# Capítulo 8

# Geometría Hiperbólica

Si bien la geometría hiperbólica se desarrolló de manera abstracta en el estudio del Quinto Postulado (pues surge al negarlo en su forma plural –"son muchas las paralelas a una recta dada que pasan por un punto fuera de ella"–), no fué hasta que se descubrieron modelos analíticos del plano hiperbólico que la comunidad matemática la reconoció. A principios del siglo XIX unos cuantos matemáticos como Lobachevsky y Bolyai sentaron sus fundamentos demostrando sus teoremas fundamentales. Estaban convencidos de su existencia y su solidez lógica, pero estaban también en franca minoria. Se les tachaba de extravagancia o vil locura entre la comunidad científica. Se cuenta inclusive, que matemáticos de renombre, como Gauss, tenían resultados en esa misma dirección pero no los hicieron públicos por temor al descredito. En la segunda mitad de ese siglo empezaron a surgir modelos del plano hiperbólico basados en la geometría euclidiana en dimensión mayor, fué entonces evidente su existencia; si la geometría euclidiana era consistente, también lo sería la hiperbólica. Nuestra presentación será ésta, la analítica, pero que quede este parrafo introductorio como homenaje a sus precursores, a la libertad creativa que los llevo a creer lo increible y demostrarlo; el tiempo les dió la razón.

## 8.1 El plano hiperbólico

Nuestro estudio introductorio de la geometría hiperbólica se basa en la *forma cuadrática de Lorentz*

$$L(\mathbf{x}) = L(x, y, z) := x^2 + y^2 - z^2,$$

cuya matriz simétrica asociada es la *matriz de Lorentz*

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Usamos la misma letra ($L$, de Lorentz, insistamos) para ambas, confiando en que el contexto hará claro a qué nos referimos; inclusive, en su momento, le daremos otro uso y no debería prestarse a confusión.

Tomémonos la libertad de pensar a la forma cuadrática de Lorentz como una norma; como análoga a la norma euclidiana dada por la forma cuadrática $x^2+y^2+z^2$. La gran diferencia es que ahora tenemos vectores de norma negativa o cero. Démosles nombres:

$$\text{Un vector } \ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 \text{ es } \begin{cases} \textit{espacial,} & \text{si} \quad L(\mathbf{x})>0 \ ; \\ \textit{temporal,} & \text{si} \quad L(\mathbf{x})<0 \ ; \\ \textit{luz,} & \text{si} \quad L(\mathbf{x})=0 \ . \end{cases}$$

La nomenclatura viene de la relatividad especial...

Geométricamente, como ya hemos visto, los vectores luz forman el cono sobre $\mathbb{S}^1$ en el plano $z=1$; los temporales están dentro del cono y los espaciales fuera de él.

Llamémos a un vector $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$, *unitario* (o *$L$-unitario* cuando haya que diferenciar con los euclidianamente unitarios) si cumple que $|L(\mathbf{x})|=1$. Tenemos entonces espaciales unitarios ($L(\mathbf{x})=1$) que forman un hiperboloide reglado, y temporales unitarios ($L(\mathbf{x})=-1$) que forman un hiperboloide de dos hojas. La de arriba será nuestro centro de atención.

**Definición 8.1.1** El *plano hiperbólico* es

$$\mathbb{H}^2 := \left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 \mid L(\mathbf{x})=-1\ ,\ \mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_3>0\right\}.$$

Ya tenemos los puntos, que forman lo que coloquialmente llamaremos la "*cazuela hiperbólica*" para enfatizar que vive en $\mathbb{R}^3$. Es claro que localmente es como un plano. Definamos ahora las rectas.

**Definición 8.1.2** Una *recta* del plano hiperbólico es su intersección no vacia con un plano por el origen. Es decir, si $\Pi$ es un plano por el origen tal que $\Pi$ tiene vectores temporales, entonces

$$\ell=\mathbb{H}^2\cap\Pi$$

es una *recta hiperbólica*.

Tuvimos que especificar que la intersección fuera no vacia pues claramente hay planos *espaciales*, es decir, que constan de puros vectores espaciales, como por ejemplo el $z=0$. De tal manera que las rectas hiperbólicas son, vistas en su plano correspondiente, una rama de hipérbola y sus asintotas son la intersección del plano con el cono de luz.

---

EJERCICIO 8.1 Demuestra que si $\mathbf{x}$ no es luz existen exactamente dos vectores unitarios en la recta $[\mathbf{x}]$.

---

### 8.1.1 El modelo proyectivo

La proyección de $\mathbb{R}^3$ menos el origen en el plano proyectivo $\mathbb{P}^2$ lleva, como bien sabemos, al cono de luz al círculo canónico que dibujamos como el unitario, $\mathbb{S}^1$, en la carta coordenada $z = 1$. El plano hiperbólico se proyecta biunivocamente sobre los puntos de su interior (pues una recta temporal intersecta a $\mathbb{H}^2$ en un único punto). En general, cualquier recta no luz tiene exactamente dos vectores $L$-unitarios que son inversos aditivos, si es temporal, uno de ellos está en $\mathbb{H}^2$ y el otro en su reflejado inferior. Podemos entonces identificar a $\mathbb{H}^2$ con el interior del disco unitario, pensado en $\mathbb{P}^2$, y a sus puntos nos referimos como *puntos temporales* o simplemente como puntos del plano hiperbólico. Los *puntos luz* son los del círculo $\mathbb{S}^1$ que, hay que enfatizar, **no** están en el hiperbólico. De manera natural en este contexto, a $\mathbb{S}^1$ se le llama a veces el *círculo al infinito*; sus puntos, aunque no sean parte de $\mathbb{H}^2$ tendran un significado geométrico y un papel que jugar en la geometría hiperbólica. Por último, los puntos de afuera se llamaran *puntos espaciales* que como veremos, aunque no tengan peligro de confundirse con los puntos de $\mathbb{H}^2$ pues están lejos, también entraran al juego y de manera importante. El modelo proyectivo es este que acabamos de describir, pensar a $\mathbb{H}^2$ como subconjunto de $\mathbb{P}^2$. Muy conveniente para hacer dibujos pues no hay que intentar retratar las tres dimensiones de la cazuela hiperbólica; es su retrato desde el origen y apuntando al zenit.

La definición de rectas hiperbólicas se hace nítida ahora, son las intersecciones de rectas proyectivas con el plano hiperbólico. Se les puede llamar *cuerdas* del círculo al infinito, y corresponden a parejas de puntos en él. Desde esta perspectiva, será trivial ver que cumple los axiomas de incidencia.

### 8.1.2 Geometría de incidencia

Por cualesquiera dos puntos de $\mathbb{H}^2$ pasa una única recta: la correspodiente a la que nos da la geometría proyectiva.

Si dos rectas se intersectan es en un único punto, también obvio. Y las rectas se extienden indefinidamente en dos direcciones (hay que insistir en que intrinsecamente no llegan al borde, aunque nosotros, desde fuera, seamos capaces de decir algo más).

Consideremos ahora el problema del quinto postulado. Sea $\ell$ una recta hiperbólica, y $\xi$ un punto fuera de ella. Abusando un poquito de la notación, podemos llamar $\ell$ a la recta proyectiva correspondiente y vemos más allá de los puntos confinados en el hiperbólico. Por cada punto $\eta \in \ell$ que no sea temporal podemos trazar la recta por $\xi$ y $\eta$, denotemósla $\ell_\eta = \rangle\xi, \eta\langle$. Puesto que $\xi \in \ell_\eta$, esta representa un recta hiperbólica que claramente no intersecta a $\ell$ en $\mathbb{H}^2$, puesto que $\ell \cap \ell_\eta = \eta \notin \mathbb{H}^2$. Así que hay todo un “segmento” de rectas hiperbólicas que pasan por $\xi$ y no intersectan a $\ell$. El quinto postulado no se cumple en su parte de unicidad: hay una multitud, que hemos parametrizado por un segmento, de rectas “paralelas”. Pero claramente son de dos tipos, los dos extremos del segmento y los de la muchedumbre de su interior.

Démosles nombres:

$$\text{dos rectas hiperbólicas } \ell \text{ y } \ell' \text{ son} \begin{cases} \textit{concurrentes,} & \text{si} \quad \ell \cap \ell' \text{ es temporal;} \\ \textit{paralelas,} & \text{si} \quad \ell \cap \ell' \text{ es luz;} \\ \textit{ultraparalelas,} & \text{si} \quad \ell \cap \ell' \text{ es espacial .} \end{cases}$$

Si en la geometría euclidiana teníamos dos tipos de haces de rectas, los concurrentes y los paralelos, y en el plano proyectivo sólo teniamos haces concurrentes, ahora, en el plano hiperbólico tenemos tres tipos de haces de rectas. *Haces concurrentes* de todas las rectas que pasan por un punto en $\mathbb{H}^2$; *haces de paralelas* que corresponden a las rectas que pasan por un punto luz, y *haces de ultraparalelas* que estan formados por las rectas por un punto espacial y que ademas intersectan a $\mathbb{H}^2$, las que definen rectas hiperbólicas.

Si parametrizamos el haz proyectivo de rectas por un punto por una recta fuera de ese punto (hay una clara correspondencia $1-1$), entonces las rectas de los haces concurrentes están en correspondencia natural (y biyectiva) con los puntos de una recta proyectiva; los haces de paralelas corresponden a una recta proyectiva menos un punto, es decir, a una recta afín; y los haces de ultraparalelas a los puntos de un intervalo abierto.

## 8.2 La forma bilineal de Lorentz

Recordemos que las dos nociones métricas básicas de distancia y ángulo se definieron tanto en la geometría euclidiana como en la esfércia usando como herramienta al producto interior. Lo que el producto interior es a la forma cuadrática euclidiana, lo será la forma bilineal de Lorentz a la forma cuadrática de Lorentz, y de manera análoga, será fundamental para definir las nociones geométricas básicas en el plano hiperbólico.

