas horizontales parecen converger a un punto de fuga que en el lienzo es un punto bien definido (el infinito horizontal, ∞_h) como el punto de intersección de las dos rectas definidas por los lados opuestos de la lozeta ya dibujada. Por la misma razón, las líneas de la franja vertical convergen a otro punto (el infinito vertical, ∞_v). Si estos dos puntos de fuga caen en el lienzo (que es el caso que analizaremos, en el cual vemos al piso de ladito), entonces determinan una línea que es la del horizonte (definida en el lienzo como la intersección de este con el plano paralelo al piso que pasa por el ojo del pintor, en general, una línea horizontal en el lienzo justo a la misma altura del piso que el ojo de proyección). Sabemos que todas las líneas horizontales del piso se dibujan como líneas en el lienzo que confluyen al punto ∞_h ; no importa el ancho de la vía del tren. Y por la misma razón, las verticales confluyen en ∞_v . Pero las horizontales y las verticales no gozan de ningún beneficio (excepto definir la cuadrícula), cualquier otro sistema de rectas paralelas se proyecta en un sistema que confluye a algún punto en el horizonte. Así que podemos tomar una diagonal de la lozeta dada, que intersecta al horizonte en un punto que llamaremos infinito diagonal, ∞_d , que está entre ∞_v e ∞_h .

Si llamamos 0 y 1, como en el caso del ferrocarril, a los dos vértices en un lado horizontal de la lozeta, y $0'$ y $1'$ a los correspondientes del lado opuesto, de tal manera que la diagonal pase por $0'$ y 1. Entonces la línea que va de $1'$ a ∞_d es justo donde se dibuja la diagonal de la siguiente lozeta; cuya intersección con la horizontal por 0 y 1 nos da el vértice 2 correspondiente a la siguiente lozeta. Trazando ahora la vertical por 2, su intersección con el otro riel nos da el vértice $2'$ completando así la información para dibujar la lozeta 1 (empezamos con la 0). Es claro que este proceso se puede iterar para encontrar los durmientes que queramos del ferrocarril horizontal.

Pero de manera análoga, se puede completar el ferrocarril vertical y por ahí en medio van apareciendo los vértices de más lozetas. E inclusive de lozetas “negativas”.

Este método se conoce desde el renacimiento. Obsérvese que ya ni siquiera necesitamos compas, con pura regla funciona. Y funciona bien, lo cual indica que debe haber teoremas que lo sustenten. Por ejemplo ¿por qué es que los puntos de intersección de las diagonales con las verticales siguientes ($0'$ y 1 con $2'$ y 2, $1'$ y 2 con $3'$ y 3, $2'$ y 3 con $4'$ y 4, etc.) quedan todos alineados con ∞_h ? Desde el renacimiento

Este es el
piso, con una
lozeta
distinguida
pintada en el
lienzo

se sabe por experiencia que así resulta, pero los fundamentos matemáticos tardaron siglos en desarrollarse. Por el momento dejemos esto como motivación para estudiar y definir al plano proyectivo, dejando también al pintor contento con los métodos que sí puede aplicar.

6.6 El plano proyectivo

Nuestra definición del plano proyectivo será analítica, generalizando la idea de coordenadas homogéneas que acabamos de desarrollar. Esto nos permitirá hacer cálculos y definir objetos geométricos de manera precisa, pero peca de ser muy abstracta. Para tener una intuición geométrica del plano proyectivo, que es muy importante, veremos también otros modelos. Es preciso remarcar, una y otra vez, que cada modelo tiene ventajas y desventajas, no hay una manera de “ver” todo el plano proyectivo de golpe, como creemos tener la idea del plano euclidiano. Pero observemos que esto último tampoco es cierto. Lo que intuitivamente sabemos del plano euclidiano es por pequeñas porciones de él, el pizarrón, el piso o una hoja de papel, y de ahí extrapolamos diciendo “todo es así”. Lo mismo sucede con el plano proyectivo, en pequeñas porciones es como el euclidiano pero también incluye un cierto comportamiento al infinito que se convierte en parte integral de él.

6.6.1 Coordenadas homogéneas

Dado $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (esto es, tal que alguna de las tres coordenadas de \mathbf{x} es distinta de cero), sea

$$[\mathbf{x}] = [x : y : z] := \{(tx, ty, tz) \mid t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}.$$

Es decir, $[\mathbf{x}]$ es la recta por el origen con dirección \mathbf{x} , menos el origen. Se tiene entonces que

$$[\mathbf{x}] = [t\mathbf{x}] \text{ para cualquier } t \neq 0.$$

Y además consideraremos a $[\mathbf{0}]$ o $[0 : 0 : 0]$ como una expresión sin sentido.

Definimos al *plano proyectivo* \mathbb{P}^2 como

$$\mathbb{P}^2 := \{[\mathbf{x}] \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\}.$$

Nos referimos a los elementos de \mathbb{P}^2 como *puntos* y a la expresión $[x : y : z]$ o $[\mathbf{x}]$ como un punto de \mathbb{P}^2 dado por *coordenadas homogéneas*.

Nótese que las coordenadas homogéneas de un punto en \mathbb{P}^2 no son únicas (a diferencia de \mathbb{R}^2 , donde sí lo son). Hay cierta ambigüedad, pero no es tan grave, pues

$$[\mathbf{x}] = [\mathbf{y}] \text{ si y sólo si } \mathbf{y} = t\mathbf{x} \text{ para alguna } t \neq 0$$

así que por ejemplo, $[1 : 2 : 3] = [2 : 4 : 6]$, o bien $[1 : 0 : 0] = [8 : 0 : 0] = [2^8 : 0 : 0]$. Como en el caso de \mathbb{R}^2 (o de \mathbb{R}^n) los puntos de \mathbb{P}^2 tienen coordenadas, y esto nos permitirá hacer geometría con métodos analíticos, pero habrá que tener cuidado de que las definiciones no dependan de coordenadas específicas sino de las homogéneas.

EJERCICIO 6.9 Generaliza nuestra definición de \mathbb{P}^1 y de \mathbb{P}^2 para definir \mathbb{P}^3 y \mathbb{P}^n .

6.6.2 Rectas proyectivas

Tenemos que *los puntos de \mathbb{P}^2 corresponden de manera biunívoca con las rectas en \mathbb{R}^3 que pasan por el origen*. Podemos definir entonces a los subconjuntos distinguidos de \mathbb{P}^2 que llamaremos *rectas* correspondiendo a los planos por el origen en \mathbb{R}^3 , es decir, una *recta* en \mathbb{P}^2 es el conjunto de puntos cuyas correspondientes rectas en \mathbb{R}^3 forman un plano. Tiene sentido, pues en la sección anterior vimos que los puntos de una recta proyectiva corresponden biunívocamente a las rectas por el origen en un plano. Puesto que los planos en \mathbb{R}^3 están dados por una ecuación lineal, podemos ser más explícitos:

Sea \mathbf{n} un vector no nulo en \mathbb{R}^3 , definimos la *recta dada por \mathbf{n}* en \mathbb{P}^2 como

$$\ell_{\mathbf{n}} := \{[\mathbf{x}] \in \mathbb{P}^2 \mid \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0\} . \quad (6.10)$$

Esta bien definida pues si tomamos $t \neq 0$, entonces

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{n} \cdot t\mathbf{x} = 0$$

pues $\mathbf{n} \cdot t\mathbf{x} = t(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})$, lo cual implica que no importa qué representante de un punto tomemos ($[\mathbf{x}]$ o $[t\mathbf{x}]$) la condición para pertenecer al conjunto da el mismo resultado (es cierta o no dependiendo del punto en \mathbb{P}^2 , no del representante en \mathbb{R}^3). Si $\mathbf{n} = (a, b, c)$ entonces $\ell_{\mathbf{n}}$ se describe por coordenadas homogéneas como

$$\ell_{\mathbf{n}} := \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \mid ax + by + cz = 0\} .$$

