Capítulo 7

Cónicas III (clasificación proyectiva)

7.1 Curvas Algebráicas en $\mathbb{P}^2$

En este capitulo retomamos la motivación original que nos dieron las cónicas en $\mathbb{R}^2$ para meternos a estudiar el "infinito" del plano y definir $\mathbb{P}^2$. Ahora ya tenemos la herramienta para estudiar y formalizar el comportamiento de las cónicas en el infinito. Uno de los resultados que obtendremos es el clásico de los griegos: las cónicas son intersecciones de planos con un cono (de ahí su nombre), y la teoría se redondeara lo suficiente como para vislumbrar con claridad que debe pasar en más dimensiones.

7.1.1 Polinomios y su homogeneización

Estamos principalmente interesados en la completación proyectiva de curvas cuadráticas, es decir, en entender el comportamiento de las cónicas al infinito, pero hay ciertas partes de la teoria que se pueden generalizar facilmente, y vale la pena hacerlo para no repetir verbatim lo que vimos en el Capítulo 4. Ahí definimos una curva cuadrática como los ceros de un polinomio cuadrático en dos variables x y y. Es claro que esto se puede generalizar a cualquier polinomio y eso haremos.

Un polinomio en una variable x es una expresión

$$P(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i.$$

Y su grado es la máxima i para la cual $a_i \neq 0$. La notación general para un polinomio en dos variables necesita dos subindices que corren independientemente desde 0 hasta un limite superior k:

$$P(x, y) = \sum_{i,j=0}^{k} a_{i,j}\, x^i y^j. \tag{7.1}$$

Asi que, por ejemplo, cuando $k = 2$, tenemos nueve términos

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \sum_{i,j=0}^{2} a_{i,j}\, x^i y^j \\ &= a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 + a_{2,1}x^2y + a_{1,2}xy^2 + a_{2,2}x^2y^2 \end{aligned}$$

y puede ser un polinomio de grado 4, pero todavia no incluye a todos los polinomios de grado 3 aunque si a los de grado 2 haciendo $a_{i,j} = 0$ cuando $i+j > 2$. Este ejemplo debe dejar claro que es mucho más comodo trabajar con sumatorias.

Un monomio es uno de los sumandos $a_{i,j}\, x^i y^j$ de un polinomio y su grado es $i + j$. El grado de un polinomio en dos variables es el máximo grado de sus monomios (que no necesariamente coincide con el limite superior k de la sumatoria, que se puso ahí sólo para enfatizar que hay un número finito de sumandos). Los polinomios en dos variables (como los de una) tienen una estructura algebráica muy rica. Se pueden sumar (y con la suma forman un grupo) y se pueden multiplicar (aunque no forman grupo multiplicativo pues no tienen inversos). En este sentido, son como los números enteros $\mathbb{Z}$, su unidad multiplicativa es el polinomio constante 1; y por esto se le conoce como el *anillo* de los polinomios.

Vale la pena declarar de una vez por todas que cuando digamos "polinomio" sin especificar el apellido "constante" nos referimos a un polinomio de "a de veras", de grado al menos 1. Los de grado 0 (las constantes no cero) y el de grado -1 (la constante 0 que hay que ponerle este grado para que las cosas funcionen) no se entrometeran tanto en el texto con esta convención.

Como en el caso de los polinomios en una variable, los polinomios en dos variables se pueden conciderar también como funciones con valores reales (al evaluar sustituyendo valores fijos de las variables), pero en este caso su dominio es $\mathbb{R}^2$. Una *curva algebráica* en $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de ceros de un polinomio, es decir

$$C(P) := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x,y) = 0 \right\}.$$

El *grado* de una curva algebráica es el grado de su polinomio asociado. Hemos ya clasificado las curvas algebráicas de grados 1 y 2 (rectas y cónicas). El problema natural de entender y clasificar todas las curvas algebráicas ha dado lugar a lo que ahora se conoce como **Geometría Algebráica** que claramente requiere de un estudio más profundo del algebra subyacente. Por el momento, veamos una relación muy sencilla entre el algebra y la geometría.

Supongamos que un polinomio P es el producto de dos polinomios P_1 y P_2. Es decir, que P se obtiene al multiplicar, con las reglas de los número reales, las expresiones de P_1 y de P_2 (todos los monomios de uno contra los del otro y luego agrupando). Esto se escribe

$$P(x,y) = P_1(x,y)\, P_2(x,y).$$

Entonces es cierto que para cualquier valor de las variables x, y esta igualdad se cumple. En particular se obtiene que

$$P(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P_1(x,y) = 0 \quad \text{o} \quad P_2(x,y) = 0$$

y por lo tanto que

$$C(P) = C(P_1) \cup C(P_2).$$

Hemos demostrado que si P es *reducible* (es decir, si P es un producto de polinomios, de grado ≥ 1, recuérdese nuestra convención) entonces su curva algebráica asociada es unión de curvas algebráicas. Esto explica en general porqué cuando clasificamos curvas cuadráticas nos aparecían a veces parejas de rectas; surgen de la multiplicación de dos polinomios lineales. Es natural definir entonces que una curva algebráica es *irreducible* si su polinomio asociado lo es, es decir, si no se puede expresar como un producto de polinomios (de grado al menos 1, incistimos por última vez).

Es muy claro que también tenemos polinomios en tres (o más) variables, que tienen su grado, su suma y multiplicación y que sus ceros definen subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ (o, respectivamente, de $\mathbb{R}^n$) a los que se llaman *superficies algebráicas* (o bien, *hipersuperficies algebráicas*). Por el momento, nos interesa definir un polinomio de tres variables a partir de uno de dos.

Dado P como en (7.1), su *homogeneización*, o bien, su *polinomio homogéneo asociado,* es

$$\tilde{P}(x,y,z) = \sum_{i,j=0}^{k} a_{i,j}\, x^i y^j z^{(n-i-j)},$$

donde n es el grado de P.

El nombre viene de que, en general, se dice que un polinomio es *homogéneo* de grado n si todos sus monomios son de grado n. Y la receta para obtener el polinomio homogéneo asociado es muy fácil, a cada monomio se le multiplica por la potencia de z necesaria para convertirlo en monomio de grado n. De su polinomio homogéneo se puede recuperar el polinomio original al hacer $z = 1$; es decir, se tiene que

$$P(x,y) = \tilde{P}(x,y,1)\,. \tag{7.2}$$

De tal manera que la asociación $\left(P \mapsto \tilde{P}\right)$ es inyectiva de los polinomios de grado n en dos variables a los homogéneos de grado n en tres variables. Y un polinomio homogéneo en tres variables viene de uno en dos si y sólo z no aparece en todos sus monomios, es decir, si y sólo si el polinomio z no lo divide. Esto se da pues a los monomios de grado n de P (que los hay) no se les multiplica por nada.

EJERCICIO 7.1 Demuestra geométricamente que los polinomios $x^2 + y^2 - 1$, $x^2 - y^2 - 1$ y $x^2 - y$ son irreducibles.

EJERCICIO 7.2 ¿Cuáles son los polinomios homogéneos asociados a los anteriores? ¿Puedes describir las superficies que definen en $\mathbb{R}^3$? Describe cuáles son sus intersecciones con los planos horizontales $z = cte$; y luego qué pasa cuando z varía.

EJERCICIO 7.3 Demuestra que la superficie algebráica definida por el polinomio homogéneo asociado a a un polinomio lineal en dos variables es un plano por el orígen.

7.1.2 Conos y curvas algebráicas proyectivas

Veamos ahora cómo es la superficie algebráica definida en $\mathbb{R}^3$ por la homogeneización de un polinomio en dos variables.

Hay que explicitar primero lo que dijimos arriba por encimita. Dado cualquier polinomio en tres variables $P(x, y, z)$, define un subconjunto de $\mathbb{R}^3$,

$$C(P) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid P(x, y, z) = 0\right\},$$

llamado su *superficie asociada*. Y a estos subconjuntos se les conoce como las *superficies algebráicas* de $\mathbb{R}^3$. Un ejemplo que ya conocemos bien son los planos, ya que están definidos por polinomios lineales. Otro ejemplo que ya hemos estudiado es la esfera unitaria $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$; o bien, cualquier esfera pues estará definida por un polinomio de la forma $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - d^2$ (ver más ejemplos en los siguientes ejercicios).