Puesto que la fórmula de la forma cuadrática de Lorentz es

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top L\,\mathbf{x} \ ,$$

es muy fácil generalizarla a dos variables en $\mathbb{R}^3$. Definimos, para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$:

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbf{x}^\top L\,\mathbf{y} \ , \tag{8.1}$$

donde $L$ en el lado derecho significa la matriz de Lorentz y del lado izquierdo tiene el nuevo significado de la *forma bilineal de Lorentz*, que es una función de dos variables en $\mathbb{R}^3$ y toma valores en $\mathbb{R}$; es decir, la forma bilineal de Lorentz es una función

$$L : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ .$$

Más explicitamente en coordenadas, si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^\top$, entonces

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3 \ , \end{aligned}$$

de tal manera que

$$L(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \ ,$$

donde ahora en el lado derecho hablamos de la forma bilineal y del izquierdo de la forma cuadrática. Le hemos llamado *bilineal* pues cumple:

**Lema 8.2.1** *Para todo* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ *y* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *se cumple*

$$\begin{array}{rl} \textbf{\textit{i)}} & L(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \lambda L(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \mu L(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ \textbf{\textit{ii)}} & L(\mathbf{z}, \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \lambda L(\mathbf{z}, \mathbf{x}) + \mu L(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \textbf{\textit{iii)}} & L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = L(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \end{array}$$

**Demostración.** Ver Ejercicio 8.2 □

Las dos primeras condiciones son que sea lineal en cada variable al fijar la otra, de allí el nombre de *bilineal* que ya hemos usado. Y la tercera es que es *simétrica*, es decir que las variables se pueden intercambiar. En el capitulo siguiente se explorará en general estas nociones, aplicándolas a cualquier cónica (real o proyectiva), pero por el momento seguiremos con la muy particular forma bilineal de Lorentz para construir la geometría hiperbólica. Aunque pueden leerse los dos capítulos al mismo tiempo, pues avanzan en forma paralela.

---

EJERCICIO 8.2 Demostrar el Lema 8.2.1.

---

### 8.2.1 $L$-ortogonalidad

Lo primero que surge naturalmente del producto interior es la noción euclidiana de ortogonalidad. De igual manera, de la forma bilineal de Lorentz podemos sacar un análogo que tendrá un importante significado geométrico.

**Definición 8.2.1** Dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}$ en $\mathbb{R}^3$ son *$L$-ortogonales* si

$$L(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0.$$

Y podemos definir el *plano $L$-ortogonal* a $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, como

$$\Pi_{\mathbf{v}} := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid L(\mathbf{v}, \mathbf{x}) = 0 \right\}.$$

Veámos que nuestra definición de "plano $L$-ortogonal" es efectivamente un plano en $\mathbb{R}^3$, es decir, que estamos usando el vocablo "plano" de manera adecuada. Puesto que $L$ como matriz es no singular (de hecho $L^{-1} = L$), se tiene que

$$\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \Rightarrow L\mathbf{v} \neq \mathbf{0}.$$

Entonces, como $L(\mathbf{v},\mathbf{x}) = L\mathbf{v}{\cdot}\mathbf{x}$, donde "$\cdot$" sigue siendo el producto interior euclidiano y en la expresión "$L\mathbf{v}$" estamos usando a $L$ como matriz para diferenciarla de la forma cuadrática $L(\mathbf{v})$, tenemos que $\Pi_{\mathbf{v}}$ es el plano (euclidianamente) ortogonal a $L\mathbf{v}$ que es, efectivamente, un plano pues $L\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. De la escencia de esta demostración, podemos extraer algo más.

**Lema 8.2.2** *Cualquier plano por el orígen en $\mathbb{R}^3$ es el plano $L$-ortogonal de algún $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Y además $\Pi_{\mathbf{v}} = \Pi_{\mathbf{u}}$ sí y sólo si $[\mathbf{v}] = [\mathbf{u}]$.*

**Demostración.** Sabemos que cualquier plano por el origen $\Pi$ es euclidianamente ortogonal a algún $\mathbf{v}' \in \mathbb{R}^3$. Sea $\mathbf{v} = L^{-1}\mathbf{v}' = L\mathbf{v}'$, (donde, insistimos, $L$ y por ende $L^{-1} = L$ son usadas como matriz), entonces $\Pi = \Pi_{\mathbf{v}}$. Además, $\Pi_{\mathbf{v}} = \Pi_{\mathbf{u}}$ si y sólo si $[L\mathbf{v}] = [L\mathbf{u}]$ y, como $L$ es no singular, esto sucede si y sólo si $[\mathbf{v}] = [\mathbf{u}]$. $\square$

Pero ahora, a diferencia de la forma bilineal euclidiana (el producto interno), tenemos cosas raras (pero, cómo veremos más adelante, geométricamente afortunadas) como que hay vectores $L$-ortogonales a si mismos.

**Lema 8.2.3** *Dado $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{v}$ es $L$-ortogonal a sí mismo si y sólo si $\mathbf{v}$ es un vector luz.*

**Demostración.** Esta es una simple reformulación de las definiciones. Tenemos que $\mathbf{v}$ es $L$-ortogonal a sí mismo si y sólo si $L(\mathbf{v}) = L(\mathbf{v},\mathbf{v}) = 0$, que, por definición, sucede si y sólo si $\mathbf{v}$ es un vector luz. $\square$

De tal manera que

$$\mathbf{v} \in \Pi_{\mathbf{v}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} \text{ es un vector luz.}$$

Para los vectores temporales se tiene:.

**Lema 8.2.4** *Sea $\mathbf{v}$ un vector temporal, entonces $\Pi_{\mathbf{v}}$ es un plano* espacial*, es decir, todos sus vectores no nulos son espaciales.*

**Demostración.** Sea $\mathbf{u} \in \Pi_{\mathbf{v}}$ tal que $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Tenemos que $[\mathbf{v}] \neq [\mathbf{u}]$ pues de lo contrario $\mathbf{v}$ sería luz por el lema anterior. Entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ generan un plano $\Pi$ formado por todos los vectores de la forma $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Por bilinearidad, simetría y la condición $\mathbf{u} \in \Pi_{\mathbf{v}}$, se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
L(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) &= L(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) \\
&= L(\alpha\mathbf{u}, \alpha\mathbf{u}) + L(\alpha\mathbf{u}, \beta\mathbf{v}) + L(\beta\mathbf{v}, \alpha\mathbf{u}) + L(\beta\mathbf{v}, \beta\mathbf{v}) \\
&= \alpha^2 L(\mathbf{u},\mathbf{u}) + 2\alpha\beta\, L(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \beta^2 L(\mathbf{v},\mathbf{v}) \\
&= \alpha^2 L(\mathbf{u}) + \beta^2 L(\mathbf{v})\,.
\end{aligned}$$

Si $\mathbf{u}$ es temporal o luz, se tiene que $L(\mathbf{u})$ y $L(\mathbf{v})$ son constantes no negativas ($L(\mathbf{v}) < 0$ por hipótesis y estamos suponiendo que $L(\mathbf{u}) \leq 0$). Entonces la forma cuadrática $L$ es no positiva en el plano $\Pi$, pues $\alpha^2, \beta^2 \geq 0$; es decir, $\Pi$ no tiene vectores espaciales. Pero esto es imposible pues no hay planos totalmente contenidos en el cono cerrado de los vectores temporales y los luz. Por lo tanto, todos los vectores no nulos de $\Pi_{\mathbf{v}}$ son espaciales. □

El inverso de este Lema también es cierto, pero su demostración será más elegante cuando veamos esto en el modelo proyectivo. Por el momento, veamos, como consecuencia de este lema, la caracterización de los planos $L$-ortogonales a los vectores luz.

**Corolario 8.2.1** *Sea* $\mathbf{v}$ *un vector luz, entonces* $\Pi_{\mathbf{v}}$ *es el plano tangente al cono de luz que contiene a la recta* $[\mathbf{v}]$*; y todos sus demás vetores son espaciales.*

**Demostración.** Por el Lema anterior, $\mathbf{v}$ no es $L$-ortogonal a ningún vector temporal. Por tanto, $\Pi_{\mathbf{v}}$ está "afuera" del cono de luz pero lo toca en $\mathbf{v}$; y entonces lo toca en la recta $[\mathbf{v}]$. □

Para continuar nuestro estudio de la $L$-ortogonalidad será mucho más fácil, gráfica y conceptualmente, pasar al modelo proyectivo.

### 8.2.2 Polaridad

Dado cualquier punto $\xi$ de $\mathbb{P}^2$ tenemos que $\xi = [\mathbf{v}]$ para algún $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, y que el plano $\Pi_{\mathbf{v}}$ no depende del representante que hayamos escogido (ver Lema 8.2.2). El plano $\Pi_{\mathbf{v}}$ representa una linea recta de $\mathbb{P}^2$ a la que llamaremos la *línea polar* de $\xi$, y la denotaremos por $\xi^{\perp}$. Dicho de otra manera,

$$\xi^{\perp} = [\mathbf{v}]^{\perp} := \left\{[\mathbf{x}] \in \mathbb{P}^2 \mid L(\mathbf{v}, \mathbf{x}) = 0\right\}.$$

Se tiene además que, dados dos puntos $\xi$ y $\eta$,

$$\eta \in \xi^{\perp} \quad \Leftrightarrow \quad \xi \in \eta^{\perp}$$

en cuyo caso diremos que son *ortogonales.* Pero también, por el Lema 8.2.2, para cada recta $\ell$ de $\mathbb{P}^2$, $\ell$ es la linea polar de un único punto que llamaremos su *punto polar*, y denotaremos $\ell^{\perp}$. De tal manera que

$$\left(\xi^{\perp}\right)^{\perp} = \xi\,.$$

Ojo, no hay que confundir la polaridad que estamos definiendo con la dualidad basada en el producto interior (la forma bilineal euclidiana), esta es diferente, está basada en la forma bilineal de Lorentz (y en el Capítulo siguiente veremos que algo similar funciona para cualquier forma bilineal no degenerada). Pero, para facilitar la escritura, hemos ya dejado al prefijo $L$ por la paz.

Al definirse la polaridad usando a la forma bilineal de Lorentz, tiene todo que ver con la geometría del círculo de luz. El Corolario 8.2.1 nos dice que si un punto $\zeta$ es luz, entonces $\zeta^\perp$ es la línea tangente al círculo de luz que pasa por $\zeta$; efectivamente, $\zeta \in \zeta^\perp$ por el Lema 8.2.3, pero todos los demás puntos de $\zeta^\perp$ son espaciales por el Corolario 8.2.1; $\zeta^\perp$ toca al círculo de luz en un único punto, $\zeta$.

También sabemos que si $\xi$ es temporal, entonces su polar $\xi^\perp$ es una recta espacial (Lema 8.2.4). Sabemos calcular su ecuación algebráica; veremos pronto cómo construirla geométricamente.