Y podemos decir que las rectas de \mathbb{P}^2 son precisamente los conjuntos $\ell_{\mathbf{n}}$ para $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$. Notemos además que si $t \neq 0$, entonces $\ell_{\mathbf{n}} = \ell_{t\mathbf{n}}$, (pues $t\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = t(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0$). Así que la recta proyectiva $\ell_{\mathbf{n}}$ depende no de \mathbf{n} (un vector no nulo en \mathbb{R}^3) sino de $[\mathbf{n}]$ (el correspondiente punto en \mathbb{P}^2); entonces podemos definir para $[\mathbf{n}] \in \mathbb{P}^2$ su *recta dual*

$$\ell_{[\mathbf{n}]} := \ell_{\mathbf{n}}$$

Dicho de otra manera, a cada recta por el origen en \mathbb{R}^3 ($[\mathbf{n}]$) le asociamos su plano perpendicular que pasa por el origen ($\ell_{[\mathbf{n}]}$). Pero además como cada plano por el origen tiene una única recta perpendicular por el origen, se tiene que

$$\ell_{\mathbf{n}} = \ell_{\mathbf{m}} \Leftrightarrow [\mathbf{n}] = [\mathbf{m}]$$

Así que hemos establecido una biyección entre las rectas de \mathbb{P}^2 y los puntos de \mathbb{P}^2

$$\ell_{[\mathbf{n}]} \longleftrightarrow [\mathbf{n}]$$

que llamaremos *dualidad*. La dualidad cumple propiedades muy bonitas que vienen de una básica que dice que un punto está en una recta si y sólo si su recta dual contiene al punto dual; es decir, dados $[\mathbf{p}]$ y $[\mathbf{q}]$ en \mathbb{P}^2 ,

$$[\mathbf{p}] \in \ell_{[\mathbf{q}]} \Leftrightarrow [\mathbf{q}] \in \ell_{[\mathbf{p}]}, \quad (6.11)$$

cuya demostración es obvia pues ambas condiciones son, por definición, equivalentes a $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0$.

EJERCICIO 6.10 ¿Cómo definirías rectas en \mathbb{P}^3 ?

EJERCICIO 6.11 ¿Cómo definirías planos en \mathbb{P}^3 ?

EJERCICIO 6.12 ¿Habrá dualidad en \mathbb{P}^3 ? ¿Entre quiénes y quiénes?

6.6.3 Axiomas de incidencia y el quinto postulado

Demostremos ahora las propiedades más elementales del plano proyectivo, que son las de “incidencia”, y se refieren a las relaciones “estar en” o “pasar por” que hay entre puntos y rectas.

Lema 6.6.1 *Por cualesquiera dos puntos de \mathbb{P}^2 pasa una recta, y si son distintos es única.*

Demostración. Sean $[\mathbf{a}]$ y $[\mathbf{b}]$ puntos en \mathbb{P}^2 . Si $[\mathbf{a}] = [\mathbf{b}]$ entonces para cualquier $[\mathbf{n}] \in \ell_{[\mathbf{a}]}$ se tiene que $[\mathbf{a}] \in \ell_{[\mathbf{n}]}$ por (6.11). Si $[\mathbf{a}] \neq [\mathbf{b}]$, sea $\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, entonces $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ y se tiene que $[\mathbf{a}], [\mathbf{b}] \in \ell_{[\mathbf{n}]}$, pues $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = 0$. Además, esta recta es única pues \mathbf{n} genera a la recta perpendicular al plano que generan los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} . \square

Y tenemos el resultado dual:

Lema 6.6.2 *Dos rectas distintas de \mathbb{P}^2 tienen un único punto en comun.*

Demostración. Dadas $\ell_{[\mathbf{a}]}$ y $\ell_{[\mathbf{b}]}$ rectas en \mathbb{P}^2 , si $\ell_{[\mathbf{a}]} = \ell_{[\mathbf{b}]}$ no hay nada que demostrar. Si $\ell_{[\mathbf{a}]} \neq \ell_{[\mathbf{b}]}$ (es decir, si $[\mathbf{a}] \neq [\mathbf{b}]$), sea $\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, entonces $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ y se tiene que $[\mathbf{n}] \in \ell_{[\mathbf{a}]} \cap \ell_{[\mathbf{b}]}$, pues $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} = 0$. \square

Notación 6.1 A veces será más fácil referirnos a los puntos de \mathbb{P}^2 por una sola letra como \mathbf{p} o \mathbf{q} ; en este caso, sabemos que podemos recurrir a sus coordenadas homogéneas o a algún vector representante, pero en el contexto estos no son relevantes. También será útil tener una notación para *la recta que generan dos puntos*:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$$

denotará la recta que pasa por \mathbf{p} y \mathbf{q} . Así que hemos demostrado que si $[\mathbf{a}] \neq [\mathbf{b}]$ entonces

$$\langle [\mathbf{a}], [\mathbf{b}] \rangle = \ell_{[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]}$$

Obsérvese que las dos demostraciones anteriores son casi la misma, esto no es casualidad. Se debe al *principio de dualidad* (6.11) que nos permite traducir cualquier resultado a su versión dual cambiando “recta” por “punto” y la relación “pasar por” por la de “estar en”. Pero de esto hablaremos más adelante con ejemplos más interesantes a la mano. Por el momento queremos insistir en la diferencia básica con el plano euclidiano.

En el plano euclidiano se cumple el Lema 6.6.1, pero no el ???. De hecho este último contradice al Quinto Postulado; establece que en el plano proyectivo no hay paralelismo, que cualquier par de rectas se comporta de la misma manera: se intersectan en un punto. Aunque no hemos demostrado que este es único.

EJERCICIO 6.13 Sean $[\mathbf{a}] = [1 : 0 : -1]$, $[\mathbf{b}] = [2 : 1 : -1]$, $[\mathbf{c}] = [0 : 1 : -1]$ y $[\mathbf{d}] = [1 : -1 : 3]$. Encuentra el punto de intersección de las rectas que pasan por $[\mathbf{a}]$ y $[\mathbf{b}]$ y por $[\mathbf{c}]$ y $[\mathbf{d}]$; es decir

$$\langle [\mathbf{a}], [\mathbf{b}] \rangle \cap \langle [\mathbf{c}], [\mathbf{d}] \rangle.$$

EJERCICIO 6.14 Los cuatro puntos del ejercicio anterior generan seis rectas cuyas intersecciones dan 7 puntos ¿cuáles son los dos que no hemos dado explícitamente?

EJERCICIO 6.15 En una carta coordenada haz un dibujo de los objetos mencionados en los ejercicios anteriores.

6.6.4 Parametrización de rectas proyectivas

Dados puntos $[\mathbf{a}], [\mathbf{b}] \in \mathbb{P}^2$, tales que $[\mathbf{a}] \neq [\mathbf{b}]$ tenemos una *parametrización* de la recta que pasa por ellos dada por la función

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^2 \\ [x : y] &\mapsto [x\mathbf{a} + y\mathbf{b}] \end{aligned}$$

Que corresponde a la manera natural de generar un plano por dos vectores dados. Esta función es inyectiva y nos dice que cada recta del plano es como la recta proyectiva modelo \mathbb{P}^1 . Sin embargo no está unívocamente determinada por los puntos $[\mathbf{a}]$ y $[\mathbf{b}]$ (aunque sí por sus representantes \mathbf{a} y \mathbf{b}). Si tomamos $t\mathbf{a}$ en vez de \mathbf{a} , con $t \neq 0$ por supuesto, entonces la asignación $[x : y] \mapsto [x(t\mathbf{a}) + y\mathbf{b}]$ sigue mandando pero en el resto de los puntos es diferente (si $t \neq 1$). Esto corresponde a que una transformación proyectiva de \mathbb{P}^1 está determinada por su valor en tres puntos, no sólo en dos. Pero dado cualquier otro punto $[\mathbf{c}] \in \langle [\mathbf{a}], [\mathbf{b}] \rangle$ se tiene que $\mathbf{c} = t\mathbf{a} + s\mathbf{b}$ para algunos t y s que son distintos de cero si $[\mathbf{a}] \neq [\mathbf{c}] \neq [\mathbf{b}]$. Y entonces la función

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^2 \\ [x : y] &\mapsto [x(t\mathbf{a}) + y(s\mathbf{b})] \end{aligned}$$

que manda si está unívocamente determinada.