Supongamos ahora que $\tilde{P}(x, y, z)$ **es un polinomio homogéneo en tres variables**. Cumple entonces que $\mathbf{0} \in C(\tilde{P})$ pues como cada monomio tiene al menos una variable, se anulará en el orígen; esto es, $\tilde{P}(0, 0, 0) = 0$. Pero además, la propiedad de ser homogéneo nos da que para cualquier $t \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\tilde{P}(t\,x, t\,y, t\,z) = t^n\,\tilde{P}(x, y, z)\,, \tag{7.3}$$

donde n es el grado de $\tilde{P}$; pues en cada monomio se asocian las t's correspondientes a las tres variables para darnos una t^n que se factoriza a toda la sumatoria. Esta propiedad es exclusiva de los polinomios homogéneos, pues en los otros las t's de los monomios adquieren diferentes exponentes y es imposible factorizarlos más alla de los pedazos homogéneos de un grado dado. Y esta propiedad tiene una implicación geométrica importantísima que es que

$$C(\tilde{P}) \text{ es unión de rectas por el orígen.}$$

Pues (7.3) implica claramente que

$$\tilde{P}(x, y, z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{P}(t\,x, t\,y, t\,z) = 0,\ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Conviene introducir la notación de un vector variable $\mathbf{x} = (x, y, z)$ con la obvia $\tilde{P}\,(\mathbf{x}) = \tilde{P}(x, y, z)$, para poder concluir que si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (nadamas para estar de acuerdo con nuestra convención del capitulo anterior) entonces

$$\mathbf{x} \in C(\tilde{P}) \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{x}] \subset C(\tilde{P}),$$

donde $[\mathbf{x}]$ esta pensado como recta por el orígen en $\mathbb{R}^3$. Pero si lo pensamos como punto en $\mathbb{P}^2$ nos lleva a la definición básica de este capítulo.

Definición 7.1.1 Una *curva algebráica* de grado n (≥ 1) en el plano proyectivo es un subconjunto definido como

$$\tilde{C}(\tilde{P}) = \left\{[\mathbf{x}] \in \mathbb{P}^2 \mid \tilde{P}\,(\mathbf{x}) = 0\right\}$$

donde $\tilde{P}(x, y, z) = \tilde{P}\,(\mathbf{x})$ es un polinomio homogéneo de grado n. Si además $\tilde{P}$ es la homegeneización de un polinomio $P(x, y)$, entonces a $\tilde{C}(\tilde{P})$ se le llama la *cerradura proyectiva* de la curva algebráica $C(P) \subset \mathbb{R}^2$.

Puesto que $C(\tilde{P}) \subset \mathbb{R}^3$ es unión de rectas por el orígen, se le llama *cono*. Y esta misma razón nos permite pensarlo como un conjunto bien definido de puntos en $\mathbb{P}^2$, que denotamos $\tilde{C}(\tilde{P})$. En el caso que $\tilde{P}$ se obtiene de un polinomio en dos variables $P\,(x, y)$ como su homogeneización, entonces (como demostraremos a continuación) este cono consiste exactamente de las rectas que pasan por el origen y puntos de la curva $C(P)$ dibujada en el plano coordenado canónico $z = 1$, (es el *cono sobre* $C(P)$); y apenas incluye unas cuantas rectas horizontales más correspondiendo a cómo se aproxima la curva al infinito.

Teorema 7.1.1 *Sea $P(x, y)$ un polinomio de grado n. Entonces su curva algebráica y su cerradura proyectiva coinciden en $\mathbb{R}^2$ (pensado dentro de $\mathbb{P}^2$ como la carta coordenada canónica $z = 1$), es decir,*

$$C(P) = \tilde{C}(\tilde{P}) \cap \mathbb{R}^2;$$

y además, la cerradura proyectiva tiene a lo sumo n puntos en el infinito, es decir $\sharp(\tilde{C}(\tilde{P}) - C(P)) \leq n$.

Demostración. Sea Π_1 el plano $z = 1$ en $\mathbb{R}^3$, e identificamos sus puntos con los de $\mathbb{R}^2$ como siempre (mediante la correspondencia $(x, y, 1) \leftrightarrow (x, y)$). Demostremos primero que

$$C(P) = C(\tilde{P}) \cap \Pi_1. \tag{7.4}$$

Como

$$P\,(x, y) = \tilde{P}\,(x, y, 1)$$

(recúerdese (7.2)), se tiene que

$$P\,(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{P}\,(x, y, 1) = 0.$$

La expresión de la izquierda dice que $(x, y) \in C(P)$ y la de la derecha que su punto correspondiente en Π_1, $(x, y, 1)$, está en $C(\tilde{P})$. Lo cual demuestra (7.4).

Consideremos ahora el enunciado del Teorema. Si $[\mathbf{x}] \in \tilde{C}(\tilde{P}) \cap \mathbb{R}^2$, entonces está representado por un vector $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $z \neq 0$ y que además está en el cono $C(\tilde{P})$. Pero entonces $(x/z, y/z, 1)$ también está en $C(\tilde{P})$ y por (7.4) está en la curva original $C(P)$; por tanto $\tilde{C}(\tilde{P}) \cap \mathbb{R}^2 \subset C(P)$. El otro lado es más fácil, si $(x, y) \in C(P)$ entonces $\tilde{P}\,(x, y, 1) = P\,(x, y) = 0$ y por definición $[x : y : 1] \in \tilde{C}(\tilde{P})$.

Entonces, lo único nuevo que puede tener $\tilde{C}(\tilde{P})$ (que no tenía $C(P)$) está en el infinito, es decir, puntos de la forma $[x : y : 0]$. Para estudiarlos, consideremos el plano Π_0 paralelo a Π_1 por el orígen, dado por la ecuación $z = 0$. Nos interesa ahora describir el conjunto

$$C(\tilde{P}) \cap \Pi_0.$$

Sabemos que consiste de rectas por el orígen. ¿Cuáles? Para saberlo, hay que sustituir $z = 0$ en el polinomio $\tilde{P}$: esto anula todos los sumandos de P excepto los de grado n que son los únicos que no múltiplicamos por z (o una potencia mayor de z) para obtener $\tilde{P}$. Esta es la parte *dominante o de grado máximo* del polinomio P, llamémosle P_n. Es decir,

$$P_n(x, y) := \tilde{P}(x, y, 0).$$

Podemos identificar a $C(\tilde{P}) \cap \Pi_0$ con $C(P_n)$ (por la correspondencia obvia $(x, y, 0) \leftrightarrow (x, y)$). Como P_n es homogéneo de grado n (aunque ahora de dos variables) se corrobora que $C(P_n)$ consiste de rectas por el orígen en un plano. Nos falta ver que son a lo más n para completar el Teorema.

Supongamos primero que el polinomio y no divide a P_n, es decir, que no todos los monomios de P_n tienen a y (o, lo que es lo mismo, que el coeficiente de x^n es distinto de cero). Esto implica que la recta $y = 0$ no está en $C(P_n)$ pues $P_n(1, 0) \neq 0$ (es justo el coeficiente de x^n). Se tiene entonces que todas las rectas de $C(P_n)$ intersectan a la recta $y = 1$ en un punto que además las determina. Estos puntos se encuentran resolviendo la ecuación en x

$$P_n(x, 1) = 0.$$

Como $P_n(x, 1)$ es un polinomio de grado n en una variable, tiene a lo más n raices reales y hemos terminado.

Nos falta el caso en que y divide a P_n, pero es igual de fácil. Ya tenemos una recta de $C(P_n)$, pues $P_n(x, 0) = 0$. Al factorizar y nos queda un polinomio de grado menor que n y sus soluciones, como en el caso anterior, serán a lo más $n - 1$. □

Ejemplos

Lineas Rectas Sabemos que cualquier linea recta de $\mathbb{R}^2$ está definida por un polinomio lineal $ax + by + c$. Su homogeneización $ax + by + cz$ define precisamente a su completación proyectiva que intersecta a la línea al infinito en el punto $[-b : a : 0]$. De tal manera que lo que hemos hecho incluye lo que ya sabiamos del Capitulo 6 acerca de los polinomios lineales y las rectas.