Nos falta ver cuáles son las lineas polares de los puntos espaciales. Sea $\eta$ un punto espacial. Por estar fuera del cíırulo de luz, el haz de lineas que pasan por $\eta$ se divide claramente en dos segmentos, las que tocan al círculo y las que no. Estos dos segmentos están separados por exactamente dos puntos que corresponden a las tangentes al círculo que pasan por $\eta$; pensando a $\eta$ como ojo que ve, son los límites de lo que ve cómo círculo. Tenemos entonces dos puntos luz, $\zeta_1$ y $\zeta_2$ que llamaremos los *pies* de $\eta$, tales que $\eta \in \zeta_1^\perp$ y $\eta \in \zeta_2^\perp$; es decir, tales que $\eta = \zeta_1^\perp \cap \zeta_2^\perp$. Pero entonces ya tenemos dos puntos de la polar $\eta^\perp$, pues $\eta \in \zeta_1^\perp \Rightarrow \zeta_1 \in \eta^\perp$ y análogamente $\zeta_2 \in \eta^\perp$. Por lo tanto $\eta^\perp$ *es la recta que pasa por los pies de* $\eta$. Hemos demostrado entonces:

**Lema 8.2.5** *La polar de un punto espacial es una línea hiperbólica, y precisamente la que pasa por sus pies.*□

Este lema junto con el 8.2.3 y el 8.2.4, nos dan formalmente los inversos. Puesto que una linea o es espacial o es tangente o es hiperbólica entonces sus polares son, respectivamente, puntos temporales, luz o espaciales.

La construcción anterior nos da también una manera de construir geométricamente a la polar de un punto temporal $\xi$. Hay que tomar cualesquiera dos líneas (hiperbólicas necesariamente) que pasen por $\xi$; para cada una de ellas, de sus dos puntos luz se trazan las tangentes y estas se intersectan en un punto espacial, su polar. Tenemos entonces dos puntos espaciales, la linea que pasa por ellos es la polar de $\xi$.

---

EJERCICIO 8.3 Considera la carta coordenada canónica. ¿Cuál es la recta polar del punto $(1/2, 0)$? ¿del punto $(c, 0)$, con $c \neq 0$? ¿del punto general $(a, b)$? ¿del origen?

EJERCICIO 8.4 Encuentra los pies del punto $(3, 2)$ en el círculo unitario. Los del punto $(a, b)$ (con $a^2 + b^2 > 1$, por supuesto).

EJERCICIO 8.5 Demuestra que dos rectas hiperbólicas se intersectan (dentro de $\mathbb{H}^2$) si y sólo si la recta que pasa por sus polares es espacial.

EJERCICIO 8.6 Decimos que dos rectas hipérbolicas son *ortogonales*, si se intersectan en $\mathbb{H}^2$ y además sus puntos polares son ortogonales. Demuestra que dado un punto y una recta que lo contiene (en el plano hiperbólico) entonces hay una única recta ortogonal que pasa por ese punto.

EJERCICIO 8.7 Demuestra que los haces ultraparalelos estan formados por todas las ortogonales a una recta dada.

EJERCICIO 8.8 Demuestra que dos rectas ultraparalelas tienen una única recta ortogonal común.

---

### 8.2.3 Ternas ortogonales

Hemos visto que para cada punto de $\mathbb{P}^2$ sus puntos ortogonales forman una linea, su polar. Vamos a ver ahora que se pueden encontrar ternas de puntos mutuamente ortogonales. Serán básicas para definir y clasificar las transformaciones hiperbólicas. En el fondo, si $\mathbb{H}^2$ ha de ser una geometría decente, todos sus puntos y sus rectas deben ser equivalentes, es decir, debe ser homogéneo.

Tres puntos $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ en $\mathbb{P}^2$ es una *terna ortogonal* si dos a dos son ortogonales. Un ejemplo obvio, la *terna canónica*, es $[\mathbf{e}_1], [\mathbf{e}_2], [\mathbf{e}_3]$.

Veámos ahora que existen muchas de estas ternas. Consideremos cualquier punto $\xi_3 \in \mathbb{H}^2$; empesamos con el indice tres por analogía con la terna canónica donde $[\mathbf{e}_3]$ es el punto temporal. Tomémos ahora cualquier punto $\xi_2 \in \xi_3^\perp$; ya no es tan general, pero cumple la condición. Y ahora sí, $\xi_1$ queda determinado por

$$\xi_1 = \xi_2^\perp \cap \xi_3^\perp.$$

Esta bien definido pues $\xi_2^\perp \neq \xi_3^\perp$ ya que la primera recta es hiperbólica (contiene a $\xi_1$) y la segunda espacial, y además, por definición, es ortogonal a $\xi_2$ y a $\xi_3$. De hecho, esta terna ortogonal se puede pensar como escoger un punto en el plano hiperbólico, $\xi_3$; y luego un par de rectas, $\xi_2^\perp$ y $\xi_3^\perp$, que pasen por él y que sean ortogonales (ver el Ejercicio 8.2.2).

No es casualidad que nos hayan salido dos puntos espaciales y uno temporal.

**Lema 8.2.6** *Sea $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ una terna ortogonal, entonces dos de los puntos son espaciales y uno es temporal.*

**Demostración.** Por el Ejercicio 8.2.3 ninguno puede ser luz. Puesto que la polar de un temporal es espacial, a lo más uno de ellos es temporal. Finalmente, por el Ejercicio 8.2.3 los tres no pueden ser espaciales, sólo queda como dice el Lema. □

Podemos convenir entonces en que una terna ortogonal $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ tiene como punto temporal al tercero, $\xi_3$. Y pensar también que todas las ternas ortogonales consisten de escoger un punto en el plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ junto con dos rectas hiperbólicas ortogonales que pasan por él.

---

EJERCICIO 8.9 Describe todas las ternas ortogonales que tienen al orígen como punto temporal.

EJERCICIO 8.10 Encuentra una terna ortogonal que tenga al punto $\xi_3 = [1/2 : 1/2 : 1]$ cómo punto temporal; haz un dibujo.

EJERCICIO 8.11 Sea $\zeta$ un punto luz. Demuestra que si $\xi_1$ y $\xi_2$ son ortogonales a $\zeta$ y ortogonales entre sí entonces $\zeta = \xi_1 = \xi_2$.

EJERCICIO 8.12 Demuestra que si $\xi_1$ y $\xi_2$ son dos puntos espaciales ortogonales entonces $\xi_1^{\perp} \cap \xi_2^{\perp}$ es temporal.

EJERCICIO 8.13 Describe geométricamente como construir con regla y compás la terna ortogonales que corresponde a un punto en el disco unitario y un segmento que pasa por él (el compás lo necesitas para trazar ortogonales euclidianas).

## 8.3 El grupo de transformaciones

Teniendo ya una multitud de ternas ortogonales en el proyectivo las subiremos a $\mathbb{R}^3$ para construir ternas $L$-ortonormales y en base a ellas definiremos el grupo de transformaciones hiperbólicas.

Sea $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ una terna ortogonal, donde, como hemos convenido, $\xi_3$ es temporal. A cada uno de estos puntos corresponde una línea por el orígen en $\mathbb{R}^3$, y esta tiene exactamente dos vectores $L$-unitarios. Para $\xi_3$ podremos escoger al que está en la cazuela hiperbólica $\mathbb{H}^2$ (regresamos al modelo original), pero dejémoslo para más adelante pues con los otros dos no podemos evitar la ambiguedad. Sean $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_3$ cualesquiera de estos, es decir, $\mathbf{u}_i$ es $L$-unitario y tal que $\xi_i = [\mathbf{u}_i]$. Por la definición se tiene entonces que

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u}_1) = L(\mathbf{u}_2) &= 1, \\ L(\mathbf{u}_3) &= -1 \\ \text{y} \quad L(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) &= 0 \quad \text{para} \quad i \neq j. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Una terna de vectores que cumpla estas propiedades la llamaremos una *base $L$-ortonormal*. Diremos, en este caso, que la matriz asociada $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ es *$L$-ortogonal*. La maravilla que cumplen, como en el caso de las matrices ortogonales respecto al producto interior, es que al pensarlas como transformación lineal, dejan invariante a la forma bilineal de Lorentz.

**Teorema 8.3.1** *Sea $B$ una matriz de $3 \times 3$, enonces son equivalentes:*

*i)* $B$ *es $L$-ortogonal*
*ii)* $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = L(B\mathbf{x}, B\mathbf{y}) \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$
*iii)* $B^{\top} L B = L$

**Demostración.** Casí por $n$-ésima vez pero ahora con dos variables, hagámos el cálculo de

$$L(B\mathbf{x}, B\mathbf{y}) = (B\mathbf{x})^\top L(B\mathbf{y}) = \mathbf{x}^\top \left(B^\top LB\right)\mathbf{y}.$$

Es claro entonces que (iii) $\Rightarrow$ (ii). Para demostrar el inverso, expresémos la matriz $B^\top LB$ en términos de las columnas de $B$. Sea $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, entonces

$$\begin{aligned}
B^\top LB &= B^\top L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \\
&= B^\top (L\mathbf{u}_1, L\mathbf{u}_2, L\mathbf{u}_3) \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^\top \\ \mathbf{u}_2^\top \\ \mathbf{u}_3^\top \end{pmatrix} (L\mathbf{u}_1, L\mathbf{u}_2, L\mathbf{u}_3) \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^\top L\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1^\top L\mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_1^\top L\mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_2^\top L\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2^\top L\mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_2^\top L\mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_3^\top L\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_3^\top L\mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3^\top L\mathbf{u}_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) & L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) & L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3) \\ L(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1) & L(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) & L(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \\ L(\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1) & L(\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2) & L(\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Puesto que $\mathbf{u}_i = B\mathbf{e}_i$, entonces si se cumple (ii) se tiene que esta última matriz es $L$, y por lo tanto (iii). Por último, obsérvese que las 6 condiciones en nuestra definición de matriz $L$-ortogonal se resumen en que que esta última matriz, es decir $B^\top LB$, es igual $L$; por lo que (i) y (iii) son equivalentes. $\square$

Más que por su demostración, que es muy simple, este Teorema es tal por su fuerza. Nos da un subgrupo de $\mathbf{Gl}(3)$ asociado a la forma bilineal de Lorentz (ver Ejercicio 8.3), que se denota $\mathbf{O}(2,1)$ pues se dice que la forma bilineal de Lorentz tiene *indice* $2,1$ (por el número de mases y menos). Generalizan estos grupos a los grupos ortogonales. Al preservar la forma bilineal de Lorentz, estas matrices preservan los "estratos" de su forma cuadrática. En particular manda vectores luz en vectores luz, temporales en temporales y a los espaciales en ellos mismos. Pero aún más, preservan las superficies de nivel. Nuestro interes está en el subgrupo de las que preservan a la cazuela hiperbólica, y esto es facil de detectar pues la tercera columna, comovector, debe apuntar hacia arriba.