Estas inclusiones de \mathbb{P}^1 en \mathbb{P}^2 se llaman *funciones proyectivas*. Tenemos entonces que todas las rectas de \mathbb{P}^2 son como nuestro modelo ideal de recta proyectiva \mathbb{P}^1 .

EJERCICIO 6.16 Sean $[\mathbf{a}] = [1 : 0 : -1]$, $[\mathbf{b}] = [2 : 1 : -1]$ y $[\mathbf{c}] = [0 : -1 : 0]$. Demuestra que son colineales y encuentra explícitamente la función proyectiva de \mathbb{P}^1 en \mathbb{P}^2 que manda al $[1 : 0]$ en $[\mathbf{a}]$, al $[0 : 1]$ en $[\mathbf{b}]$ y al $[1 : 1]$ en $[\mathbf{c}]$.

6.7 Modelos del plano proyectivo

6.7.1 Completación de \mathbb{R}^2

Consideremos al plano en \mathbb{R}^3 dado por la ecuación $z = 1$; llamémosle Π_z . Tiene una parametrización natural tomando como origen al tercer vector canónico \mathbf{e}_3 y como generadores a \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 ; es decir, lo podemos identificar con \mathbb{R}^2 mediante la inclusión:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \Pi_z \subset \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x, y, 1) \end{aligned}$$

Consideremos también al siguiente conjunto de \mathbb{P}^2 :

$$\mathbb{A}_z := \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \mid z \neq 0\}.$$

Consiste de todos los puntos de \mathbb{P}^2 que no cumplen $z = 0$; es decir, es el complemento en el plano proyectivo de la recta $\ell_{[\mathbf{e}_3]}$. Entonces, tenemos una biyección

$$\begin{aligned} \Pi_z &\rightarrow \mathbb{A}_z \\ (x, y, 1) &\mapsto [x : y : 1] \end{aligned}$$

cuya inversa es

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_z &\rightarrow \Pi_z \\ [x : y : z] &\mapsto (x/z, y/z, 1) \end{aligned}$$

Si pensamos a los puntos de \mathbb{P}^2 , geoméricamente, como rectas por el origen en \mathbb{R}^3 ; entonces \mathbb{A}_z consiste de todas estas rectas excepto las horizontales (en el plano $z = 0$), que corresponden a puntos de $\ell_{[\mathbf{e}_3]}$ y $\mathbb{A}_z = \mathbb{P}^2 - \ell_{[\mathbf{e}_3]}$. Cada una de estas rectas $[\mathbf{x}] \in \mathbb{A}_z$ intersecta a Π_z en un único punto. Y esta es la biyección $\mathbb{A}_z \rightarrow \Pi_z$, $([\mathbf{x}] \mapsto [\mathbf{x}] \cap \Pi_z)$.

Componiendo las dos biyecciones que acabamos de definir, podemos identificar a \mathbb{R}^2 con el complemento de una recta en \mathbb{P}^2 :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{A}_z = \mathbb{P}^2 - \ell_{[\mathbf{e}_3]} \\ (x, y) &\mapsto [x : y : 1] \end{aligned} \tag{6.12}$$

A esta inclusión de \mathbb{R}^2 en el plano proyectivo se le llama una *carta coordenada* (pues da coordenadas locales para un pedazo de \mathbb{P}^2). Observémos además que las rectas por el origen en \mathbb{R}^3 cercanas a las horizontales intersectan en puntos muy lejanos al plano Π_z y por tanto corresponden a puntos de norma muy grande en \mathbb{R}^2 . De tal manera, que si a \mathbb{R}^2 le “pegamos” una recta al infinito (llamémosla $\ell_\infty = \ell_{[\mathbf{e}_3]}$) obtenemos \mathbb{P}^2 ,

$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \ell_\infty$$

Veamos ahora que las rectas de \mathbb{R}^2 y de \mathbb{P}^2 se corresponden. Una recta ℓ en \mathbb{R}^2 está dada por una ecuación $ax + by = c$:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\} .$$

Sus puntos van bajo (6.12) a los puntos de la recta dual a $[a : b : -c]$:

$$\{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \mid ax + by - cz = 0\} ,$$

y al único que no le “pegan” es a $[-b : a : 0]$; que es justo la intersección de esta última recta con la recta al infinito. Geométricamente, una recta en \mathbb{R}^2 pensado como Π_z , genera junto con el origen (de \mathbb{R}^3) un plano que corresponde a una recta en \mathbb{P}^2 ; lo único que no se “ve” en Π_z es la intersección de ese plano con el plano horizontal ($z = 0$), que es $[-b : a : 0]$. Obsérvese además, que las rectas paralelas en \mathbb{R}^2 (obtenidas al variar c en la descripción anterior) pasan por el infinito en este mismo punto.

Inversamente, una recta en \mathbb{P}^2 corresponde a un plano por el origen en \mathbb{R}^3 , y todos ellos excepto el horizontal ($z = 0$) intersectan a Π_z en una recta.

Podemos resumir diciendo que el plano proyectivo se obtiene del euclidiano añadiendo un punto al infinito por cada clase de paralelismo de rectas. Las rectas del proyectivo son las rectas del euclidiano a las que se adjunta el punto al infinito de su clase de paralelismo (convirtiéndolas en rectas proyectivas), y además, todos los puntos al infinito constituyen una nueva recta, llamada “la recta al infinito”.

6.7.2 Cartas afines

En la sección anterior demostramos que \mathbb{P}^2 se puede ver como \mathbb{R}^2 junto con una recta al infinito ℓ_∞ . Podría parecer que esta recta tiene algo especial, pero no es así. Escogimos la tercera coordenada para definir el plano $\Pi_z \subset \mathbb{R}^3$ y el subconjunto \mathbb{A}_z de \mathbb{P}^2 . Podemos usar la segunda coordenada y para definir $\Pi_y : y = 1$; $\mathbb{A}_y := \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \mid y \neq 0\}$ de tal manera que $\mathbb{A}_y = \mathbb{P}^2 - \ell_{[\mathbf{e}_2]}$ y tenemos una nueva carta coordenada

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{A}_y \\ (x, z) &\mapsto [x : 1 : z] \end{aligned}$$

cuya inversa es

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_y &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ [x : y : z] &\mapsto (x/y, z/y) \end{aligned}$$

En esta nueva carta coordenada, lo que antes era la recta al infinito se ve como el primer eje coordenado de \mathbb{R}^2 , es decir, corresponde a la recta $\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = 0\}$; el origen de \mathbb{R}^2 corresponde al punto $[0 : 1 : 0] = [\mathbf{e}_2]$, y lo que ahora no se ve (la nueva recta al infinito) es su dual $\ell_{[\mathbf{e}_2]}$. Si pensamos a estas cartas coordenadas como fotografías de porciones grandes de \mathbb{P}^2 , con estas dos cartas hemos retratado a todos los puntos con excepción de uno: $[1 : 0 : 0] = [\mathbf{e}_1]$ que en ambas cartas quedo en el infinito. Pero debe ser claro ahora que si hacemos lo mismo con la primera coordenada x , obtenemos una nueva carta $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{A}_x = \mathbb{P}^2 - \ell_{[\mathbf{e}_1]}$ donde aparece $[\mathbf{e}_1]$ justo en el origen.