Cónicas Sea

$$P(x, y) = x^2 + y^2 - 1,$$

sabemos bien que $C(P)$ es el **círculo** unitario $\mathbb{S}^1$. Su polinomio homogéneo asociado es

$$\tilde{P}(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2,$$

que define al cono desde el orígen del círculo unitario dibujado en el plano $z = 1$. Esto se puede ver desde la óptica de la demostración anterior, o bien, observando que al variar z se obtienen círculos centrados en el orígen con radio $|z|$. La parte dominante de P es $P_2(x, y) = x^2 + y^2$ cuya única solución es $(0, 0)$, la que no vale proyectivamente. De tal manera que su completación proyectiva es ella misma, $\mathbb{S}^1$ no tiene nada al infinito; lo cuál es bastante obvio, pero corrobora que nuestro método es bueno: no añade nada si no hay necesidad.

Consideremos ahora a la **hipérbola**; sea

$$P(x, y) = x^2 - y^2 - 1,$$

cuyo polinomio homogéneo asociado es

$$\tilde{P}(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2.$$

En el infinito, cuando $z = 0$, tenemos la parte dominante

$$P_2(x, y) = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

que define dos rectas, las asintotas. De tal manera que a $\tilde{C}(\tilde{P})$, la completación proyectiva de la hipérbola, se le añaden en el infinito justo los puntos correspondientes a sus asintotas. El cono $C(\tilde{P})$ es de nuevo un cono circular pero ahora horizontal e intersectando al plano $z = 0$ en las asintotas. Para ver esto, obsérvese que su intersección con el plano $x = 1$ es un círculo unitario; o en general, que sus intersecciones con los planos $x = cte$ son círculos que crecen linealmente (la coordenada x juega ahora el papel que jugaba la coordenada z en el caso anterior). Pensando en el plano proyectivo, la hipérbola se ve como círculo en la carta coordenada $x = 1$. Proyectivamente es igual al círculo.

Veamos por último a la **parábola** definida por el polinomio

$$P(x, y) = x^2 - 2y, \tag{7.5}$$

cuyo polinomio homogéneo asociado es

$$\tilde{P}\,(x,y,z) = x^2 - 2zy. \tag{7.6}$$

Su parte dominante es $P_2\,(x,y) = x^2$ cuya única solución es la recta $x = 0$ (el eje y). Así que, como era de esperarse, la parabola intersecta al infinito en un sólo punto, el correspondiente a su eje. En este caso, el cono $C(\tilde{P})$ vuelve a ser un cono circular, pero ahora "descansa" sobre el plano $z = 0$; es decir, lo toca unicamente en una línea. También contiene al eje z, y los planos donde intersecta en un círculo tienen la ecuación $y + z = k$, con k constante (ver Ejercicio 7.1.2).

Obsérvese que en este caso el cono $C(\tilde{P})$ es tangente al plano al infinito, lo cual quiere decir que la línea al infinito es tangente a la cónica proyectiva $\widetilde{C}(\tilde{P})$. Esto es, las parábolas son tangentes a la línea al infinito.

El Teorema de Bezout (descripción)

Ya con algunos ejemplos concretos en la cabeza, deliníemos algunas consecuencias del Teorema 7.1.1.

Primero, como ya habíamos visto, los únicos polinomios homogéneos que no son la homogeneización de un polinomio en dos variables son aquellos divisibles por z; y que entonces tienen a la recta al infinito $z = 0$ como componente. Pero la recta al infinito no tiene nada de especial dentro del plano proyectivo. Así que una curva algebráica proyectiva o bien contiene a una recta dada (como componente), o bien la intersecta en un número finito de puntos y este número es a lo más el grado de la curva. Hemos visto ya tres ejemplos donde este número varia entre 0 y el grado de la curva. Si hay menos puntos de intersección que el grado es porque algún polinomio no tuvo todas sus raices potenciales; algunas de ellas fueron complejas, y esto es porqué los números reales no son "algebráicamente cerrados".

Los números complejos sí son algebráicamente cerrados, es decir, cualquier polinomio (en una variable) tiene tantas raices como su grado[1]. En el siglo pasado se desarrolló su Teoría a la par que explotaba la geometría. Las dos ideas se lograron juntar dando lugar a lo que ahora se conoce como **Geometría Algebráica**. En ella se siguen (o de ella surgen) las ideas de construir una geometría proyectiva con coordenadas homogéneas y basicamente las mismas definiciones que hemos dado pero sobre el campo de los números complejos. Y en ese contexto, si es cierto lo que se intuye, si dos curvas algebráicas no tienen componentes comunes entonces se intersectan en tantos puntos (contados adecuadamente con multiplicidad) como el producto de sus grados. A esto se le conoce como el Teorema de Bezout, pero rebaza el nível de este libro; que quede ahí como motivación.

---

[1] Ver Apendice Algebráico

EJERCICIO 7.4 Demuestra que la intersección del cono $C(\tilde{P})$ de la parábola, donde $\tilde{P}(x,y) = x^2 - 2y$, con el el plano $y + z = k$ (con k constante) es un círculo, dando una parametrización isométrica de él. ¿Cuál es el radio de ese círculo?

EJERCICIO 7.5 Considera la familia de polinomios $P_k(x,y) = x^2 - y^2 - k$, donde k es una constante real. Demuestra que las curvas algebráicas de todos estos polinomios intersectan a la recta al infinito en los mismos dos puntos ¿cuáles son? ¿Puedes dibujar qué tipos de curvas definen en $\mathbb{R}^2$ cuando k es negativa y cuando k es positiva? ¿Cuando es chica o grande?

EJERCICIO 7.6 Considera la familia de polinomios $P_k(x,y) = x^3 - xy^2 - k$, donde k es una constante real. Demuestra que las curvas algebráicas de todos estos polinomios intersectan a la recta al infinito en los mismos tres puntos ¿cuáles son? ¿Puedes dibujar, a grandes razgos, qué tipos de curvas definen en $\mathbb{R}^2$ cuando k es negativa y cuando k es positiva? Para esto, puedes encontrar los sectores de $\mathbb{R}^2$ donde el polinomio $P_0(x,y)$ es positivo o negativo.

7.1.3 Equivalencia proyectiva

Así como definimos equivalencia de curvas cuadráticas en $\mathbb{R}^2$ usando al grupo afín, para las curvas algebráicas tenemos que usar al grupo de transformaciones proyectivas. La equivalencia geométrica puede muy bien definirse en general para subconjuntos.

Dados dos subconjuntos C y C' del plano proyectivo, se dice que son *equivalentes*, y escribimos $C \sim C'$ si existe $f \in \mathrm{Pr}(2)$ tal que $f(C') = C$. Así, por ejemplo todos los cuadrángulos (cuatro puntos en posición general) son equivalentes, o por dualidad, cuatro rectas sin tercias concurrentes lo son. Es fácil ver que esta es una relación de equivalencia, ver Ejercicio

Uno de los problemas que dan lugar al desarrollo de la geometría algebráica es la clasificación de curvas algebráicas, entendida como la descripción o enumeración de sus clases de equivalencia. Como la herramienta para definirlas, o trabajarlas, son los polinomios, es necesario definir equivalencia de polinomios homogéneos.

Sean $P(x,y,z)$ y $Q(x,y,z)$ dos polinomios homogéneos. Se dice que son *proyectivamente equivalentes*, o simplemente *equivalentes*, si existen $t \neq 0$ y una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tales que

$$Q = t\,(P \circ f)\,.$$

Puesto que f se escribe en coordenadas como $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_3(\mathbf{x}))$ donde cada f_i $(i = 1, 2, 3)$ es una función lineal de la forma $f_i(x,y,z) = a_i x + b_i y + c_i z$, entonces $P \circ f$ se obtiene sustituyendo estos polinomios lineales en vez de sus tres variables y claramente resulta un nuevo polinomio homogéneo y del mismo grado. Así que la noción de equivalencia está bien definida y sólo hace equivalentes a polinomios de un mismo grado.