Sea

$$\mathcal{H}(2) := \left\{B \in \mathbf{Gl}(3) \mid B^\top LB = L;\ \ B\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 > 0\right\}.$$

Estas matrices son las $L$-ortogonales que tienen su vector temporal unitario precisamente en $\mathbb{H}^2$; las llamaremos *matrices hiperbólicas.* Forman un grupo (Ejercicio 8.3) de transformaciones lineales de $\mathbb{R}^3$ que mandan a $\mathbb{H}^2$ en sí mismo pues

$$\mathbf{x} \in \mathbb{H}^2 \quad \Rightarrow \quad L(\mathbf{x}) = -1 \quad \Rightarrow \quad L(B\mathbf{x}) = L(B\mathbf{x}, B\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}) = -1;$$

y además $B\mathbf{x}$ tiene tercera coordenada positiva como $B\mathbf{e}_3$, pues el segmento de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{e}_3$ es mandado al segmento de $B\mathbf{x}$ a $B\mathbf{e}_3$ y en este la forma cuadrática de Lorentz es estrictamente negativa y por lo tanto no cruza el cono de luz.

Este grupo $\mathcal{H}(2)$, que llamaremos de *transformaciones hiperbólicas* será el grupo de isometrías de $\mathbb{H}^2$. Pero nos aguantamos las ganas de llamarle $\mathbf{Iso}(\mathbb{H}^2)$, pues no hemos definido la métrica (distancias y ángulos). De hecho, procederemos al revez, usaremos al grupo para definir estas nociones cuidando de que sean invariantes. Pero antes de entrarle de lleno al toro, veremos algunas de las propiedades de las transformaciones hiperbólicas y algunos ejemplos.

---

EJERCICIO 8.14 Demuestra que para cualquier matriz $A \in \mathbf{Gl}(3)$ se tiene que $G_A := \left\{B \mid B^\top AB = A\right\}$ es un subgrupo de $\mathbf{Gl}(3)$; obsérvese que también hay que demostrar que los elementos de $G_A$ son matrices invertibles. ¿Cuánto vale el determinante de estas matrices?

EJERCICIO 8.15 Demuestra que $\mathcal{H}(2)$ es un grupo.

EJERCICIO 8.16 ...$\mathbf{O}(1,1)$

EJERCICIO 8.17 Dada una matriz

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Demuestra que $B^\top LB = L$ si y sólo si

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \\ -a_3 & -b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 8.18 Exhibe una transformación hiperbólica que mande al punto $[1/2, 1/2, 1]$ en el orígen.

---

## 8.3.1 Transitividad

Veamos primero que $\mathcal{H}(2)$ hace homogéneo a $\mathbb{H}^2$. Pensemos en el modelo proyectivo. Hemos visto que cualquier $\xi \in \mathbb{H}^2$ se puede extender a una terna ortogonal y que esta se puede levantar a bases hiperbólicas. De hecho se levanta a 4 de ellas: si $\eta_1, \eta_2, \xi$ es la terna, $\xi$ tiene un levantamiento único a $\mathbf{u}_3$ en la cazuela hiperbólica; $\eta_1$ se puede levantar a dos unitarios espaciales, $\pm\mathbf{u}_1$ digamos, y análogamente $\eta_2$ se levanta a $\pm\mathbf{u}_2$; podemos entonces escoger cuatro matrices en $\mathcal{H}(2)$. Cualquiera de ellas manda al "orígen" de $\mathbb{H}^2$, es decir al punto $\xi_0 := [\mathbf{e}_3]$ en el punto $\xi$. Esto nos dice que para cualquier $\xi$ existe $f \in \mathcal{H}(2)$ tal que $f(\xi_0) = \xi$. Y por lo tanto, para cualquier pareja de puntos existe una transformación hiperbólica que manda uno en el otro (como de costumbre, mandamos a uno, por la inversa, a $\xi_0$ y de aquí, lo mandamos al otro). A esto se le llama que el grupo es *transitivo* en puntos. Pero aún más, como $\eta_1$ representa a una recta por $\xi$, pues $\xi \in \eta_1^\perp$, la recta $[\mathbf{e}_1]^\perp$ va a parar a ella. Así que $\mathcal{H}(2)$ también es transitivo en parejas incidentes punto-recta. Y más aún escoger entre $\mathbf{u}_1$ y $-\mathbf{u}_1$, representa que podemos escoger la dirección en que una recta va a dar en la otra. Finalmente, escoger entre $\mathbf{u}_2$ y $-\mathbf{u}_2$, es escoger si la transformación preserva o invierte orientación (ver Ejercicio **??**). Esto último se puede ver por el determinante, si es 1 (ver Ejercicio 8.3) preserva orientación, y si es $-1$ la invierte.

Sea $\mathcal{H}^+(2)$ el subgrupo de $\mathcal{H}(2)$ de las matrices que preservan orientación. Hemos demostrado lo siguiente.

**Lema 8.3.1** *Hay una biyección entre $\mathcal{H}^+(2)$ y las parejas incidentes de un punto y una recta orientada.*□

---

EJERCICIO 8.19 ¿Cuáles son las cuatro transformaciones hiperbólicas que dejan fija a la terna ortogonal canónica? ¿Cuál es su interpretación geométrica? ¿Cuáles de ellas preservan y cuáles invierten la orientación?

---

### 8.3.2 Rotaciones y ángulos

Veamos ahora ejemplos concretos, empezando por las transformaciones hiperbólicas orientadas que fijan al orígen.

Como se debió concluir en el Ejercicio 8.2.3, las extensiones del origen $\xi_0 = [\mathbf{e}_3]$ a una terna ortogonal tienen como puntos espaciales a dos ortogonales en la recta al infinito, es decir, de la forma $\eta_1 = [a : b : 0]$ y $\eta_2 = [-b : a : 0]$. Al levantarlos a unitarios de tal manera que, juntos, preserven la orientación, obtenemos una matriz

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}^+(2).$$

Que representa a la *rotacion por un ángulo $\theta$ alrededor del origen* (pensando en $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{P}^2$, de la manera canónica). Estas son todas las transformaciones hiperbólicas orientadas que dejan fijo al origen (¡demuéstralo!).

Para obtener las rotaciones en cualquier otro punto $\xi \in \mathbb{H}^2$, usamos el viejo truco de conjugar. Existe alguna matriz $B \in \mathcal{H}^+(2)$ que manda a $\xi$ en $\xi_0$; entonces la *rotación de un ángulo $\theta$ alrededor de $\xi$* debe ser

$$R_{\xi,\theta} := B^{-1} R_\theta B,$$

pues manda a $\xi$ en $\xi_0$; rota ahí, y luego regresa a $\xi$ a su lugar original. Ya podemos definir ángulos en el plano hiperbólico usando a las rotaciones.

Sean $\ell_1$ y $\ell_2$ dos rectas hiperbólicas orientadas que se intersectan en $\xi \in \mathbb{H}^2$. Definimos al *ángulo de* $\ell_1$ *a* $\ell_2$ como la única $\theta$ tal que $R_{\xi,\theta}$ manda a $\ell_1$ en $\ell_2$ con las orientaciones correspondientes. Esta no es una definición muy útil, pues para medir hay que encontrar alguna matriz de $\mathcal{H}^+(2)$ que mande a $\xi$ en el orígen y ahí calcular. Veremos a continuación cómo obtener una tal matriz $B$ mandada a hacer.

---

EJERCICIO 8.20 Demuestra que el ángulo es invariante bajo transformaciones hiperbólicas.

EJERCICIO 8.21 Demuestra que $f \in \mathcal{H}^+(2)$ (pensado como transformaciones proyectivas) tiene un punto fijo en $\mathbb{H}^2$ si y sólo si $f$ es una rotación.

EJERCICIO 8.22 Sea $f \in \mathcal{H}^+(2))$ la rotación de un ángulo $\pi/2$ en el punto $\left(1/\sqrt{2}, 0\right)$. Demuestra que permuta ciclicamente a los puntos $(1,0)$, $\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$, $(-1,0)$ y $\left(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right)$. Recuerda que una transformación proyectiva está determinada por su valor en 4 puntos, así que $f$ ya está. Calculando dónde se intersectan los lados opuestos de este cuadrado encuentra los valores precisos de $f(0,1)$ y $f(-1,0)$.

EJERCICIO 8.23 Usando el Teorema de 4 en 4 (ver ejercicio anterior), demuestra que dado un punto $\xi \in \mathbb{H}^2$ y dos rectas orientadas que pasan por él, hay una única $f \in \mathcal{H}^+(2)$ que deja fijo a $\xi$ y manda una recta en la otra. (Ojo, si las rectas no son ortogonales no hay una permutación cíclica como en el ejercicio anterior; en general tendras que hechar mano de puntos espaciales.)

---

### 8.3.3 Traslaciones

Si el plano hiperbólico ha de ser una geometría con todas las de la ley, debe tener la noción de traslación. Tenemos ya a las rectas, y al caminar sobre ellas, debemos ser capaces de "jalar" a todo el plano junto con nosotros como sucede en los plano euclidiano y proyectivo (el rígido, ese que debió haberse llamado *plano esférico* [1]); al trasladarse uno por geodésicas (las líneas rectas), debemos ser capaces de cargar con nosotros a una pequeña vecindad, "transporte paralelo" que le llaman, o transporte ortogonal en nuestro caso.

Empezemos con un caso particular: trasladar al origen $\xi_0 = (0,0) \in \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{P}^2$. Pero además –como ya sabemos rotar t esto hace a todas las direcciones iguales– podemos escoger la dirección; escojamos al eje $x$.