El nombre de “carta” que hemos estado usando impunemente, ahora sí cobra sentido: viene de la palabra antigua para “mapa”. Y con las tres cartas que hemos definido armamos un *atlas* que describe a todo el plano proyectivo. Nos dice que **el plano proyectivo es localmente como el euclidiano** y las rectas de ambos se corresponden (también localmente).

Hemos usado el apellido “coordenada” para las cartas, pues son funciones explícitas \mathbb{R}^2 en \mathbb{P}^2 que nos dan coordenadas locales al uitar una de las tres rectas $\ell_{[\mathbf{e}_i]}$. Pero, además de su sencillez, no hay nada de especial en estas tres rectas. La idea funciona para que cualquier recta se vaya al infinito, pero entonces lo que nos queda no tiene coordenadas naturales (para hacerse corresponder a \mathbb{R}^2) pues no habrá origen ni ejes canónicos. Veamos.

Dada una recta $\ell_{[\mathbf{n}]} \subset \mathbb{P}^2$ consideremos el plano $\Pi_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 1$ (el 1 podría cambiarse por cualquier constante no cero, pero así será más fácil pues cambiar al 1 corresponde a alargar \mathbf{n}). Cualquier recta por el origen $[\mathbf{x}] \in \mathbb{P}^2$ que cumpla que $[\mathbf{x}] \notin \ell_{[\mathbf{n}]}$ (es decir, que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \neq 0$) intersecta a $\Pi_{\mathbf{n}}$ justo en un punto. A saber, en $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})^{-1} \mathbf{x}$. De tal manera que $\Pi_{\mathbf{n}}$ puede identificarse con $\mathbb{P}^2 - \ell_{[\mathbf{n}]}$ por medio de la

función

$$\begin{aligned}\Pi_{\mathbf{n}} &\rightarrow \mathbb{P}^2 - \ell_{[\mathbf{n}]} \\ \mathbf{x} &\mapsto [\mathbf{x}] .\end{aligned}$$

Puesto que $\Pi_{\mathbf{n}}$ es un plano afín (no tiene coordenadas naturales), a esta la llamamos *carta afín*. Lo que nos dice que cualquier recta de \mathbb{P}^2 funciona como recta al infinito en la carta afín que abarca a su complemento.

Como ejemplo, veamos al plano que contiene a los tres vectores canónicos. Sea $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, y sea $\Pi : \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 1$. Es decir, Π está dado por la ecuación $x + y + z = 1$. De tal manera que $\mathbf{e}_i \in \Pi$ para $i = 1, 2, 3$. Además forman un triángulo equilátero con $(1/3)\mathbf{u}$ en el baricentro. Este plano contiene a un representante de cada $[x : y : z] \in \mathbb{P}^2$ que cumpla $x + y + z \neq 0$; a saber, $(x/(x + y + z), y/(x + y + z), z/(x + y + z))$. Esta carta afín es simétrica respecto a las tres coordenadas, las rectas al infinito de las tres primeras cartas que vimos son ahora las rectas del triángulo básico. Nos será útil más adelante, entonces nos referiremos a ella como *la carta afín canónica*.

EJERCICIO 6.17 Describe la intersección de dos cartas afines.

6.7.3 La esfera módulo antípodas

Otra manera de “ver” al plano proyectivo es usando a la esfera unitaria \mathbb{S}^2 . Puesto que cada recta por el origen en \mathbb{R}^3 intersecta a la esfera en dos puntos antípodas, a saber,

$$[\mathbf{x}] \cap \mathbb{S}^2 = \{|\mathbf{x}|^{-1} \mathbf{x}, -|\mathbf{x}|^{-1} \mathbf{x}\},$$

entonces la función

$$\begin{aligned}\mathbb{S}^2 &\rightarrow \mathbb{P}^2 \\ \mathbf{x} &\mapsto [\mathbf{x}]\end{aligned}$$

es sobre y 2 a 1. Es decir, la preimagen de cada punto consiste precisamente de dos puntos; y en nuestro caso esos dos puntos son antípodas (pues $[\mathbf{x}] = [-\mathbf{x}]$). Dicho de otra manera, la esfera unitaria \mathbb{S}^2 contiene a representantes de todos los puntos de \mathbb{P}^2 ; más aún, contiene exactamente a dos representantes de cada uno y estos dos son antípodas. Si consideramos “ser antípodas” como una relación de equivalencia en \mathbb{S}^2 , entonces \mathbb{P}^2 es el conjunto de clases de equivalencia. Esto se escribe como

$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{S}^2 / \{\mathbf{x} \sim -\mathbf{x}\}$$

y se lee “ \mathbb{P}^2 es igual a \mathbb{S}^2 módulo antípodas”. Más aún, como las clases de equivalencia consisten de parejas de puntos muy alejados (de hecho tan alejados como es posible)

entonces en porciones pequeñas de la esfera (que no contengan una pareja de antipodas) la correspondencia es 1 a 1. Se dice entonces que la esfera es un *cubrimiento doble* del plano proyectivo.

Si con las cartas afines hicimos el símil de una fotografía fiel pero local (de un pedazo) de \mathbb{P}^2 , ahora tendríamos que decir que este modelo es una foto global, pero sobreexpuesta (aunque con control: cada punto aparece dos veces en la foto y justo en extremos opuestos de ella).

Este será el modelo adecuado para hablar de cuestiones métricas en el plano proyectivo. Observemos que las rectas de \mathbb{P}^2 , al corresponder a planos por el origen de \mathbb{R}^3 , se “levantan” a círculos máximos en \mathbb{S}^2 . Al recorrer un círculo máximo en \mathbb{S}^2 para regresar al punto de partida, se recorre “abajo”, en \mathbb{P}^2 , una recta pero se le dan dos vueltas (al llegar al punto antípoda en \mathbb{S}^2 ya llegamos al punto de partida en \mathbb{P}^2 y arrancamos una nueva vuelta). Cada círculo máximo se mapea 2 a 1 a su recta correspondiente en el proyectivo. Tenemos entonces que las maneras más económicas (o rápidas) de viajar en \mathbb{S}^2 , que son los círculos máximos, corresponden a las rectas de \mathbb{P}^2 . Lo cual indica que debe haber nociones de distancia y ángulo en el plano proyectivo si los copiamos de su cubierta doble. Esto se hará con detalle más adelante, por lo pronto queremos dejar la idea de que hay un proyectivo rígido, con nociones métricas y que localmente parece un cascarón esférico.

6.7.4 Modelos Topológicos

Del modelo de la esfera podemos obtener uno nuevo como sigue. Consideremos el hemisferio superior de la esfera

$$\mathbb{S}_+^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \mid z \geq 0\}.$$

De nuevo, \mathbb{S}_+^2 tiene representantes de todos los puntos de \mathbb{P}^2 , i.e., la función $\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]$ restringida a \mathbb{S}_+^2 es sobre. Pero ahora es 2 a 1 solamente en la *frontera*, es decir, en el ecuador (cuando $z = 0$), que corresponden a la recta al infinito de nuestra primera carta coordenada $z = 1$. Pues cada punto que no está en la frontera tiene su tercera coordenada $z > 0$ y entonces su antípoda la tiene $z < 0$, y por tanto ya no está en \mathbb{S}_+^2 . Si proyectamos ortogonalmente al hemisferio superior sobre el plano $z = 0$, obtenemos una biyección con el disco unitario en \mathbb{R}^2 ,

$$\mathbb{D}^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

cuya frontera es \mathbb{S}^1 . En topología, se usa al simbolo de “parcial”, ∂ , para denotar a la frontera, y se lee “frontera”, así que podemos escribir lo anterior:

$$\partial\mathbb{D}^2 = \mathbb{S}^1.$$

Y podemos concluir que el plano proyectivo se obtiene del disco \mathbb{D}^2 identificando a cada punto de la frontera con su antípoda, que se escribe

$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{D}^2 / \{\mathbf{x} \sim -\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{S}^1\}.$$

A este lo llamaremos el *modelo del disco*.