Por ejmplo, si $P(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ y $Q(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2$ son los polinomios que vienen del círculo y la hipérbola respectivamente, entonces para ver que son equivalentes tomemos $f(x,y,z)=(z,y,x)$ y $t=-1$, pues tenemos

$$\begin{aligned} t\,(P\circ f)(x,y,z) &= -1\,(P(f(x,y,z))) \\ &= -P(z,y,x) = -\left(z^2+y^2-x^2\right) = Q(x,y,z)\,. \end{aligned}$$

Lema 7.1.1 *Sean $P(x,y,z)$ y $Q(x,y,z)$ dos polinomios homogéneos equivalentes, entonces sus curvas algebráicas proyectivas $\tilde{C}(P)$ y $\tilde{C}(Q)$ son equivalentes.*

Demostración. Por hipótesis tenemos $t\neq 0$ y una transformación lineal $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tales que

$$Q = t\,(P\circ f)\,.$$

Abusando de la notación, pensamos a f también como función de $\mathbb{P}^2$ en sí mismo con la fórmula $f([\mathbf{x}])=[f(\mathbf{x})]$. Demostraremos que $f\left(\tilde{C}(Q)\right)=\tilde{C}(P)$.

Supongamos primero que $[\mathbf{x}]\in\tilde{C}(Q)$, entonces $Q(\mathbf{x})=0$. Para ver si $f([\mathbf{x}])=[f(\mathbf{x})]\in\tilde{C}(P)$, tenemos que evaluar a P en $f(\mathbf{x})$:

$$P(f(\mathbf{x}))=(P\circ f)(\mathbf{x})=t^{-1}Q(\mathbf{x})=0.$$

Por lo tanto $f([\mathbf{x}])\in\tilde{C}(P)$ y concluimos que $f\left(\tilde{C}(Q)\right)\subset\tilde{C}(P)$.

Supongamos ahora que $[\mathbf{y}]\in\tilde{C}(P)$, i.e. que $P(\mathbf{y})=0$; para ver que $[\mathbf{y}]\in f\left(\tilde{C}(Q)\right)$ debemos encontrar $[\mathbf{x}]\in\tilde{C}(Q)$ tal que $f([\mathbf{x}])=[\mathbf{y}]$. Para esto, como f es transformación, tiene una inversa y podemos declarar $\mathbf{x}:=f^{-1}(\mathbf{y})$. Como $\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$ pues es un punto en $\mathbb{P}^2$ y f^{-1}es una transformación, $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ y $[\mathbf{x}]\in\mathbb{P}^2$ está bien definido. Nos falta ver que $[\mathbf{x}]$ está en $\tilde{C}(Q)$, y para esto hay que evaluar

$$Q(\mathbf{x})=t\,(P\circ f)\left(f^{-1}(\mathbf{y})\right)=t\,P(\mathbf{y})=0.$$

Por lo tanto $\tilde{C}(P)\subset f\left(\tilde{C}(Q)\right)$ y queda demostrado el Lema. □

Sería muy bonito que el Lema tuviera inverso, que fuera un Teorema "si y sólo si". Pero no es estrictamente cierto. Por ejemplo, si P fuera el cuadrado de un polinomio y Q el cubo, definen la misma curva pero no son equivalentes. También tenemos el problema de que los reales no son algebráicamente cerrados. Por ejemplo, en $\mathbb{P}^1$ el polinomio homogéneo x^2+y^2 define al vacio (su única solución real es $(0,0)$, que proyectivamente no vale), así que el producto $(x^2+y^2)(x+y)$ y el polinomio homogéneo lineal $x+y$ definen al mismo punto $[1:-1]$ pero no son proyectivamente equivalentes ni potencias de un mismo polinomio. Lo que sí es cierto a grandes rasgos es que, sobre los complejos, si dos polinomios definen la misma "curva" entonces, salvo constantes, son potencias de algún otro. Este es un Teorema famoso conocido como el "Nullstellensatz" que habla sobre los ceros de polinomios. De nuevo, rebaza el ámbito de este libro. Pero no nos desanimemos, en ciertos casos (el cuadrático y el lineal) sí daremos la demostración pero hay que desarrollar más la teoría geométrica.

EJERCICIO 7.7 Demuestra que la equivalencia proyectiva de subconjuntos es realmente una relación de equivalencia.

EJERCICIO 7.8 Demuestra que la equivalencia de polinomios es realmente una relación de equivalencia.

EJERCICIO 7.9 Demuestra que la hipérbola $x^2 - y^2 - 1$ es proyectivamente equivalente al círculo $x^2 + y^2 - 1$.

EJERCICIO 7.10 Demuestra que hay una única clase de equivalencia de rectas.

7.2 Formas cuadráticas

Basta de generalidades. Concentremonos en el caso de curvas cuadráticas o cónicas. Una curva cuadrática en $\mathbb{R}^2$ está determinada por un polinomio de segundo grado que podemos expresar cómo

$$P(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f.$$

(Nótese que añadimos un 2 a los términos lineales, a diferencia del Capítulo 4, pues en un momentito más, al proyectivizar, se comportaran como términos mixtos con la nueva variable.) Su homogeneización es

$$\tilde{P}(x,y,z) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2.$$

Si tomamos un vector variable $\mathbf{x} = (x,y,z)$, entonces podemos simplificar la notación como en el Capítulo 4. Este polinomio se escribe

$$\tilde{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x},$$

donde A es la matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix},$$

pues (y aquí aparece la importancia de haber añadido 2 en los términos mixtos),

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^\top A\mathbf{x} &= (x,y,z) \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= (x,y,z) \begin{pmatrix} ax + by + dz \\ bx + cy + ez \\ dx + ey + fz \end{pmatrix} \\
&= x(ax + by + dz) + y(bx + cy + ez) + z(dx + ey + fz) \\
&= \tilde{P}(x,y,z).
\end{aligned}$$

Llamaremos *forma cuadrática* a un polinomio homogéneo de grado 2. Por lo que acabamos de ver, la forma cuadrática general se escribe como

$$P(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x} \quad \text{con} \quad A = A^\top; \tag{7.7}$$

y la única posibilidad de que no sea la homogeneización de un polinomio cuadrático en dos variables es que tenga la forma $2dxz + 2eyz + z^2 = z(2dx + 2ey + z)$, cuya curva es un par de rectas y siendo una de ellas la del infinito. Así que conviene considerar el caso de una curva cuadrática proyectiva definida por una forma cuadrática en tres variables como en (7.7), donde le hemos quitado ya la tilde a P para simplificar nuestra notación.

La matriz simétrica A que define a una forma cuadrática es el paquete que lleva toda su información: los coeficientes. Veamos ahora cómo se traduce la equivalencia de polinomios en las matrices simétricas que los determinan. Tenemos que ver qué le pasa cuando precomponemos con una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que está definida como $f(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ con B una matriz no singular. Se tiene

$$\begin{aligned}(P \circ f)(\mathbf{x}) &= P(f(\mathbf{x})) = P(B\mathbf{x}) \\ &= (B\mathbf{x})^\top A(B\mathbf{x}) = \left(\mathbf{x}^\top B^\top\right) A(B\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{x}^\top \left(B^\top AB\right)\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Lo cuál implica que dos matrices simétricas A y A' determinan formas cuadráticas equivalentes si existen $t \neq 0$ y $B \in \mathbf{GL}(3)$ tales que

$$A' = t\left(B^\top AB\right);$$

diremos en este caso que A y A' son *algebráicamente equivalentes*.

El problema de clasificar curvas cuadráticas proyectivas se reduce entonces a encontrar las formas canónicas a las que podemos reducir matrices algebráicamente equivalentes. Pero antes de entrar de lleno en él, concluyamos un ejemplo importante que dejamos pendiente: el de la parábola.

Sean P y su homogeneización $\tilde{P}$ como en (7.5) y (7.6) respectivamente. Dicho de otra manera, su matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabemos que $C(\tilde{P})$ es un cono circular (ver Ejercicio 7.1.2) y además que es tangente al plano $z = 0$ (y también al $y = 0$). Isométricamente es igualito al cono del círculo unitario; y la isometría que lleva a este último en $C(\tilde{P})$ es la rotación de $-45°$ alrededor del eje x. Sea B la matriz de esa rotación, es decir

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & & \\ & 1 & 1 \\ & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tenemos entonces, de acuerdo con la demostración del Lema 7.1.1, que

$$\begin{aligned}
B^{\top}AB &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

es la matriz del cono de $\mathbb{S}^1$, a quien llamaremos el *cono de Lorentz*.