Sea $\xi = (c, 0)$ con $0 \leq c < 1$. Vamos de $\xi_0$ a $\xi$ (de 0 hacia $c$) en la recta $[\mathbf{e}_2]^\perp =: \eta_2^\perp$. Así que debemos dejar a $\mathbf{e}_2$ en su lugar para que la recta de traslación quede fija. Tenemos entonces que

$$\eta_1 = \xi^\perp \cap \eta_2^\perp = \left(\frac{1}{c}, 0\right)$$

[1] ¡Ojo Roli!: está es la buena nomenclatura, pa' que la introduzcas (y desde hace un buen de Capítulos)

(ver Ejercicio ??) completa la terna ortogonal. Debemos ahora levantar y normalizar nuestra terna y, abusando de la notación (pensando a veces en $\mathbb{R}^2$ como el plano afín canónico en $\mathbb{R}^3$), obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{|L(\xi)|}}(\xi,1) &= \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}(c,0,1) =: \mathbf{u}_3\\
\frac{1}{\sqrt{|L(\eta_2)|}}\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_2 = (0,1,0) =: \mathbf{u}_2\\
\frac{1}{\sqrt{|L(\eta_1)|}}(\eta_1,1) &= \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}(1,0,c) =: \mathbf{u}_1.
\end{aligned}$$

Debemos entonces definir (pensando a $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ como columnas):

$$T_\xi = T_{(c,0)} := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} & 0 & \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} \end{pmatrix}$$

es la *traslación de* $\xi_0$ *a* $\xi = (c,0)$.

Consideremos ahora el siguiente caso, $\xi \in \mathbb{H}^2$ general. Para trasladarse de $\xi_0$ a $\xi$ nos conviene expresar a éste último en coordenadas polares

$$\xi = c\,\mathbf{u}_\theta = c(\cos\theta, \sin\theta),$$

para definir la *traslación de* $\xi_0$ *a* $\xi$ como la conjugación

$$T_\xi := R_\theta T_{(c,0)} R_{-\theta};$$

pues esta rota a la recta $\rangle\xi_0,\xi\langle$ para ponerla en el eje $x$, traslada ahí lo justo y regresa la recta a su lugar.

Consideremos por último el caso general. Dados $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{H}^2$, definimos como la *traslación de* $\xi_1$ *a* $\xi_2$ a

$$T_{\xi_2 \leftarrow \xi_1} := T_{\xi_1} T_{\xi_3} T_{\xi_1}^{-1},$$

donde

$$\xi_3 := T_{\xi_1}^{-1}(\xi_2).$$

De tal manera que $T_\xi = T_{\xi \leftarrow \xi_0}$. Por el Ejercicio 8.3.3, esta definición de traslación es la buena. Sin embargo, la notación es aún ambigua por el Ejercicio 8.3.3. A diferencia del plano euclidiano donde las traslaciones son tales en todo un haz paralelo, las traslaciones hiperbólicas tienen una única recta de traslación que, cómo recta, se queda fija, pero para demostrar esto necesitaremos estudiar otro tipo de transformaciones hiperbólicas en el siguiente parrafo. Por el momento, veámos cómo describir geométricamente a las traslaciones.

Sea $\ell$ una recta hiperbólica, y sea $\eta = \ell^{\perp}$ su punto espacial polar. Consideremos $\xi_0$ un punto fijo $\xi_0 \in \mathbb{H}^2 \cap \ell$. La terna ortogonal que contiene a $\xi_0$ y a $\eta$ es única, se extiende con $\eta_1 = \xi_0^{\perp} \cap \ell$. Al variar $\xi \in \mathbb{H}^2 \cap \ell$, el punto $\xi^{\perp} \cap \ell$ varia en el segmento espacial de $\ell$. Hay una única transformación $B \in \mathcal{H}^+(2)$ que manda a la terna ortogonal de $\xi_0$ en la de $\xi$ y que además preserva la orientación de $\ell$. Esta es la traslación $T_{\xi \leftarrow \xi_0}$. De esta descripción surge otra manera de obtener su matriz. Pero además es claro que al cambiar de punto fijo $\xi_0$ se obtienen las mismas traslaciones, y que nuestra notación es aún mala; la traslación depende de la recta $\ell$, y al orientarla, de un parametro real $t$ que debía ser la distancia.

---

EJERCICIO 8.24 Demuestra que $T_{\xi_2 \leftarrow \xi_1}$ manda a $\xi_1$ en $\xi_2$, que deja a la recta $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle$ fija y que preserva orientación.

EJERCICIO 8.25 Exhibe puntos $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \in \mathbb{H}^2$ tales que $T_{\xi_2 \leftarrow \xi_1} = T_{\xi_4 \leftarrow \xi_3}$.

EJERCICIO 8.26 Sea $\xi_1 = (1/2, 0)$ (donde consideramos a $\mathbb{H}^2$ como subconjunto de $\mathbb{R}^2$ identificado con la carta coordenada canónica de $\mathbb{P}^2$). Demuestra que

$$T_{\xi_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 8.27 Sea $\xi_2 = (0, 1/2)$ y sea $\alpha$ el ángulo de la recta $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle$ (con dirección de $\xi_1$ a $\xi_2$) con la recta $\langle \xi_1, \xi_0 \rangle$ (hacía $\xi_0$). Demuestra que $\alpha < \pi/4$ (calculando que $\cos\alpha = 2/\sqrt{7}$) y por tanto que la suma de los ángulos internos del triángulo $\xi_0, \xi_1, \xi_2$ suman menos que $\pi$.

EJERCICIO 8.28 Calcula $T_{\xi_2}$. Demuestra que $T_{\xi_2} T_{\xi_1} \neq T_{\xi_1} T_{\xi_2}$ calculando a dónde mandan al orígen $\xi_0$. Sean $\xi_{2,1} := T_{\xi_2} T_{\xi_1}(\xi_0)$ y $\xi_{1,2} := T_{\xi_1} T_{\xi_2}(\xi_0)$; haz un dibujo.

EJERCICIO 8.29 Demuestra que

$$T_{\xi_2 \leftarrow \xi_1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -\frac{11}{3} & 8 & \frac{16}{3} \\ -\frac{16}{3} & 4 & \frac{29}{3} \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 8.30 Demuestra que $T_{\xi_0 \leftarrow \xi_2} T_{\xi_2 \leftarrow \xi_1} T_{\xi_1}$ es una rotación $R_\theta$ en $\xi_0$, donde $\theta = 2\alpha - \pi/2$. Concluye que las traslaciones hiperbólicas **no** son un grupo.

EJERCICIO 8.31 Sea $\xi = (a, b) \in \mathbb{H}^2$; sean $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $d = \sqrt{1 - c^2}$. ¿Cuál es la interpretación geométrica de $c$ y $d$? Demuestra que la matriz de la traslación $T_\xi$ es

$$\frac{1}{dc^2} \begin{pmatrix} a^2 + db^2 & ab(1-d) & ac^2 \\ ab(1-d) & da^2 + b^2 & bc^2 \\ ac^2 & bc^2 & c^2 \end{pmatrix}.$$

(Te conviene escribir las rotaciones en términos de $a, b$ y $c$.)

EJERCICIO 8.32 Da un ejemplo de dos rotaciones cuya composición es una rotación. Piensa geometricamente.

EJERCICIO 8.33 Demuestra que $R_{\xi_2,\pi}R_{\xi_1,\pi} = T^2_{\xi_2\leftarrow\xi_1}$.

EJERCICIO 8.34 Demuestra que si $f \in \mathcal{H}^+(2)$ deja fijo a un punto espacial $\eta$ (i.e., $f(\eta) = \eta$), entonces $f$ es una traslación en $\eta^\perp$o una traslación en $\eta^\perp$ seguida de una rotación de $\pi$ en un punto de $\eta^\perp$.

---

### 8.3.4 Traslaciones horocíclicas

Las rotaciones dejan fijos a puntos temporales, las traslaciones a puntos espaciales. A las trasformaciones hiperbólicas orientadas que dejan fijo a un único punto luz las llamaremos *traslaciones horocíclicas.*

Observemos que las traslaciones dejan fijos a dos puntos luz, pues al dejar fija a una línea hiperbólica dejan fijos a sus extremos luz. Las traslaciones horocíclicas sólo dejan fijo a un punto luz y al haz de paralelas por él lo "traslada", es decir, lo mueve sin dejar fijo a nadie.

Para fijar ideas, consideremos al punto luz $\zeta_0 = (0,1)$ (o, proyectivamente, $[0:1:1]$). Queremos construir una traslación horocíclica $f$ *centrada* en $\zeta_0$, es decir, que fija a $\zeta_0$. Entonces debe mandar a su recta polar ($y = 1$) en sí misma, y por tanto debe mandar a $[\mathbf{e}_1] \in \zeta_0^\perp$ (que de hecho es su punto al infinito en la carta coordenada canónica) en un punto de la forma $\eta_c = (c,1)$ para alguna $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ (estamos suponiendo que la transformación no es la identidad). Para fijar ideas, veámos el caso particular $\eta_1 = (1,1)$; el caso general se deja como ejercicio.

La transformación $f$ restringida a la recta proyectiva $\zeta_0^\perp$ es una función de Moebius que deja fijo a $\zeta_0$. Si dejará fijo a algún otro punto, este sería espacial y tendríamos entonces una traslación común y corriente, pero no, queremos construir una traslación horocíclica. La condición $f[\mathbf{e}_1] = \eta_1$ determina entonces por completo a la transformación de Moebius (ver Ejercicio 8.3.4) en la recta $\zeta_0^\perp$. De hecho, si parametrizamos a $\zeta_0^\perp$ por la primera coordenada $x$ (que es lo natural), y abusando un poco de la notación, se obtiene que

$$f(x) = \frac{x}{x+1}. \tag{8.3}$$

Con esta información, ya sabremos, en principio, como calcular la función $f$ en el círculo luz. Dado un punto luz $\zeta^{'}$, su tangente intersecta a la recta $\zeta_0^\perp$ en el punto $\left(\zeta^{'}\right)^\perp \cap \zeta_0^\perp$ que corresponde a una $x$; al aplicar $f$, tangentes deben ir en tangentes, así que $f(\zeta')$ debe ser un pie de $f(x)$. Pero uno de los pies ya está fijo, es $\zeta_0$, asi que $f(\zeta')$ es el otro. Por ejemplo, el punto $\zeta_\infty := (-1,0)$ es tal que su polar pasa por $[\mathbf{e}_1]$, entonces $f(\zeta_\infty)$ es el otro pie de $\eta_1$, que es precisamente $(1,0)$, llamémoslo $\zeta_1$. Hemos demostrado que

$$f(\zeta_\infty) = \zeta_1 := (1,0).$$

Consideremos ahora a $\zeta_1$. Su polar intersecta a $\zeta_0^{\perp}$ en $\eta_1$, que por (8.3) cumple

$$f(\eta_1) = (\frac{1}{2}, 1).$$

Para calcular el otro pie de este punto, observemos que su polar tiene la ecuación $x + 2y = 2$. Despejando $x$ y sustituyéndola en la ecuación del círculo se obtiene