EJERCICIO 6.18 En un pedazo de tela redondo ($\sim \mathbb{D}^2$), un mantelito digamos, surzase la orilla ($\partial\mathbb{D}^2$) de tal manera que cada punto quede pegado a su antipoda. ¿Se puede concluir este trabajo?

EJERCICIO 6.19 En un pedazo de tela cuadrado, surzase la orilla (la frontera) de tal manera que cada lado quede pegado a el opuesto como en la figura. ¿Se puede concluir este trabajo? Si la tela fuera más flexible, un hule teórico, lo que queda es la superficie (la frontera) de una dona, que en matemáticas se conoce como *Toro*.

Modelo Nintendo

Muchos juegos de computadora o Nintendo en los que el objeto que controla el jugador, una navecita digamos, se mueve libremente en dos dimensiones, tienen la particularidad de que cuando la nave llega a un extremo de la pantalla aparece justo por el lado contrario. En estos juegos, el “espacio” (virtual por necesidad) donde vive la nave es un Toro. Podemos entonces diseñar un juego equivalente donde el espacio sea el plano proyectivo, tomando como “cancha” un disco y haciendo que cada vez que la navecita choque con la frontera aparezca continuamente por la parte opuesta.

La navecita tiene la particularidad de ser simétrica con respecto a un eje, así que la cambiaremos por un ser bidimensional que no sea simétrico; que tenga una mano pero la otra no, un “manquito”. Si sale del centro del disco, cruza la frontera (él ni cuenta se da de que lo está haciendo) y regresa al centro, ahora seá manco de la mano contraria. No se puede decir, por tanto, si es manco de la mano derecha o de la mano izquierda. A este fenómeno se le conoce como que el plano proyectivo *no es orientable*; localmente sí se puede hablar de derecha e izquierda, pero globalmente pierden su sentido. Al dar una vuelta “escencial” por su universo, el manquito ve todo como en espejo; pero no es tan grave, una vuelta más y todo regresa a la normalidad.

EJERCICIO 6.20 Describe el análogo del modelo del disco para \mathbb{P}^3 .

EJERCICIO 6.21 ¿Es orientable \mathbb{P}^3 ?

EJERCICIO 6.22 Supon que nuestro universo es no orientable. ¿Cuál sería el efecto sobre ti de un viaje intergaláctico que regrese a la tierra pero con la orientación opuesta? ¿Sabrías leer?

La banda de Moebius más un disco

6.8 Transformaciones proyectivas

Hemos insistido en este libro que un enfoque moderno a la geometría debe incluir por fuerza un estudio de las transformaciones relevantes. Nos toca entonces estudiar las transformaciones del plano en si mismo que preservan la estructura que hemos definido, sus subconjuntos especiales llamados rectas.

6.8.1 Con regla

Recordemos la sección donde se construyó el metodo del pintor para que, con el simple uso de una regla (y lápiz y goma, por supuesto), se dibujara un piso cuadrículado en perspectiva. Ahora podemos decir mucho más cosas sobre ese metodo.

Si pensamos en el piso como \mathbb{R}^2 junto con una linea al infinito, es decir, como parte de \mathbb{P}^2 ; y al lienzo también como \mathbb{P}^2 . Entonces estabamos rastreando, o construyendo, una función de \mathbb{P}^2 en si mismo que manda rectas en rectas. La construcción se hace totalmente general cuando sabemos que cada par de rectas se intersectan, pues de las dos horizontales definimos su intersección, ∞_h ; de las dos verticales el correspondiente ∞_v ; a partir de estos dos puntos (que son diferentes pues las intersecciones de unas y otras son los vértices de la lozeta) encontramos la imágen de la linea al infinito (que en aquel entonces llamamos horizonte), etc. Solamente se están usando los lemas de incidencia y que la función manda rectas en rectas.

Se puede inclusive definir a dónde se mandan cuadrículas más finas al considerar la otra diagonal de la lozeta, tomar la intersección de ambas diagonales que debe ser la imagen del centro de la lozeta original; a partir de este punto trazamos nuevas horizontales y verticales y el mismo proceso nos definira a donde van las lozetas. Para efectos de un pintor, se puede entonces aproximar tanto como quiera (usando cuadrículas más y más finas) a una perspectiva perfecta de lo que haya dibujado en el piso. Y con variaciones o aplicaciones del metodo a otros planos (fachadas, etc.), bastara para buenas reproducciones del mundo tridimensional sobre un lienzo. Pero para nosotros no basta.

Da la impresión de que este metodo da como resultado que para cualquier cuadrángulo (la lozeta originalmente pintada y bastante arbitraria por cierto), habrá una transformación de \mathbb{P}^2 en \mathbb{P}^2 que manda rectas en rectas, y al cuadrado unitario en el dado. Este Teorema es cierto, pero en su demostración por métodos sintéticos se involucran resultados fuertes, entre otros los Teoremas de Desargues y de Pappus (que tienen que ver con el problema de colinearidad que se planteo entonces), y también surge un problema profundo de completez. Pues para nada es claro que a cualquier punto lo podamos definir con una simple regla y un compas; tendríamos que invocar continuidad, que nos rebaza.

Pero las cosas no están tan mal como las estamos pintando. Hemos construido un

poderoso método analítico a nuestro alcance con el que resolveremos las interrogantes planteadas.

EJERCICIO 6.23 Considera un cuadrado en \mathbb{P}^2 con vértices **a, b, c, d**:

A cada una de las configuraciones siguientes, corresponde una transformación proyectiva $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$. Con una regla (para dibujar) encuentra y traza la recta $f(\ell_\infty)$.

Ejemplo

EJERCICIO 6.24 Considera al cuadrado como parte de un mosaico más grande:

En páginas aparte dibuja que le pasa a sus 8 vecinos en cada una de las transformaciones anteriores. Sólo necesitas escuadras para hacerlo.

6.8.2 Analíticas

Una transformación de \mathbb{P}^2 en \mathbb{P}^2 , pensando a sus puntos como rectas por el origen en \mathbb{R}^3 , nos dice como mandar a estas rectas en ellas mismas, define una correspondencia entre ellas; si además le pedimos que mande rectas proyectivas en rectas proyectivas, la correspondencia entre rectas deberá mandar planos por el origen en planos por el origen. Y de este tipo de transformaciones en \mathbb{R}^3 ya hemos hablado. Tenemos a las transformaciones lineales de \mathbb{R}^3 que cumplen justo estas propiedades, mandan al origen en sí mismo, a las rectas por él en rectas por él y a los planos por el origen en planos por el origen. ¡Ni mandadas a hacer!