Junto con el ejercicio 7.1.3, tenemos entonces que la hipérbola, la parábola y el círculo son proyectivamente equivalentes. Lo que afinmente las diferencía es cómo intersectan a la línea al infinito, la hipérbola en dos puntos (correspondientes a la dirección de sus asintotas), la parábola en uno (correspondiente a su directriz) y el círculo en nada.

7.2.1 Clasificación usando a la afín

Puesto que el grupo afín $\mathbf{Af}\,(2)$ se puede considerar naturalmente dentro del grupo general lineal, $\mathbf{Af}\,(2) \subset \mathbf{Gl}\,(3)$, como las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} B' & \mathbf{k} \\ \mathbf{0}^{\top} & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.8}$$

con $B' \in \mathbf{Gl}\,(2)$ (la parte lineal) y $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$ (la translación), actuando en el plano $z = 1$ (ver 6.??); entonces podemos usar la clasificación afín del Capítulo 4 para dar la clasificación proyectiva. Esta clasificación es tanto de formas cuadráticas, como de sus curvas algebráicas como de sus matrices simétricas asociadas. Enunciémoslo en términos de matrices, aunque en la demostración hablaremos indistintamente de estos tres tipos de objetos hermanados.

Teorema 7.2.1 *Una matriz simétrica* 3×3 *distinta de cero es algebráicamente equivalente a una y sólo una de las siguientes*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostración. Sabemos que afinmente se reducen a nueve (ver 4.2.1), es decir, que actuando unicamente con matrices afines (7.8) llegamos a nueve formas canónicas. Pero ya hemos visto que tres de ellas (círculo, parábola e hipérbola) son proyectivamente equivalentes (para hacerlas equivalentes se usan necesariamente matrices no afínes). De tal manera que las *no degeneradas* de la primera línea son dos, la *forma cuadrática definida* (o *euclidiana*) cuya curva es vacia, y la *forma cuadrática de Lorentz* que define a **la** cónica proyectiva no degenerada (representada por la forma cuadrática del círculo unitario).

Las formas *degeneradas* son las tres del segundo renglón. La primera tiene como curva a un único punto, el $[0:0:1]$. En ella se han fundido lo que habíamos llamado "el círculo de radio cero" (x^2+y^2) y "las rectas paralelas imaginarias" (x^2+1), que, al homogeinizarse en x^2+z^2, sí tiene un punto al infinito. La segunda es un par de rectas (antes eran dos casos: paralelas y no que en el proyectivo son lo mismo). Y por último, una recta doble.

Puesto que los subconjuntos del proyectivo asociados a estas matrices (las curvas de sus respectivas formas) son todos de distinta índole, no es posible que sean equivalentes. Y esto concluye la demostración. □

Podría parecer que hemos acabado nuestro trabajo de clasificación de curvas cuadráticas proyectivas, y en principio sí. Pero repasemos la demostración que en el fondo dimos. La clasificación afín. Que consistió de reducir el polinomio general a alguno de los canónicos en dos pasos centrales pero independientes. Primero, encontrar un centro (para eliminar términos lineales) por medio de una translación, y, segundo, encontrar los ejes (para eliminar términos mixtos) por medio de una rotación. Lo demás fueron detalles, se reescalaron los ejes coordenados y se multiplicó por la constante si fuera requerido para hacer de todos los coeficientes 0, 1 o -1; y finalmente, se permutaron variables.

Al proyectivizar y homogeneizar el polinomio nos hemos deshecho de los términos lineales y el constante, ahora todo es cuadrático, entonces parece que podríamos evitar el primer paso, hacerlo todo de golpe con la rotación. Esto nos dará una demostración más elegante, cuyas ventajas serán multiples. Por un lado nos dará una idea general de cómo deben ser las superficies cuadráticas en todas las dimensiones, y por el otro, un entendimiento más profundo de las formas cuadráticas que redundará en conocimientos concretos sobre las cónicas y en nuevas geometrías.

7.2.2 Equivalencia lineal

Sea A una matriz simétrica 3×3 y P su forma cuadrática asociada, es decir,

$$P(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x} = \mathbf{x}\cdot(A\mathbf{x}) \quad \text{con} \quad A^\top = A.$$

Para entender con más precisión qué hace esta forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$, y en particular cómo es la geometría de su cono asociado $C(P)$, actuaremos en ella, no a lo bestia con matrices cualesquiera de $\mathbf{Gl}(3)$ como en la sección anterior, sino con más tacto, con las que preservan el producto interior y por tanto la métrica. Sabemos que estas matrices son las matrices ortogonales (que forman el grupo $\mathbf{O}(3)$) y que también preservan la métrica de $\mathbb{P}^2$.

Si $B \in \mathbf{O}(3)$, y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es su transformación asociada, tenemos que

$$(P \circ f)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \left(B^\top A B\right) \mathbf{x},$$

como para cualquier matriz B. Pero en este caso especial ($B \in \mathbf{O}(3)$), la matriz $B^\top AB$ tiene una interpretación geométrica muy particular. Puesto que

$$B \in \mathbf{O}(3) \quad \Leftrightarrow \quad B^\top = B^{-1}$$

entonces $B^\top AB = B^{-1}AB$ y esta matriz es la matriz asociada a la transformación A pero escrita en la base B.

Veamos. Si B tiene columnas $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, entonces que sea invertible significa que estos tres vectores forman una base, es decir, que cualquier vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ se puede escribir como

$$\mathbf{x} = \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2 + \beta_3 \mathbf{u}_3. \tag{7.9}$$

Definimos $\mathbf{x}_B := (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, como la expresión de $\mathbf{x}$ *en la base* B. Así que, por ejemplo, $\mathbf{u}_1$ en la base B es $(1,0,0) = \mathbf{e}_1$; pero $\mathbf{u}_1$ en la base canónica puede ser complicado. Para pasar de la expresión en la base B a la expresión en la base canónica, simplemente hay que multiplicar por B, pues equivale a calcular los valores reales de las coordenadas en la expresión (7.9), que se puede rescribir $\mathbf{x} = B\mathbf{x}_B$. Y al revez, para pasar de la expresión en la base canónica a la expresión en la base B hay que multiplicar por la inversa B^{-1}, pues es la manera de encontrar la solución de (7.9) pensado como sistema de ecuaciones con incógnitas $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; puesto que $\mathbf{x} = B\mathbf{x}_B$, tenemos que $\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{x}$. En el ejemplo, es claro que $B^{-1}\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1$. Asi que la matriz

$$B^{-1}AB,$$

pensada como transformación aplicada a un vector escrito en la base B, primero lo reescribe en la base canónica, luego le aplica A (que es como ella sabe actuar) y luego lo traduce de nuevo a la base B. Con la notación que desarrollamos en el parrafo anterior, esto se escribe

$$\left(B^{-1}AB\right)\mathbf{x}_B = B^{-1}A\left(B\mathbf{x}_B\right) = B^{-1}A\mathbf{x} = B^{-1}\left(A\mathbf{x}\right) = \left(A\mathbf{x}\right)_B .$$

Hemos demostrado que $B^{-1}AB$ es la matriz de la transformación A escrita en la base B. Es natural entonces decir que dos matrices son *linealmente equivalentes* si expresan a la misma transformación pero en diferentes bases, es decir si son A y $B^{-1}AB$ para alguna $B \in \mathbf{GL}(3)$, pues obsérvese que en nuestra discusión de la escritura en diferentes bases sólo usamos que B fuera invertible. Si, en particular,

$B \in \mathbf{O}(3)$, que es el caso que nos interesa, entonces se dice, aún más, que A y $B^{-1}AB$ son *ortogonalmente equivalentes*.

Hay que remarcar que la equivalencia lineal **no** corresponde a la equivalencia algebráica que estamos estudiando (de ahí que le hayamos puesto apellido) pues en general $B^\top AB \neq B^{-1}AB$. Sólo en el caso especial que se actue con las ortogonales (cuando $B \in \mathbf{O}(3)$, y que cumple que su inversa es su transpuesta), sí coinciden. Es decir,

Lema 7.2.1 *Si dos matrices simétricas son ortogonalmente equivalentes entonces son algebráicamente equivalentes.*□

Podemos entonces pensar a A como función lineal y no como forma cuadrática para simplificarla ortogonalmente.