$$5y^2 - 8y + 3 = 0,$$

a la cuál podemos factorizar, pues conocemos de antemano la solución $y = 1$, para obtener

$$5y^2 - 8y + 3 = (y-1)(5y-3).$$

De donde se deduce, despejando la $x$, que

$$f(\zeta_1) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right).$$

Ya estamos en condiciones de calcular $f([\mathbf{e}_2])$, pues $[\mathbf{e}_2]$ se puede expresar como $\zeta_1^{\perp} \cap \langle \zeta_\infty, \zeta_0 \rangle = \zeta_1^{\perp} \cap [\mathbf{e}_1]^{\perp}$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} f([\mathbf{e}_2]) &= f\left(\zeta_1^{\perp} \cap [\mathbf{e}_1]^{\perp}\right) \\ &= f(\zeta_1)^{\perp} \cap \eta_1^{\perp} \\ &= (2, -1) =: \eta_2, \end{aligned}$$

que se obtiene encontrando la intersección de dos rectas (y dejamos los cálculos al lector). Como también podemos expresar al orígen $\xi_0 = (0,0)$ en términos de puntos conocidos: $\xi_0 = \langle \zeta_\infty, \zeta_0 \rangle \cap \langle \zeta_1, [\mathbf{e}_1] \rangle = [\mathbf{e}_1]^{\perp} \cap [\mathbf{e}_2]^{\perp}$. Obtenemos $f(\xi_0)$ como la intersección de las imágenes de esas rectas y, haciendo los cálculos,

$$f(\xi_0) = \eta_1^{\perp} \cap \eta_2^{\perp} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}).$$

Levantando y normalizando la terna ortogonal para que preserve orientación, se obtiene la matriz que define a $f$:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Se puede ver que efectivamente es una traslación horocíclica demostrando que tiene como único punto fijo a $\zeta_0$. Como ya conocemos a un vector propio de $H_1$, el $(0,1,1)$ correspondiente a $\zeta_0$, cuyo valor propio es 1, se puede factorizar su polinomio característico y resolverse. Resulta ser $-(\lambda - 1)^3$, así que tiene un único valor propio. Es fácil ver que el sistema de ecuaciones lineales para encontrar los vectores propios tiene como únicas soluciones a la recta $(0, t, t)$. Por tanto $H_1$ representa a una traslación horocíclica.

Hemos demostrado que existen las traslacones horocíclicas; y parece ser claro que corresponden a las transformaciones de Moebius de una recta tangente al círculo luz que tienen como único punto fijo al de tangencia (ver Ejercicios 8.3.4 y 8.3.4). Veremos en la siguiente sección que esto no es casualidad. Por el momento concluyamos con que hemos descrito a todas las transformaciones hiperbólicas orientadas.

**Teorema 8.3.2** *Sea $f \neq \mathrm{id}$ una transfomación hiperbólica que preserva orientación, entonces $f$ es una rotación, una traslación o una traslación horocíclica.*

**Demostración.** Nótese primero que hay que evitar a la identidad pues esta califica para las tres clases. Sea $B \in \mathcal{H}^+(2)$ la matriz asociada a $f$. Puesto que toda matrz de $3 \times 3$ tiene al menos un vector propio, entonces $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tiene un punto fijo. Si este punto fijo es temporal entonces es una rotación.

Supongamos ahora que el punot fijo $\eta$ es espacial. Sean $\zeta_1$ y $\zeta_2$ los pies de $\eta$. Como $f(\eta) = \eta$, estos pies van en sí mismos. Si se quedan fijos, i.e., $f(\zeta_i) = \zeta_i$, entonces $f$ es una traslación. La única otra posibilidad es que $f$ los permute. En este caso, consideremos a la función $f$ restringida a la recta $\eta^\perp$. Es una transformación de Moebius ahí, que permuta dos puntos pero manda a los dos segmentos (el temporal y el espacial) en sí mismos. Por el Ejercicio 8.3.4, tiene un punto temporal fijo y entonces es una rotación de $\pi$ en ese punto.

Finalmente, si el único punto fijo es luz, $f$ es por definición una traslación horocíclica. □

---

EJERCICIO 8.35 Demuestra que si una transformación hiperbólica deja fijos a dos puntos luz entonces es una traslación.

EJERCICIO 8.36 Para los siguientes ejercicios vamos a necesitar algo de transformaciones de Moebius. Demuestra que una transformación afín sin puntos fijos es una traslación. Concluye que si una transformacion de Moebius tiene como único punto fijo al 0 entonces es de la forma $\frac{cx}{x+c}$ para algún $c \neq 0$, que es la imagen del infinito.

EJERCICIO 8.37 Encuentra, como calentamiento para el caso general, la traslación horocíclica alrededor de $\zeta_0 = (0,1)$ que manda a $[\mathbf{e}_1]$ en el punto $(2,1)$. Sigue los pasos del ejemplo en el texto.

EJERCICIO 8.38 Demuestra que la traslación horocíclica centrada en $\zeta_0 = (0,1)$ que manda a $[\mathbf{e}_1]$ en el punto $\eta_1 = (c,1)$ tiene como matriz a

$$H_c = \frac{1}{2c^2}\begin{pmatrix} 2c^2 & -2c & 2c \\ 2c & 2c^2-1 & 1 \\ 2c & -1 & 2c^2+1 \end{pmatrix}.$$

*EJERCICIO 8.39 Demuestra que el polinomio característico de $H_c$ es $-(\lambda-1)^3$.

EJERCICIO 8.40 Usando al Ejercicio 8.3.4, encuentra una formúla para expresar cualquier traslación horocíclica.

EJERCICIO 8.41 Sea $f$ una transformación de Moebius tal que $f(0) = \infty$, $f(\infty) = 0$ y $f(1) > 0$. Demuestra que existe $x > 0$ tal que $f(x) = x$.

---

### 8.3.5 Transformaciones hiperbólicas y de Moebius (su isomorfismo)

Las transformaciones de Moebius han estado apareciendo como herramienta en nuestro estudio de las transformaciones hiperbólicas, y como ya dijimos, no es casualidad. Esta sección estará dedicada a demostrar lo siguiente.

**Teorema 8.3.3** *El grupo de transformaciones hiperbólicas es isomorfo, como grupo, al de transformaciones de Moebius, es decir,*

$$\mathcal{H}(2) \simeq \mathrm{Pr}\,\mathbf{oy}(1).$$

La idea básica es identificar al círculo al infinito de $\mathbb{H}^2$, que pensaremos, como ya es costumbre, como $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{P}^2$, con una recta proyectiva. De hecho ya lo hemos hecho con bastante exito en la sección anterior tomando, para cada punto luz $\zeta \in \mathbb{S}^1$, la intersección de su tangente $\zeta^\perp$ con la recta tangente $\zeta_0^\perp$ del punto fijo $\zeta_0 = (0, 1)$. Formalizemos esto. Dado $\zeta = (a, b) \in \mathbb{S}^1$ queremos encontrar el punto $\zeta^\perp \cap \zeta_0^\perp$. Sabemos que $\zeta^\perp$ está dado por la ecuación

$$\zeta^\perp : ax + by = 1,$$

mientras que $\zeta_0^\perp : y = 1$. De donde se deduce facilmente que

$$\zeta^\perp \cap \zeta_0^\perp = \left(\frac{1-b}{a}, 1\right).$$

Si parametrizamos de manera natural a $\zeta_0^\perp$ por su primera coordenada obtenemos la función

$$\begin{aligned} \varphi &: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{P}^1 \\ \varphi(a, b) &= \frac{1-b}{a} \end{aligned} \tag{8.4}$$

donde pensamos a $\mathbb{P}^1$ como $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Para calcular la función inversa, sea $(c, 1) \in \zeta_0^\perp$; su polar esta dada por la ecuación

$$cx + y = 1$$

y para intersectarla con $\mathbb{S}^1$ despejamos $y$ y la sustituimos en la ecuación de este último para obtener

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + (1 - cx)^2 - 1 \\ &= \left(1 + c^2\right) x^2 - 2cx \\ &= \left(\left(1 + c^2\right) x - 2c\right) x. \end{aligned}$$

La solución $x = 0$ corresponde a $\zeta_0$ y la que nos interesa nos da, despejando a $y$,

$$\varphi^{-1}(c) = \frac{1}{1 + c^2} \left(2c, 1 - c^2\right).$$

Podemos unificar nuestra notación declarando a

$$\zeta_c := \varphi^{-1}(c),$$

en concordancia con el uso que hemos dado a $\zeta_0, \zeta_1$ y $\zeta_\infty$.

Tenemos ahora que demostrar que al identificar así a $\mathbb{S}^1$ con $\mathbb{P}^1$, se mandan a las transformaciones hiperbólicas en las transformaciones de Moebius. Es decir, que para cualquier $f \in \mathcal{H}(2)$, la transformación $\mu_f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ dada por

$$\mu_f(c) = \varphi(f(\zeta_c))$$

es de Moebius. Y a la inversa, que para cualquier transformación de Moebius $\mu$, existe una transformación hiperbólica $f_\mu$ tal que

$$f_\mu(\zeta_c) = \zeta_{\mu(c)}.$$

Ya hemos avanzado en esto. Para las transformaciones de Moebius que fijan al 0, ya lo hicimos, y las mismas ideas funcionan para el caso general. Demostremos que dada una transformación de Moebius $\mu$, entonces la función

$$\begin{aligned} f_\mu &: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \\ f_\mu(\zeta_c) &= \zeta_{\mu(c)}. \end{aligned}$$

se extiende a una transformación hiperbólica. De nuevo, el punto será encontrar una terna ortogonal adecuada.