Sea A una matriz invertible de 3×3 , que define a una transformación lineal de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 dada por la regla de correspondencia $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Podemos entonces definir su *transformación proyectiva asociada* como

$$\begin{aligned} f_A : \mathbb{P}^2 &\rightarrow \mathbb{P}^2 \\ f_A([\mathbf{x}]) &= [A\mathbf{x}]. \end{aligned}$$

Para ver que está bien definida, hay que ver que la imagen está en donde debe y que no depende del representante. Puesto que $[\mathbf{x}] \in \mathbb{P}^2$ implica que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, y esto a su vez que $A\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ pues escogimos a A invertible, entonces $[A\mathbf{x}] \in \mathbb{P}^2$. Además, dada $t \neq 0$, se tiene que

$$f_A([t\mathbf{x}]) = [A(t\mathbf{x})] = [t(A\mathbf{x})] = [A\mathbf{x}] = f_A([\mathbf{x}]).$$

Por tanto f_A está bien definida y manda rectas en rectas pues estas corresponden a los planos por el origen en \mathbb{R}^3 y A manda planos por el origen en planos por el origen.

Es fácil ver que estas transformaciones forman un grupo pues las matrices invertibles (o las transformaciones lineales) lo hacen (véase, y hágase el Ejercicio 6.8.2). Definimos entonces el *grupo de transformaciones proyectivas de \mathbb{P}^2* , como

$$\text{Pr}(\mathbf{2}) := \{f_A : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2 \mid A \in \mathbf{Gl}(3)\}.$$

Por la definición, parecería que $\text{Pr}(\mathbf{2})$ está en correspondencia con $\mathbf{Gl}(3)$, pero no es así. Muchas matrices definen la misma función. Por ejemplo, si tomamos $t \neq 0$ entonces $tA \in \mathbf{Gl}(3)$ y se tiene que

$$[(tA)\mathbf{x}] = [t(A\mathbf{x})] = [A\mathbf{x}]$$

para todo $[\mathbf{x}] \in \mathbb{P}^2$. Así que $f_A = f_{tA}$, y se valdría de nuevo hablar de $f_{[A]} := f_A$ como nos sucedió con las rectas. Lo que sí hay es una función de $\mathbf{Gl}(3)$ sobre $\text{Pr}(\mathbf{2})$, que por preservar el producto se llama *homomorfismo*. Y lo que sería bonito demostrar es que dos funciones proyectivas son iguales sólo si sus matrices son *proyectivamente equivalentes*, es decir de la forma A y tA para $t \neq 0$. Pero esto se verá en la siguiente sección.

EJERCICIO 6.25 Demuestra que $\text{Pr}(2)$ es un grupo de transformaciones.

EJERCICIO 6.26 ¿Cómo definirías $\text{Pr}(3)$?

6.8.3 El Teorema de 4 en 4

Decimos que un conjunto de puntos en el plano proyectivo está en *posición general*, si ninguna terna de ellos es colineal.

Teorema 6.8.1 Sean p_0, p_1, p_2, p_3 y q_0, q_1, q_2, q_3 dos cuartetos de puntos en \mathbb{P}^2 en posición general. Entonces existe una única transformación proyectiva $f \in \text{Pr}(2)$ que manda una en la otra, es decir, tal que $f(p_i) = q_i$ para $i = 0, 1, 2, 3$.

Demostración. Como ya hemos visto en la demostración de los teoremas análogos bastara demostrar que una cuarteta determinada puede ir a cualquier otra (ver y hacer el Ejercicio 6.8.3). Como cuarteta determinada, claramente nos conviene escojer a la cuarteta canónica $[\mathbf{e}_0], [\mathbf{e}_1], [\mathbf{e}_2], [\mathbf{e}_3]$ donde $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ son la base canónica de \mathbb{R}^3 , y $\mathbf{e}_0 = (1, 1, 1) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

Sea q_0, q_1, q_2, q_3 una cuarteta de puntos cualquiera en \mathbb{P}^2 en posición general. Tenemos entonces que $q_i = [\mathbf{u}_i]$ para algún vector $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^3$. Es muy fácil lograr que la base canónica vaya a donde debe. Sea

$$A' = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$$

la matriz 3×3 que cumple $A' \mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1$, $A' \mathbf{e}_2 = \mathbf{u}_2$ y $A' \mathbf{e}_3 = \mathbf{u}_3$. Que $[\mathbf{u}_1], [\mathbf{u}_2]$ y $[\mathbf{u}_3]$ no sean colineales en \mathbb{P}^2 implica que los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ y \mathbf{u}_3 no son coplanares en \mathbb{R}^3 y por lo tanto que la matriz A' es invertible. Entonces su función proyectiva asociada f' está bien definida y cumple que $f'([\mathbf{e}_1]) = [\mathbf{u}_1]$, $f'([\mathbf{e}_2]) = [\mathbf{u}_2]$ y $f'([\mathbf{e}_3]) = [\mathbf{u}_3]$, pero su valor en $[\mathbf{e}_0]$ no tiene porqué ser $[\mathbf{u}_0]$; por eso hemos usado las primas, todavía no es la buena.

Observemos que todavía podemos modificar a A' de tal manera que los puntos de la base canónica vayan a dónde deben. A saber, si multiplicamos una columna por una constante no cero. Por ejemplo la matriz

$$A'' = (t \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$$

cumple que $[A'' \mathbf{e}_1] = [t \mathbf{u}_1] = [\mathbf{u}_1]$ (aunque ya no sea cierto que mande al vector \mathbf{e}_1 en el vector \mathbf{u}_1). De tal manera que todavía tenemos tres grados de libertad para modificar a A' multiplicando por constantes no cero a sus tres columnas.

Como $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ y \mathbf{u}_3 forman una base de \mathbb{R}^3 , existen constantes λ_1, λ_2 y λ_3 tales que

$$\mathbf{u}_0 = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3.$$

Sea A (ahora sí la buena) la matriz

$$A = (\lambda_1 \mathbf{u}_1, \lambda_2 \mathbf{u}_2, \lambda_3 \mathbf{u}_3) .$$

Puesto que $[\mathbf{u}_0]$ no es colineal con $[\mathbf{u}_2]$ y $[\mathbf{u}_3]$ entonces \mathbf{u}_0 no es coplanar con \mathbf{u}_2 y \mathbf{u}_3 , y por lo tanto $\lambda_1 \neq 0$. Análogamente, $\lambda_2 \neq 0$ y $\lambda_3 \neq 0$, y por tanto $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \det(A') \neq 0$. Lo cual nos dice que $A \in \mathbf{GL}(3)$ y tiene una transformación proyectiva asociada $f = f_A$ que cumple

$$\begin{aligned} f([\mathbf{e}_0]) &= [A\mathbf{e}_0] = [\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3] = [\mathbf{u}_0] \\ f([\mathbf{e}_1]) &= [A\mathbf{e}_1] = [\lambda_1 \mathbf{u}_1] = [\mathbf{u}_1] \\ f([\mathbf{e}_2]) &= [A\mathbf{e}_2] = [\lambda_2 \mathbf{u}_2] = [\mathbf{u}_2] \\ f([\mathbf{e}_3]) &= [A\mathbf{e}_3] = [\lambda_3 \mathbf{u}_3] = [\mathbf{u}_3] \end{aligned}$$

y por tanto demuestra la existencia.

Para demostrar la unicidad, de nuevo (por las propiedades de grupo) basta demostrar un caso particular (ver y hacer el Ejercicio 6.8.3). Supongamos que $f \in \text{Pr}(\mathbf{2})$ es tal que $f([\mathbf{e}_i]) = [\mathbf{e}_i]$ para $i = 0, 1, 2, 3$. Sabemos que f esta dada por una matriz

$$A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) .$$

Puesto que $[\mathbf{e}_1] = f([\mathbf{e}_1]) = [A\mathbf{e}_1] = [\mathbf{v}_1]$ entonces existe $t_1 \neq 0$ tal que $\mathbf{v}_1 = t_1 \mathbf{e}_1$; y análogamente existen $t_2 \neq 0$ y $t_3 \neq 0$ tales que $\mathbf{v}_2 = t_2 \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{v}_3 = t_3 \mathbf{e}_3$. Pero se tiene además que

$$[1 : 1 : 1] = [\mathbf{e}_0] = f([\mathbf{e}_0]) = [A\mathbf{e}_0] = [t_1 : t_2 : t_3]$$

lo cual implica que $t_1 = t_2 = t_3 = t$. Por tanto

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} = tI$$

y esto, como ya hemos visto, implica que $f = f_I = \text{id}_{\mathbb{P}^2}$. □

De este teorema y su demostración obtendremos, por lo pronto, dos implicaciones. La primera es que el método del pintor que hemos descrito es coherente. Pues si las cuatro esquinas de la lozeta inicial están en posición general, entonces existe una transformación proyectiva, dada analíticamente, que manda a todo \mathbb{P}^2 en sí mismo y que manda rectas en rectas (preservando por tanto colinearidad y concurrencia), de tal manera que el método constructivo que describimos es obligado.