7.3 Diagonalización de matrices simétricas

Esta sección esta dedicada a demostrar lo siguiente.

Teorema 7.3.1 *Sea A un matriz simétrica, entonces es ortogonalmente equivalente a una matriz diagonal, es decir, existe una matriz ortogonal B tal que*

$$B^\top AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \tag{7.10}$$

Y para demostrarlo podemos pensar a A como función lineal (o proyectiva) pues como $B \in \mathbf{O}(3)$, $B^\top = B^{-1}$ y entonces la matriz $B^\top AB$ representa a la función A escrita en otra base. Que en esta nueva base sea diagonal, como vimos en la demostración del Teorema de 4 en 4, significa que, proyectivamente, fija a los tres puntos de la base; y euclidianamente, que alarga (o acorta) a sus ejes, que los deja en sí mismos. Para encontrar a B buscamos entonces puntos fijos de la función A (proyectiva); o bien, vectores propios de la función lineal.

Recordemos de la Sección 4.3.2, como de hecho gran parte de la discusión anterior de hecho ya lo hace, que un vector propio de la matriz A es un $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ distinto de $\mathbf{0}$ para el cual existe una $\lambda \in \mathbb{R}$, su valor propio, tal que

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Si $\lambda \neq 0$, $[\mathbf{v}]$ es un punto fijo de A (proyectiva), y si $\lambda = 0$ es un punto de proyección. También vimos en 4.3.2 que para encontrar pares propios, primero se encuentra un valor propio como raiz del polinomio característico y luego se le encuentra una solución notrivial al sistema de ecuaciones lineales correspondiente. Cómo en aquel entonces trabajabamos en $\mathbb{R}^2$, reconstruyamos la argumentación en $\mathbb{R}^3$ y haciendo énfasis en qué se necesitaría para el caso general.

Lema 7.3.1 *Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces existe $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tal que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ si y sólo si* $\det(A - \lambda I) = 0$.

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} & A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \\ \Leftrightarrow\ & A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow\ & (A - \lambda I)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Y la última ecuación sucede con algún $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ si y sólo si $\det(A - \lambda I) = 0$ (ver ??? para el caso en $\mathbb{R}^3$, y esto es lo que se necesita demostrar en el caso general). □

Veamos el ejemplo de la parábola bajo esta óptica. Con A la matriz de la parábola, $\det(A - \lambda I)$ toma la forma

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) &= \det\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= (1-\lambda)\left((-\lambda)(-\lambda) - 1\right) \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 \\ &= (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 1\right) \\ &= -(\lambda+1)(\lambda-1)^2 . \end{aligned}$$

Lo cuál nos dice que los valores propios de A son 1 y -1 pues son las *raices* de este polinomio (los valores de λ que lo anulan). Para el valor propio -1, se tiene entonces que el sistema de ecuaciones homogéneas

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tiene soluciones no triviales, a saber cualquiera de la forma $(0, t, t)$ con $t \neq 0$; correspondientes al punto fijo $\mathbf{u} := [0 : 1 : 1]$ de la transformación proyectiva ($A\mathbf{u} = -\mathbf{u}$) y al eje de simetría del cono. Por su parte, el valor propio 1, que tiene multiplicidad dos, da el sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuyas soluciones son todos los puntos del plano $y + z = 0$; que es el plano de simetría del cono. Proyectivamente, la recta $y + z = 0$, que es precisamente $\ell_{[\mathbf{u}]}$ se queda fija punto a punto, de tal manera que la matriz A representa a la reflexión en $\ell_{[\mathbf{u}]}$, qué también es la inversión en su polar $[\mathbf{u}]$.

Regresando al caso general, el lema nos dice que los valores propios de la matriz A son las raices (los ceros) de su *polinomio característico*

$$\det(A - \lambda I)$$

donde se piensa a λ como una variable. El polinomio característico de una matriz no cambia cuando la escribimos en otra base, pues para cualquier $B \in \mathbf{Gl}(3)$:

$$\begin{aligned}
\det\left(B^{-1}AB - \lambda I\right) &= \det\left(\left(B^{-1}AB\right) - \lambda\left(B^{-1}B\right)\right) \\
&= \det\left(\left(B^{-1}AB\right) - \left(B^{-1}(\lambda I)B\right)\right) \\
&= \det\left(B^{-1}(A - \lambda I)B\right) \\
&= \det\left(B^{-1}\right)\det(A - \lambda I)\det(B) \\
&= \det(A - \lambda I).
\end{aligned}$$

Asi que diagonalizar una matriz (como en 7.10) incluye necesariamente encontrar las raices de su polinomio característico, pues entonces se tiene por lo anterior que

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda) \\
&= -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3),
\end{aligned}$$

que es escribir al polinomio en términos de sus raices.

Si A es una matriz 3×3 (como en el caso que nos interesa), este es un polinomio de grado 3, y por el Teorema Fundamental del Algebra[2], tiene al menos una raiz real. En realidad lo que dice este Teorema es que tiene 3 raices complejas, pero si sus coeficientes son reales, como en nuestro caso, entonces las raices complejas vienen en parejas; un complejo y su conjugado. Como el grado es impar, entonces hay al menos una raiz real. Hemos demostrado entonces lo siguiente.

Corolario 7.3.1 *Toda matriz de* 3×3 *tiene al menos un par propio.*□

Ahora, usaremos la simetría de A para aplicar inducción encontrando un plano "invariante" y buscar ahí los dos pares propios que nos faltan. En general, dada una matriz cuadrada A se dice que un subespacio V es *invariante* si se cumple

$$\mathbf{x} \in V \quad \Rightarrow \quad A\mathbf{x} \in V.$$

Es decir si la función A lo deja en su lugar (aunque posiblemente cambiado internamente). El ejemplo básico de espacios invariantes corresponden a las líneas generadas por los vectores propios, pues la condición $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ implica que $[\mathbf{v}]$ es invariante y viceversa, una línea (por el orígen) invariante consta de vectores propios.

Recordemos del Capítulo 4 la caracterización de las matrices simétricas como aquellas que "saltan" en el producto interior. Por su sencillez, y para que quede autocontenida nuestra discusión, lo volveremos a demostrar.

[2] Ver Apendice Algebráico

Lema 7.3.2 *Sea A una matriz de 3×3, entonces*

$$A = A^{\top} \quad \Leftrightarrow \quad (A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y}) \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3.$$

Demostración. Para la ida ($\Rightarrow$) se usa que el producto interior es un caso particular del producto de matrices y su asociatividad. Para cualquier $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$,

$$(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = (A\mathbf{x})^{\top} \mathbf{y} = \left(\mathbf{x}^{\top} A^{\top}\right) \mathbf{y} = \left(\mathbf{x}^{\top} A\right) \mathbf{y} = \mathbf{x}^{\top} (A\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y}).$$

Para demostrar el otro lado ($\Leftarrow$), basta ver que la entrada i, j de A es $\mathbf{e}_i \cdot (A\mathbf{e}_j)$. Por hipótesis, $\mathbf{e}_i \cdot (A\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_j \cdot (A\mathbf{e}_i)$, que es la entrada j, i, así que A es simétrica. □

Hay que hacer resaltar que la condición de ser simétrica se ha expresado en términos del producto interior. Así que si tiene un subespacio invariante, se puede decir que es simétrica en él y este será el fundamento de la inducción despues de encontrar el plano invariante.

Lema 7.3.3 *Sea A una matriz simétrica ($A = A^{\top}$) y $\mathbf{v}$ un vector propio de A entonces el plano ortogonal a $\mathbf{v}$ es un espacio invariante de A; es decir*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad (A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Demostración. La demostración es muy simple, y se basa en el lema anterior. Pues si $\mathbf{v}$ un vector propio de A se tiene que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ para alguna $\lambda \in \mathbb{R}$, y entonces $\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = 0$ implica que

$$(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{v}) = \mathbf{x} \cdot (\lambda\mathbf{v}) = \lambda\,(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}) = 0.$$

□

Ya tenemos todos los ingredientes para demostrar el Teorema de Diagonalización Ortogonal de matrices simétricas.