Sea $\mu$ una transformación de Moebius cualquiera. Sabemos que está determinada por sus valores en $0, 1$ e $\infty$. Sean entonces $\zeta_0' := \zeta_{\mu(0)}, \zeta_1' := \zeta_{\mu(1)}$ y $\zeta_\infty' := \zeta_{\mu(\infty)}$. Como la terna $L$-ortogonal canónica se define en términos de la "terna de luz" canónica como sigue

$$\begin{aligned} [\mathbf{e}_1] &= \zeta_0^\perp \cap \zeta_\infty^\perp, \\ [\mathbf{e}_2] &= \zeta_1^\perp \cap [\mathbf{e}_1]^\perp, \\ [\mathbf{e}_3] &= [\mathbf{e}_1]^\perp \cap [\mathbf{e}_2]^\perp. \end{aligned}$$

Entonces definimos

$$\begin{aligned}\eta_1 &= (\zeta_0')^\perp \cap (\zeta_\infty')^\perp ,\\ \eta_2 &= (\zeta_1')^\perp \cap \eta_1^\perp,\\ \xi &= \eta_1^\perp \cap \eta_2^\perp .\end{aligned}$$

Esta terna se levanta a cuatro ternas $L$-ortogonales; pero es fácil ver que sólo una de ellas manda a los puntos como queremos pues el cambio de signo en el levantado de $\eta_1$ permuta a $\zeta_1'$ con el otro pie de $\eta_2$, y el cambio de signo en el correspondiente a $\eta_2$ permuta a $\zeta_0'$ con $\zeta_\infty'$. Asi que la $f_\mu \in \mathcal{H}(2)$ que extiende a la terna de luz escogida existe y es única. Pero nos falta demostrar que se extiende en todo $\mathbb{S}^1$ como la transformación de Moebius manda. El caso en que $\mu(0) = 0$ es fácil, pues $f_\mu$ es entonces una función proyectiva de $\zeta_0^\perp$ en sí misma y corresponde a $\mu$ pues coinciden en una terna, y además, como preserva al círculo, manda tangentes en tangentes.

El caso en que $\zeta_0^\perp$ se mueve por $f_\mu$ no es tan obvio, pues hay que regresarla a $\zeta_0^\perp$ por la correspondencia tangencial. Veámos.

Dadas dos rectas $\ell_1$ y $\ell_2$ tangentes a $\mathbb{S}^1$; para cada punto de $\mathbb{S}^1$ su tangente intersecta a $\ell_1$ en $p$, digamos, y a $\ell_2$ en $q$, decimos entonces que $p$ y $q$ se corresponden. Por lo que vimos al principio de esta sección esta es una correspondencia biunívoca que llamaremos *correspondencia tangencial*. Es muy diferente de la proyección desde un punto, y se puede extender a cualquier cónica no degenerada; de hecho, los dibujos clásicos de paraboloides hiperbólicos, o de hilos y clavos estan relacionados con ella. Además cumple lo siguiente.

**Lema 8.3.2** *La correspondencia tangencial es una transformación proyectiva.*

**Demostración.** Es claro que las transformaciones hiperbólicas preservan la correspondencia tangencial. Por tanto podemos escoger a nuestro par de rectas y, por conjugación, será cierto para cualquiera. Consideremos a $\zeta_0^\perp$ y $\zeta_\infty^\perp$ parametrizadas, ambas por la primera coordenada (la segunda es 1 o $-1$ respectivamente). Dado $\zeta = (a, b) \in \mathbb{S}^1$, vimos en (8.4) que le correponde $(1-b)/a$ en $\zeta_0^\perp$. De manera análoga, sustituyendo $y = -1$ en la ecuación de $\zeta^\perp$ se ve que le corresponde $(1+b)/a$ en $\zeta_\infty^\perp$. Mas precisamente, se tiene

$$\begin{aligned}\zeta^\perp \cap \zeta_0^\perp &= \left(\frac{1-b}{a}, 1\right)\\ \zeta^\perp \cap \zeta_\infty^\perp &= \left(\frac{1+b}{a}, -1\right).\end{aligned}$$

Puesto que $\zeta = (a, b) \in \mathbb{S}^1$, se tiene que $a^2 + b^2 = 1$, y entonces

$$\begin{aligned}a^2 &= 1 - b^2\\ a^2 &= (1-b)(1+b)\\ \frac{a}{1+b} &= \frac{1-b}{a}.\end{aligned}$$

Por lo tanto la correspondencia tangencial es $c$ corresponde a $1/c$, que es de Moebius. □

Con esto se concluye la demostración del Teorema.

---

EJERCICIO 8.42 Encuentra las matrices de las transformaciones hiperbólicas que mandan a la terna luz canónica $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_\infty$ respectivamente en

$$\begin{array}{ccc} \left(1/2, \sqrt{3}/2\right), & \left(1/2, -\sqrt{3}/2\right), & (-1,0)\,; \\ (0,1)\,, & (-1,0)\,, & (1,0)\,; \\ (4/5,3/5)\,, & (-4/5,3/5)\,, & (0,-1)\,. \end{array}$$

---

# 8.4 Métrica

Vamos ahora a acabar de definir las nociones básicas de ángulo y distancia en $\mathbb{H}^2$ de tal manera que el grupo las preserve. Conviene de nuevo pensar y hacer las cosas formales en el modelo de la cazuela hiperbólica $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^3$.

## 8.4.1 Ángulos

Ya definimos ángulo en base a las rotaciones. Este en realidad debía ser llamado el *ángulo orientado*. Podemos tomar sus valores entre $-\pi$ y $\pi$ o bien entre $0$ y $2\pi$, pues se definió como el ángulo de la rotación que lleva a una recta en otra. No es simétrico sino antisimétrico pues la inversa de esa rotación (menos el ángulo) nos regresa a la original. Y esta noción que en el orígen coincide con la euclidiana se difuminó a todo $\mathbb{H}^2$ por medio del grupo. Veremos ahora cómo calcular su versión simétrica, con valores entre $0$ y $\pi$, facilmente sin necesidad de transformaciones.

A cada vector $L$-unitario espacial le podemos asociar una recta hiperbólica y la mitad del plano que apunta en su dirección, un hemiplano. De tal manera que al vector unitario inverso se le asocia la otra mitad. El ángulo que vamos a definir es el del "sector" que es la intersección de dos de estos hemiplanos. De tal manera que si se toma el inverso de un vector tengamos el ángulo complementario.

Como las rectas por el orígen corresponden a vectores unitarios en el plano $z = 0$, será cómodo y fácil empezar ahí. Es el ángulo euclidiano entre dos vectores unitarios $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ que se puede expresar en términos del producto interior. Mejor aún, como su tercera coordenada es cero, en términos de su producto de Lorentz:

$$\measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \arccos\left(L\left(\mathbf{u}, \mathbf{v}\right)\right).$$

Cómo de costumbre, para cualquier otro par de vectores espaciales unitarios $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ cuyas rectas se intersectan en un punto $\mathbf{w} \in \mathbb{H}^2$, podemos tomar la traslación de $\mathbf{w}$ a

$\mathbf{e}_3$, llamémosla $\tau_{\mathbf{w}}$, y definir

$$\measuredangle(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \measuredangle(\tau_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}), \tau_{\mathbf{w}}(\mathbf{v})) = \arccos\left(L\left(\tau_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}), \tau_{\mathbf{w}}(\mathbf{v})\right)\right).$$

Como $L(\tau_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}), \tau_{\mathbf{w}}(\mathbf{v})) = L(\mathbf{u},\mathbf{v})$ pues $\tau_{\mathbf{w}} \in \mathcal{H}(2)$, entonces la misma fórmula vale para cualquier par:

$$\measuredangle(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \arccos\left(L(\mathbf{u},\mathbf{v})\right).$$

Y expresa lo que queremos geométricamente.

---

EJERCICIO 8.43 Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores espaciales unitarios. Demuestra que si el plano que generan es espacial entonces $-1 \leq L(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leq 1$.

---

### 8.4.2 Distancias

Ya sabemos trasladar en rectas pero aún no sabemos medir distancias en ellas. Claramente estas dos nociones deben corresponderse; dada una traslación, cada punto en la recta y su imágen deben estar a la misma distancia. Veremos que esto obliga (salvo una constante) a la noción de distancia. Como todas las rectas hiperbólicas son iguales pues ya tenemos al grupo, bastará concentrarnos en una que pasa por el "orígen" $\mathbf{e}_3$ para luego propagar la noción. Las rectas por $\mathbf{e}_3$ de nuevo son todas iguales, se ven como una rama de una hipérbola canónica en $\mathbb{R}^2$, así que simplifiquemos las cosa y estudiemos a esta última.

#### Lorentz en dimensión 2

Por el momento, denotemos por $L$ a la matriz de Lorentz en dimensión 2

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

y usemos $L(\mathbf{u},\mathbf{v})$ y $L(\mathbf{u})$ para denotar, respectivamente, a la forma bilineal y a la forma cuadrática asociada $(x^2 - y^2)$; donde ahora $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Igualmente, usaremos toda la terminología que desarrolamos para el caso de dimensión 3. Una gran diferencia es que ahora hay una correspondencia entre los vectores unitarios temporales y espaciales; ambos son hiperbólas cuadradas, la única diferencia es que una abre hacia el eje $y$ (la temporales) y la otra es "horizontal" (la espacial). Tenemos entonces una clara noción de *compadre L-ortogonal* (análoga a la euclidiana) pues si declaramos, abusando de la notación y esperando que no se confunda con el ortogonal euclidiano,

$$(x,y)^{\perp} = (y,x),$$

claramente se tiene que $L\left(\mathbf{u},\mathbf{u}^{\perp}\right)=0$ y $L(\mathbf{u})=-L\left(\mathbf{u}^{\perp}\right)$. Intercambia temporales por espaciales dejándoles la misma magnitud en valor absoluto. Los vectores luz forman dos rectas, una (la $x=y$) donde el compadre $L$-ortogonal es el mismo vector, y la otra (la $x=-y$) donde es su inverso. El compadre $L$-ortogonal tiene un elegante significado geométrico (análogo también al euclidiano).

**Lema 8.4.1** *Dado* $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2, \mathbf{u}\neq\mathbf{0}$, *entonces* $\mathbf{u}^{\perp}$ *es tangente en* $\mathbf{u}$ *a la curva de nivel de la forma cuadrática* $L$ *que pasa por* $\mathbf{u}$, *es decir, a la cónica* $C_{\mathbf{u}}:=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2 \mid L(\mathbf{x})=L(\mathbf{u})\}$.