La otra implicación es concluir la descripción del grupo $\text{Pr}(\mathbf{2})$ en términos de matrices. Si declaramos que dos matrices A y B son equivalentes si existe $t \neq 0$ tal que

$B = tA$ y denotamos por $[A]$ a la clase de equivalencia de A . Entonces las transformaciones proyectivas están en correspondencia natural y biyectiva con el conjunto de clases de equivalencia de matrices invertibles, es decir, con $\{[A] \mid A \in \mathbf{GL}(3)\}$; que a veces se llama $\mathbf{GL}(3)$ proyectivizado.

EJERCICIO 6.27 Demuestra que si existe $f \in \text{Pr}(\mathbf{2})$ tal que $f(a_i) = q_i$ para $i = 0, 1, 2, 3$ para cualquier cuarteta q_0, q_1, q_2, q_3 de puntos en \mathbb{P}^2 en posición general, donde a_0, a_1, a_2, a_3 es una cuarteta de puntos en \mathbb{P}^2 en posición general y fija, entonces se sigue la parte de existencia del Teorema 6.8.1.

EJERCICIO 6.28 Demuestra que si es cierto que dada $f \in \text{Pr}(\mathbf{2})$ tal que $f([\mathbf{e}_i]) = [\mathbf{e}_i]$ para $i = 0, 1, 2, 3$ implica que $f = \text{id}_{\mathbb{P}^2}$, entonces se sigue la parte de unicidad del Teorema 6.8.1.

EJERCICIO 6.29 Sean $\mathbf{p}_1 = [1 : 0 : 0]$, $\mathbf{p}_2 = [0 : 1 : 0]$, $\mathbf{p}_3 = [0 : 0 : 1]$ y $\mathbf{p}_0 = [1 : 1 : 1]$. Encuentra explícitamente las transformaciones proyectivas que mandan a estos cuatro puntos respectivamente en:

- a) $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$, $[0 : 0 : 1]$, $[1 : 1 : -1]$.
- b) $[0 : 1 : 1]$, $[1 : 0 : 1]$, $[1 : 1 : 0]$, $[1 : 1 : 1]$.
- c) $[1 : 2 : 2]$, $[-1 : 1 : 2]$, $[0 : 2 : 1]$, $[-2 : -1 : 3]$.

EJERCICIO 6.30 En la carta afín canónica ($x + y + z = 1$) dibuja la imagen de la línea al infinito bajo las transformaciones proyectivas del ejercicio anterior.

EJERCICIO 6.31 En la carta coordenada canónica ($z = 1$) dibuja la imagen de la línea al infinito bajo las transformaciones proyectivas del ejercicio ante-anterior.

6.8.4 Transformaciones afines

Puesto que \mathbb{R}^2 se puede ver de manera canónica dentro de \mathbb{P}^2 como la carta euclidiana distinguida ($(x, y) \mapsto [x : y : 1]$), es natural preguntarse si los grupos de transformaciones de \mathbb{R}^2 que ya conocemos se pueden ver dentro del grupo de transformaciones proyectivas. La respuesta es muy bonita, sea ℓ_∞ la recta al infinito dada por la ecuación $z = 0$ en \mathbb{P}^2 , y sea G el conjunto de transformaciones proyectivas que dejan a la recta al infinito en su lugar (la pueden mover punto a punto pero no como conjunto). Esto es,

$$G = \{f \in \text{Pr}(\mathbf{2}) \mid f(\ell_\infty) = \ell_\infty\}.$$

Entonces G es un subgrupo que se identifica naturalmente con el grupo de transformaciones afines $\mathbf{Af}(\mathbf{2})$. Es decir, las transformaciones proyectivas que dejan al infinito en el infinito son precisamente las afines (como en el caso de dimensión 1). Demostremoslo. Sea $A \in \mathbf{GL}(3)$ una matriz que representa a $f \in G$ (A esta bien definida salvo constantes no cero). Puesto que $[\mathbf{e}_1] = [1 : 0 : 0] \in \ell_\infty$ entonces $f([\mathbf{e}_1]) = [A\mathbf{e}_1] \in \ell_\infty$; lo cual implica que la tercera coordenada de $A\mathbf{e}_1$, que es la primera columna de A , es

cero. Análogamente, usando a \mathbf{e}_2 , se obtiene que la segunda columna de A tiene tercera coordenada cero. Si la tercera coordenada de la tercera columna también fuera cero, A no sería invertible; lo cual implica (multiplicando por la constante adecuada) que podemos suponer que es precisamente 1. Entonces A tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz deja fijo al plano canónico $z = 1$, pues

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + e \\ cx + dy + f \\ 1 \end{pmatrix}$$

que claramente corresponde (pensando a \mathbb{R}^2 como el plano canónico) a la función de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

Sea A' la matriz 2×2 anterior (el bloque superior izquierdo de A), entonces $\det(A') = \det(A) \neq 0$ y por tanto la función anterior es una transformación afín.

Inversamente, para cualquier transformación afín de \mathbb{R}^2 se puede construir una matriz de 3×3 como arriba (que resulta ser invertible) y la transformación proyectiva correspondiente dejara fija a la recta al infinito (pues manda a $[\mathbf{e}_1]$ y a $[\mathbf{e}_2]$ en puntos de esa recta). Como la recta $z = 0$ es igual a cualquier otra, hemos demostrado el siguiente Teorema.

Teorema 6.8.2 *Dada cualquier recta ℓ de \mathbb{P}^2 , hay un isomorfismo de grupos*

$$\mathbf{Af}(2) \simeq \{f \in \text{Pr}(2) \mid f(\ell) = \ell\},$$

es decir, las transformaciones proyectivas que fijan una recta se puede identificar con las transformaciones afines.

EJERCICIO 6.32 Sea G un grupo de transformaciones de un conjunto X . Demuestra que para cualquier subconjunto $Y \subset X$, el conjunto de transformaciones que fijan a Y

$$G_Y = \{f \in G \mid f(Y) = Y\}$$

es un subgrupo de G .

EJERCICIO 6.33 En la demostración que dimos ¿a qué matrices de 3×3 corresponden las transformaciones lineales de \mathbb{R}^2 ?

EJERCICIO 6.34 Considera la carta coordenada canónica \mathbb{A}_z definida por $z = 1$ con coordenadas naturales (x, y) . Cuáles transformaciones proyectivas del Ejercicio ?? se ven como transformaciones afines en esta carta. Describelas geoméricamente.

6.8.5 Teoremas de Desargues y de Pappus

En esta sección demostraremos dos Teoremas clásicos que fueron precursores de la geometría proyectiva. Después de su demostración original ha habido muchas otras. Las que daremos aquí son usando lo que ya sabemos de transformaciones proyectivas para ilustrar su uso y su poder.