Sea A una matriz simétrica 3×3. Por el Cororlario 7.3.1, A tiene un valor propio λ_3. Sea $\mathbf{u}_3$ un vector propio unitario correspondiente a λ_3 (cualquier vector propio multiplicado por el inverso de su magnitud nos lo hace unitario). Sean $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ cualquier par de vectores tales que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3$ forman una base ortonormal. Puesto que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son ortogonales a $\mathbf{u}_3$, el Lema 7.3.3 nos dice que $A\mathbf{v}_1$ y $A\mathbf{v}_2$ también lo son, de tal manera que A escrita en la base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3$ tiene la forma

$$A' = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

pues $b = \mathbf{v}_1 \cdot A\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 \cdot A\mathbf{v}_1$. Como lo demostramos en el Capítulo 4, se puede ver directamente que el polinomio característico de esta mátriz tiene sus otras dos raices reales (ya nadamás falta resolver un polinomio cuadrático). Que, como no cambia el polinomio característico son valores propios de la matriz original. Sean λ_1 y λ_2 estas raices y sean $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ sus vectores propios unitarios correspondientes. Nos falta ver que son ortogonales.

Puesto que por ser A simétrica,

$$(\lambda_i \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{u}_j = (A\mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{u}_j = \mathbf{u}_i \cdot (A\mathbf{u}_j) = \mathbf{u}_i \cdot (\lambda_j \mathbf{u}_j),$$

que implica que $(\lambda_i - \lambda_j)(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j) = 0$; tenemos que si $\lambda_i \neq \lambda_j$ entonces $\mathbf{u}_i$ es ortogonal $\mathbf{u}_j$. Si dos valores propios coincidieran, podemos suponer que son λ_1 y λ_2 pero entonces la matriz A' ya sería diagonal pues A en el plano invariante es una homotesia. Y si los tres valores propios coinciden entonces A es una homotesia en $\mathbb{R}^3$ y desde el principio es diagonal.

Con esto se concluye la demostración del Teorema de Diagonalización.

7.4 Geometría de las formas cuadráticas

Resumiendo las dos secciones anteriores, a una forma cuadrática en tres variables le asociamos una matriz simétrica A y hemos demostrado que en una base ortonormal adecuada $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ ésta se escribe como una matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Lo cuál dice que la forma cuadrática se expresa de manera muy simple,

$$P(\mathbf{x}) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2,$$

donde (x, y, z) son ahora las coordenadas de $\mathbf{x}$ respecto a la base $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$. Se tiene además que el determinante de la matriz original es el producto de sus valores propios ($\det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$). Entonces se puede saber desde el principio si alguno de los valores propios es cero, simplemente checando si $\det(A)$ es cero. A este caso se le llama *degenerado* pues, en la base adecuada, no depende de alguna de las coordenadas, viene, por decirlo así, de algo en una dimensión más baja y hay al menos una variable de pacotilla.

El caso interesante es el *no degenerado*, cuando $\det(A) \neq 0$. Y este se divide en dos subcasos. Primero cuando los tres valores propios tienen el mismo signo, llamada forma cuadrática *definida*, pues el valor de la forma cuadrática siempre tendrá el mismo signo (excepto en el $\mathbf{0}$ que vale 0). Si fueran positivos, por ejemplo, no importa qué valor le demos a las variables, al elevarlas al cuadrado se harán positivas y estaremos sumando tres números positivos, se le llama entonces *positiva definida*.

Cuando los tres son negativos se le llama *negativa definida*. Puesto que el único cero de las formas cuadráticas definidas es el orígen, su curva proyectiva asociada es vacia.

La otra posibilidad para una forma cuadrática no degenerada es que entre los valores propios aparezcan los dos signos, y se le llamara *indefinida*. Dos de los valores propios son de un signo y el restante del contrario, podemos suponer (cambiando el orden de la base si fuera necesario) que los dos primeros λ_1 y λ_2 son del mismo signo, y además, para fijar ideas, que son positivos (el otro caso será equivalente intercambiando las palabras "positivo" y "negativo"). Estas son las formas cuadráticas que definen a las *cónicas proyectivas*. En $\mathbb{R}^3$ sus ceros son un cono sobre una elipse. Demostrémoslo. Su intersección con el plano $z = 1$ (recordemos que estamos en la base B y no necesariamente en la canónica) esta determinado por la ecuación

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = (-\lambda_3),$$

donde las tres constantes son positivas, y por lo tanto es una elipse. Entonces $C(P)$ consiste de todas las rectas por el origen y puntos de esta elipse.

7.4.1 Su simetría

Los tres ejes $[\mathbf{u}_1], [\mathbf{u}_2], [\mathbf{u}_3]$ de la forma cuadrática rigen su simetría. Como hemos visto, se puede definir un subgrupo de $\mathbf{O}(3)$ para cualquier figura que son sus simetrías. También se puede definir para funciones en general, pero en nuestro caso particular definamóslo para la forma cuadrática que estamos estudiando:

$$\mathrm{Si}\,\mathbf{m}(P) = \{f \in \mathbf{O}(3) \mid P = P \circ f\}.$$

Donde pensamos a los elementos de $\mathbf{O}(3)$ como funciones, y estamos tomando a aquellas que al precomponerlas con la forma cuadrática ésta ni se entera. Cualquier cosa que definamos en base a P, por ejemplo sus ceros o sus superficies de nivel que estudiaremos más adelante, heredarán esta simetría.

Si llamamos f_i a la reflexión en el plano generado por $\mathbf{u}_j$ y $\mathbf{u}_k$ donde $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, entonces se escribe en coordenadas (respecto a B, insistimos) cambiándole el signo a la coordenada i. Por ejemplo $f_1(x, y, z) = (-x, y, z)$. Es claro entonces que $f_i \in \mathrm{Si}\,\mathbf{m}(P)$ pues como la coordenada en cuestión se eleva al cuadrado al evaluar P, el cambio de signo no altera el resultado. Cuando los tres valores propios λ_1, λ_2 y λ_3 son diferentes, entonces f_1, f_2 y f_3 generan a $\mathrm{Si}\,\mathbf{m}(P)$ y este tiene ocho elementos. Las rectas $[\mathbf{u}_1], [\mathbf{u}_2]$ y $[\mathbf{u}_3]$ están entonces determinadas por la geometría, por la simetría, y por esto los llamaremos *ejes de simetría*.

Cuando dos de los valores propios coinciden, digamos que $\lambda_1 = \lambda_2$, entonces el grupo de simetrías crece. El plano generado por $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ es un espacio propio, cualquier vector ahí es vector propio para el valor propio λ_1. Entonces $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ pueden escogerse como cualquier base ortonormal ahí y habrá un subgrupo $\mathbf{O}(2)$ de $\mathrm{Si}\,\mathbf{m}(P)$. En el caso de una forma cuadrática no degenerada indefinida está es la simetría máxima a la que puede aspirar (como en la forma cuadrática de Lorentz). De cualquier manera el *plano de simetría* queda determinado.

Cuando los tres valores propios coinciden (y por lo tanto es definida la forma cuadrática, de hecho una constante por la forma cuadrática euclidiana) la simetría es todo $\mathbf{O}(3)$.

EJERCICIO 7.11 Sea A una matriz simétrica 3×3 y $B \in \mathbf{O}(3)$ una matriz ortogonal. Si P es la forma cuadrática asociada a A y f la transformación lineal asociada a B ($f(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$), demuestra que $P = P \circ f$ si y sólo si $A = B^{-1}AB$.

EJERCICIO 7.12 Sean $A = (\lambda_1\mathbf{e}_1, \lambda_2\mathbf{e}_2, \lambda_3\mathbf{e}_3)$ una matriz diagonal y $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \in \mathbf{O}(3)$ una matriz ortogonal, tales que $A = B^\top AB$. Demuestra que si λ_1, λ_2 y λ_3 son diferentes entonces $\mathbf{v}_i = \pm\mathbf{e}_i$ para $i = 1, 2, 3$.

7.4.2 Ejemplos

Consideremos un círculo unitario pero desplazado una unidad en el eje x. Esta dado por el polinomio

$$P(x,y) = (x-1)^2 + y^2 - 1 = x^2 + y^2 - 2x.$$

Al homogeneizar, su matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyo polinomio característico resulta ser

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2(-\lambda) - (1-\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 1.$$

En general no supondremos que sabemos resolver polinomios de tercer grado, pero en este caso, de la expresión intermedia es claro que se puede factorizar el factor lineal $(1-\lambda)$ para obtener

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)\left(\lambda^2 - \lambda - 1\right).$$

Tenemos entonces que una raiz del polinomio característico (o valor propio de A) es 1. Cuyo vector propio asociado es $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, correspondiendo al hecho de que al transladar el círculo en el eje x, el plano de simetría del cono gira sobre el eje y. Las otras dos raizes son, usando la fórmula clásica para ecuaciones de segundo grado,

$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

El primer valor propio, $\rho := \left(1+\sqrt{5}\right)/2$, es la famosa *razón áurea* y el segundo la, no tan famosa, solución negativa del polinomio áureo $\lambda^2 - \lambda - 1$, que resulta ser $-\rho^{-1}$ pues

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1-5}{4} = -1.$$

Para encontrar un vector propio para ρ debemos resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 1-\rho & 0 & -1 \\ 0 & 1-\rho & 0 \\ -1 & 0 & -\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que nos da, usando el truco del compadre ortogonal en el primer renglón de la matriz con la primera y tercera coordenadas,

$$\mathbf{u}_1 := (1, 0, 1-\rho).$$

Efectivamente, del polinomio áureo tenemos que $1 = \rho^2 - \rho$, así que $\rho^{-1} = \rho - 1$; y por lo tanto

$$A\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1-\rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\rho^{-1} \end{pmatrix} = \rho\,\mathbf{u}_1.$$

Así que el plano de simetría del cono tiene pendiente $-\rho^{-1}$. En este plano trasladado ortogonalmente fuera del orígen (pensado ahora cómo ojo) se proyecta la visión más franca y simétrica del círculo, "ver a este de frente" es proyectarlo en aquel. Con las coordenadas euclidianas que nos dan los vectores propios normalizados el círculo se ve (desde el orígen) cómo la elípse

$$\rho\, x^2 + y^2 - \rho^{-1} = 0,$$

o bien, multiplicando por ρ,

$$\rho^2 x^2 + \rho\, y^2 = 1$$

en el plano paralelo al plano de simetría (generado por $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{e}_2$) y a distancia uno del orígen. Esta es la elipse "visual" por decirlo así.

No es dificil ver que un vector propio para el valor propio $-\rho^{-1}$ es $\mathbf{u}_3 := (\rho^{-1}, 0, 1)$, de tal manera que el centro de la elipse visual, que esta justo en esta dirección, está en proporción áurea con el centro del círculo real.

En particular, este ejemplo demuestra que el centro, aunque es un invariante afín de las cónicas, no es un invariante proyectivo. Es decir, proyectivamente no está bien definido, pues con una simple traslación, el eje de simetría del cono se mueve de lugar, lo que era un cono circular se vuelve un cono elíptico y su centro cambia.

EJERCICIO 7.13 Considera al círculo unitario trasladado una distancia $t \geq 0$ a lo largo del eje x (en el ejemplo desarrollamos el caso $t = 1$). Encuentra los ejes de simetría del cono correspondiente y sus valores propios.

7.4.3 Reducción final

Teniendo el Teorema de Diagonalización en nuestras manos, podemos dar una demostración alternatica del Teorema de Clasificación 7.2.1. Simplemente se reduce a convertir una matriz diagonal

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

en una de ceros, unos y menos unos. Esto ya no se puede hacer con ortogonales, pero se logra facilmente reescalando los ejes coordenados. Suponiendo que es no degenerada (las tres λ's distintas de cero), la matriz de cambio de escalas que lo logra es

$$B = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & |\lambda_2|^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & |\lambda_3|^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Pues es fácil ver que entonces $B^\top AB$ es, salvo permutación de las variables y signo, una de las matrices no degeneradas del Teorema 7.2.1.

7.5 Clasificación en $\mathbb{P}^3$ y en $\mathbb{R}^3$

7.5.1 Resumen de cónicas en $\mathbb{P}^2$ y en $\mathbb{R}^2$

En resumen, hemos demostrado que hay una única cónica proyectiva no degenerada y no vacia. Las tres cónicas clásicas en el plano aparecen porque hay tres tipos de líneas respecto a una cónica dada: las que no la intersectan; las que la tocan en un sólo punto, llamadas las *tangentes*, y las que la intersectan en dos puntos. Correspondiendo al hecho de que los polinomios cuadráticos en una sola variable tienen o dos raices complejas, o una real de multiplicidad dos o bien, dos raices reales. Cuando una recta se manda al infinito para obtener una carta afín, dependiendo de qué tipo de recta es respecto a una cónica dada, esta se convierte correspondientemente en elipse, parábola o hipérbola.

7.5.2 Dimensión 3

Sin entrar en todos los detalles, podemos plantear un programa para clasificar superficies cuadráticas en $\mathbb{P}^3$ y en $\mathbb{R}^3$. En $\mathbb{R}^3$, una superficie cuadrática son los ceros de un polinomio de grado dos en tres variables. A este se le hace corresponder un polinomio homogéneo de grado dos en cuatro variables cuyos ceros definen una superficie cuadrática en $\mathbb{P}^3$. A cualquier polinomio homogéneo de grado dos (o forma cuadrática) en cuatro variables se le asigna de manera única una matriz simétrica A de 4×4, de tal manera que se escribe

$$P(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x}$$

donde ahora $\mathbf{x}^\top = (x, y, z, w)$.

Clasificar proyectivamente equivale a encontrar formas canónicas a las cuales se pueden reducir utilizando la acción de $\mathbf{Gl}(4)$ dada por $A \mapsto B^\top AB$ con $B \in \mathbf{Gl}(4)$. Primero se estudia el caso particular de matrices ortogonales ($\mathbf{O}(4)$) que cumplen $B^\top = B^{-1}$ donde esta acción equivale a escribirlas en otra base, y el problema es encontrar valores y vectores propios. Por lo que hicimos, el problema se reduce a encontrar un valor propio real, o bien, algún subespacio invariante para aplicar lo que ya sabemos ahí (inducción). Si suponemos que las matrices simétricas son diagonalizables por cambio de base ortonormal (a todas luces plausible, y además cierto en cualquier dimensión aunque en este libro no le demos espacio para demostrarlo), entonces con un simple cambio de escala, una posible permutación de variables y, si fuera necesario, multiplicando por -1, obtenemos que la matriz A es alguna de las siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

o bien es degenerada, es decir, una de las del Teorema 7.2.1 con una columna y un renglón más de puros ceros.

La primera es una forma cuadrática definida que define al vacio en $\mathbb{P}^3$ (y al orígen en $\mathbb{R}^4$). La segunda define a la esfera unitaria en el $\mathbb{R}^3$ canónico $w = 1$, el caso análogo de la cónica no degenerada en $\mathbb{P}^2$, que podríamos llamar *elipsoide*. Pero tenemos un caso nuevo, la tercera que define un *hiperboloide reglado*. Así que en $\mathbb{P}^3$ hay dos tipos de cónicas no degeneradas.

La clasificación en $\mathbb{R}^3$ surgira entonces de como se relaciona un plano, que mandaremos al infinito, con la superficie.

De la elipsoide proyectiva surgen tres superficies. Cuando el plano no la toca tenemos un *elipsoide* comun y corriente. Cuando el plano es tangente, se obtiene un *paraboloide* que se aproxima al infinito en una dirección dada y las secciones con planos ortogonales son elipses similares. Y finalmente, cuando el plano corta al elipsoide obtenemos el *hiperboloide de dos hojas*.

Del hiperboloide reglado obtenemos dos superficies. Cuando el plano al infinito lo corta en una cónica no degenerada y nos da el "equipal", también conocido como *hiperboloide de una hoja*. O cuando el plano al infinito es tangente a él y lo intersecta justo en dos rectas, una cónica degenerada, y entonces, en el afín, vemos un *paraboloide hiperbólico*.

7.5.3 Superficies regladas

7.5.4 Idea de la clasificación general