El Teorema de Desargues se refiere a parejas de triángulos en perspectiva. Se dice que dos triángulos *están en perspectiva* si hay una correspondencia entre sus vértices de tal manera que las tres líneas que unen vértices correspondientes son concurrentes. Al punto de concurrencia se le llama el *foco*, y desde él veríamos un solo triángulo (de ahí el nombre de “perspectiva”).

Teorema 6.8.3 (Desargues) *Si dos triángulos están en perspectiva entonces los puntos de intersección de sus lados correspondientes son colineales.*

Aunque no hayamos especificado que los dos triángulos viven en el plano proyectivo, el Teorema en sí lo exige, pues habla de los puntos de intersección como un hecho. El enunciado en el caso euclidiano (recordemos que Desargues no sabía aún del plano proyectivo) debería tener varios apartados por si alguna, o algunas, parejas de lados correspondientes fueran paralelas. También podría enunciarse para triángulos en perspectiva desde el infinito. De tal manera que, por la posibilidad euclidiana del paralelismo, se convierte en una colección de enunciados similares con pruebas similares. Desde Desargues fué un Teorema en busca de un contexto amplio y general, y con el nacimiento de la geometría proyectiva lo encontró.

Otro aspecto interesante del Teorema de Desargues es que si se le piensa en dimensión 3 y no 2 (nótese que en el enunciado nunca especificamos), su demostración es bastante fácil pensando, de nuevo, en términos proyectivos (sin excepciones). En el caso en que los triángulos no están en un plano, la hipótesis de que están en perspectiva es que sus lados correspondientes son segmentos en las caras de un cono triangular y entonces las líneas correspondientes se intersectan por estar en un plano (el determinado por un lado del cono). Considérense los dos planos generados por los triángulos y sea ℓ su línea de intersección: estos planos intersectan a cada lado del cono en los lados correspondientes de los triángulos y ℓ los intersecta en el punto de intersección. Así que ℓ es la línea deseada.

Faltaría el caso en el que todos los planos que se usaron son uno sólo, y podría argumentarse por continuidad o “levantando” a la tercera dimensión y luego volviendo a proyectar. Pero mejor seguiremos un camino intrínseco que ilustra el juego de la dualidad.

Recordemos el principio de dualidad que nos permite traducir cualquier enunciado o demostración cambiando recta por punto y “estar en” por “pasar por” (o bien usar únicamente el concepto incidencia). El Teorema de Desargues es justo un enunciado sobre rectas y puntos y su relación de incidencia. Más aún, el dual de su hipótesis es precisamente su conclusión. El dual de la definición de estar en perspectiva es: se

dicen que dos triángulos están en *perspectiva dual* si hay una correspondencia entre sus lados de tal manera que los tres puntos de intersección de los lados correspondientes son colineales. De tal manera que lo que Desargues dice es que si dos triángulos están en perspectiva entonces están en perspectiva dual. Lo que demostraremos es su dual.

Teorema 6.8.4 (Desargues Dual) *Si dos triángulos en \mathbb{P}^2 están en perspectiva dual entonces están en perspectiva.*

Demostración. Sea ℓ la recta focal de la perspectiva dual. Como todas las rectas en el proyectivo son iguales, podemos suponer que ℓ está en el infinito. Entonces tenemos dos triángulos en el plano euclidiano cuyos lados son paralelos. Hay que demostrar que están en perspectiva, lo cual es un ejercicio que se puede hacer por geometría analítica o por semejanza de triángulos (Ejercicio 6.8.5). \square

EJERCICIO 6.35 Sean T_1 y T_2 triángulos en \mathbb{R}^2 con vértices a_1, b_1, c_1 y a_2, b_2, c_2 respectivamente, y tales que $\langle a_1, b_1 \rangle \parallel \langle a_2, b_2 \rangle$, $\langle b_1, c_1 \rangle \parallel \langle b_2, c_2 \rangle$ y $\langle c_1, a_1 \rangle \parallel \langle c_2, a_2 \rangle$. Demuestra que entonces están en perspectiva, es decir, que las líneas $\langle a_1, a_2 \rangle$, $\langle b_1, b_2 \rangle$ y $\langle c_1, c_2 \rangle$ son concurrentes.

Papus

El Teorema de Papus es análogo en cuanto a su historia con el de Desargues. De hecho hay demostraciones sintéticas (con el puro uso de axiomas y no del modelo analítico) de ambos. Su enunciado es un poco más complicado y se refiere a los puntos que uno puede construir a partir de dos ternas colineales.

Sean a_1, b_1, c_1 y a_2, b_2, c_2 dos ternas colineales que yacen en rectas distintas. La correspondencia (por letras) que hemos adoptado es arbitraria, pero a partir de ella podemos construir otra terna que llamaremos la *terna de Papus* como sigue. Sean

$$\begin{aligned}\alpha &= \langle b_1, c_2 \rangle \cap \langle b_2, c_1 \rangle, \\ \beta &= \langle c_1, a_2 \rangle \cap \langle c_2, b_1 \rangle, \\ \gamma &= \langle a_1, b_2 \rangle \cap \langle a_2, b_1 \rangle.\end{aligned}$$

Nótese que la condición de que sean ternas (tres) y de que esten en rectas distintas nos da que estos tres puntos están bien definidos.

Teorema 6.8.5 (Papus) *La terna de Papus de dos ternas colineales que yacen en rectas distintas es colineal.*

Demostración. Consideremos la configuración dual; es decir, sean a_i^*, b_i^*, c_i^* las rectas polares de a_i, b_i, c_i respectivamente, para $i = 1, 2$. Tenemos entonces que cada terna de rectas es concurrente.

Podemos mandar mediante una transformación proyectiva a la cuarteta de puntos $a_1^* \cap c_2^*$, $a_1^* \cap a_2^*$, $c_1^* \cap c_2^*$, y $c_1^* \cap a_2^*$ respectivamente en los puntos $[0 : 0 : 1]$, $[1 : 0 : 1]$, $[0 : 1 : 1]$ y $[1 : 1 : 1]$ de nuestra carta euclidiana preferente e identificarlos con $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$ de \mathbb{R}^2 . De tal manera que las rectas a_1^* y c_1^* son ahora las horizontales $y = 0$ y $y = 1$; y las rectas a_2^* y c_2^* son las verticales $x = 1$ y $x = 0$ respectivamente, que determinan la “lozeta” canónica. La recta b_1^* se convierte en una horizontal (determinada por su abscisa) pues es concurrente con a_1^* y c_1^* ; y la recta b_2^* es ahora una vertical determinada por su primera coordenada. De tal manera que ahora los datos originales corresponden a tomar un punto (s, t) con $s, t \neq 0, 1$, y tenemos que $b_1^* : y = t$; $b_2^* : x = s$. Lo que debemos probar es que tres rectas concurren, y estas son

$$\begin{aligned}\alpha^* &= \langle b_1^* \cap c_2^*, b_2^* \cap c_1^* \rangle = \langle (0, t), (s, 1) \rangle, \\ \beta^* &= \langle c_1^* \cap a_2^*, c_2^* \cap a_1^* \rangle = \langle (1, 1), (0, 0) \rangle, \\ \gamma^* &= \langle a_1^* \cap b_2^*, a_2^* \cap b_1^* \rangle = \langle (s, 0), (1, t) \rangle.\end{aligned}$$

De esta información, con los metodos del Capitulo 1, se obtienen facilmente ecuaciones normales para α^* y γ^* , que son

$$\begin{aligned}\alpha^* &: (t - 1)x + sy = ts \\ \gamma^* &: -tx + (1 - s)y = -ts\end{aligned}$$

Al sumar estas dos ecuaciones se obtiene $x = y$ que es la ecuación de β^* . Por lo tanto las tres rectas se intersectan y esto implica que la terna de Pappus es colineal. \square

6.9 Proyecciones de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^2

6.9.1 Realidad virtual

6.9.2 Animación por computadora