**Demostración.** El caso en que $\mathbf{u}$ es un vector luz es obvio por la descripción de $\mathbf{u}^{\perp}$. Supongamos entonces que $L(\mathbf{u})\neq 0$. Para ver cómo intersecta la recta $\left[\mathbf{u}^{\perp}\right]+\mathbf{u}$ a la curva de nivel, tomemos un vector $t\mathbf{u}^{\perp}$ transladado a $\mathbf{u}$ y evaluemos la forma cuadrática:

$$
\begin{aligned}
L\left(t\mathbf{u}^{\perp}+\mathbf{u}\right) &= L\left(t\mathbf{u}^{\perp}+\mathbf{u},t\mathbf{u}^{\perp}+\mathbf{u}\right)\\
&= L\left(t\mathbf{u}^{\perp},t\mathbf{u}^{\perp}\right)+L\left(t\mathbf{u}^{\perp},\mathbf{u}\right)+L\left(\mathbf{u},t\mathbf{u}^{\perp}\right)+L(\mathbf{u},\mathbf{u})\\
&= t^2L\left(\mathbf{u}^{\perp},\mathbf{u}^{\perp}\right)+2tL\left(\mathbf{u}^{\perp},\mathbf{u}\right)+L(\mathbf{u},\mathbf{u})\\
&= t^2L\left(\mathbf{u}^{\perp}\right)+L(\mathbf{u}).
\end{aligned}
$$

Puesto que $L(\mathbf{u})\neq 0$ entonces $L\left(\mathbf{u}^{\perp}\right)\neq 0$, y de la ecuación anterior se deduce que $L\left(t\mathbf{u}^{\perp}+\mathbf{u}\right)=L(\mathbf{u})$, si y sólo si $t=0$. Por tanto, la recta $\left[\mathbf{u}^{\perp}\right]+\mathbf{u}$ intersecta a $C_{\mathbf{u}}$ justo en $\mathbf{u}$ y es entonces su tangente ahí. $\square$

Estudiémos ahora a la rama positiva de temporales unitarios, **la** “recta hiperbólica”

$$\mathbb{H}^1:=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2 \mid L(\mathbf{x})=-1\ ,\ \mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_2>0\right\}.$$

Como en el caso de dimensión 3, tenemos al grupo $\mathbf{O}(1,1)$ de matrices que dejan invariante a la forma bilineal de Lorentz (o bien, tales que $B^{\top}LB=L$ o, equivalentemente, que sus columnas forman una base $L$-ortonormal). Dentro de este, tenemos al subgrupo que manda a $\mathbb{H}^1$ en sí mismo, que llamamos $\mathcal{H}(1)$, y dentro de este al de aquellas que preservan la orientación, $\mathcal{H}^+(1)$. Siguiendo los pasos del caso de dimensión 3, no es dificil ver que este último grupo es precisamente

$$\mathcal{H}^+(1)=\left\{\begin{pmatrix} b & a\\ a & b\end{pmatrix} \mid a^2-b^2=-1\ ,\ b>0\right\}.$$

Para $\mathbf{u}=(a,b)\in\mathbb{H}^1$, dnotemos

$$\tau_{\mathbf{u}}=\tau_{(a,b)}:=\begin{pmatrix} b & a\\ a & b\end{pmatrix},$$

que es la *traslación* que manda al orígen de la recta $\mathbf{e}_2$ en $\mathbf{u}$. Puesto que $\mathbb{H}^1$ es escencialmente una recta, encontrar una distancia en $\mathbb{H}^1$ compatible con estas traslaciones equivale a parametrizar adecuadamente a $\mathbb{H}^1$. Es decir, a encontrar una función

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^1$$

que convierta la suma (las traslaciones en $\mathbb{R}$) en nuestras traslaciones hiperbólicas. Debe cumplir entonces que

$$f(t+r) = \tau_{f(t)}(f(r)).$$

En particular, como la traslación por 0 es la identidad, debe cumplir que

$$f(0) = \mathbf{e}_2$$

pues $\tau_{\mathbf{e}_2}$ es la identidad. Pero además, si expresamos a $f$ en coordenadas, $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ donde $f_1$ y $f_2$ son funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, nuestra condición anterior se expresa como

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} f_1(t+r) \\ f_2(t+r) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_2(t) & f_1(t) \\ f_1(t) & f_2(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_2(t) f_1(r) + f_1(t) f_2(r) \\ f_1(t) f_1(r) + f_2(t) f_2(r) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

De estas dos ecuaciones podemos sacar condiciones diferenciales que deben cumplir las funciones que andamos buscando. Consideremos la segunda, y en base a ella expresemos la derivada de $f_2$ en la forma clásica:

$$\begin{aligned}f_2'(t) &= \lim_{r\to 0}\left(\frac{f_2(t+r) - f_2(t)}{r}\right) \\ &= \lim_{r\to 0}\left(\frac{f_1(t) f_1(r) + f_2(t) f_2(r) - f_2(t)}{r}\right) \\ &= \lim_{r\to 0}\left(\frac{f_1(t) f_1(r) + f_2(t)(f_2(r) - 1)}{r}\right) \\ &= \lim_{r\to 0}\left(\frac{f_1(t) f_1(r)}{r}\right) + \lim_{r\to 0}\left(\frac{f_2(t)(f_2(r) - 1)}{r}\right) \\ &= f_1(t)\lim_{r\to 0}\left(\frac{f_1(r)}{r}\right) + f_2(t)\lim_{r\to 0}\left(\frac{(f_2(r) - 1)}{r}\right) \\ &= f_1(t)\lim_{r\to 0}\left(\frac{f_1(0+r) - f_1(0)}{r}\right) + f_2(t)\lim_{r\to 0}\left(\frac{(f_2(0+r) - f_2(0))}{r}\right) \\ &= f_1'(0)\ f_1(t) + f_2'(0)\ f_2(t).\end{aligned}$$

Pero además queremos que $f$ vaya por la hipérbola $\mathbb{H}^1$ y que pase por su mínimo en el 0, lo cual implica que $f_2'(0) = 0$. Así que se debe cumplir

$$f_2'(t) = f_1'(0)\ f_1(t).$$

De manera análoga se obtiene que

$$f_1'(t) = f_1'(0)\ f_2(t).$$

Al derivar otra vez la primera ecuación y substituir en ella la segunda se obtinene

$$f_2''(t) = (f_1'(0))^2\ f_2(t).$$

De tal manera que sobre $f_2$ hemos recabado los siguientes datos

$$\begin{aligned} f_2(0) &= 1, \\ f_2'(0) &= 0, \\ f_2''(t) &= c^2 f_2(t). \end{aligned}$$

Que para cualquier $c$, son suficientes para construirla. No es este el libro para hacerlo en detalle, pero eurísticamente si determinamos posición y velocidad inicial y damos una regla para la aceleración de acuerdo a la posición, la función debe estar determinada.

### Seno y Coseno hiperbólicos

Normalizando con la constante $c = 1$ que es la más natural, el par de funciones que cumplen todos nuestros requerimientos anteriores son el seno y el coseno hiperbólicos, denotados sinh y cosh respectivamente. Cumplen, en resumen, las condiciones de la siguiente tabla donde la columna de enmedio se refiere a condiciones entre ambas

| | | |
|---|---|---|
| cosh | | sinh |
| | $\cosh^2 t + \sinh^2 t = -1$ | |
| $\cosh 0 = 1$ | | $\sinh 0 = 0$ |
| $\cosh' t = \sinh t$ | | $\sinh' t = \cosh t$ |
| | $\cosh(t+r) = \cosh t\ \cosh r + \sinh t\ \sinh r$ | |
| | $\sinh(t+r) = \cosh t\ \sinh r + \sinh t\ \cosh r$ | |

Estas son las funciones que andamos buscando, juntas nos dan la parametrización

$$t \mapsto \mathbf{u}(t) := (\sinh t, \cosh t)$$

de $\mathbb{H}^1$ que cumple

$$\mathbf{u}(t+r) = \tau_{\mathbf{u}(t)}(\mathbf{u}(r))$$

y que hace a la traslación en $\mathbb{R}$ equivalente a la traslación en $\mathbb{H}^1$. Como función es muy bonita pues su velocidad es su compadre $L$-ortogonal, $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{u}(t)^{\perp}$; y por lo tanto su aceleración, como vector es ella misma, entre más nos alejamos más aceleramos y en la misma dirección. Esto nos dice que las distancias hiperbólicas son muy diferentes de las euclidianas en $\mathbb{H}^1$. Puntos que euclidianamente parecen estar muy lejos hiperbólicamente pueden estar muy cerca, depende de que tan apartados estemos del origen.

Las gráficas de $\cosh t$ y $\sinh t$ aparecen al margen. También la de $\cosh^{-1} t$ que es la que nos dará la distancia. De ella escojemos la rama positiva que tiene sentido solo para $t \geq 1$. La distancia debe ser

$$d\left(\mathbf{u}\left(t\right),\mathbf{u}\left(r\right)\right) = \left|t-r\right|,$$

que, para el orígen $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}\left(0\right)$, nos da

$$d\left(\mathbf{u}_2,\mathbf{u}\left(t\right)\right) = \left|t\right| = \cosh^{-1}\left(\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}\left(t\right)\right)$$

pues la segunda coordenada de $\mathbf{u}\left(t\right)$ es $\cosh t$. Pero esta formula no nos sirve, hay que usar a la forma bilineal de Lorentz en vez del producto interior para poder generalizar. En base a ella también podemos obtener la segunda coordenada. Definimos entonces para $\mathbf{u} \in \mathbb{H}^1$

$$d\left(\mathbf{u}_2,\mathbf{u}\right) = \cosh^{-1}\left(-L\left(\mathbf{u}_2,\mathbf{u}\right)\right).$$

#### Distancia en $\mathbb{H}^2$

Debe ser claro que, regresando a $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^3$, la buena definición de *distancia* de $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ (puntos de $\mathbb{H}^2$) es

$$d\left(\mathbf{u},\mathbf{v}\right) = \cosh^{-1}\left(-L\left(\mathbf{u},\mathbf{v}\right)\right).$$

Claramente es invariante bajo $\mathcal{H}\left(2\right)$ pues estas transformaciones preservan la forma bilineal de Lorentz y entonces la fórmula no cambia. Además, hace justo lo que queremos, pues dados cualesquiera $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{H}^2$ podemos trasladar al orígen con alguna $f \in \mathcal{H}\left(2\right)$ tal que $f\left(\mathbf{u}\right) = \mathbf{e}_3$, entonces

$$\begin{aligned} d\left(\mathbf{u},\mathbf{v}\right) &= \cosh^{-1}\left(-L\left(\mathbf{u},\mathbf{v}\right)\right) \\ &= \cosh^{-1}\left(-L\left(f\left(\mathbf{u}\right),f\left(\mathbf{v}\right)\right)\right) \\ &= \cosh^{-1}\left(-L\left(\mathbf{e}_3,f\left(\mathbf{v}\right)\right)\right); \end{aligned}$$

y $-L\left(\mathbf{e}_3,f\left(\mathbf{v}\right)\right)$ es precisamente la tercera coordenada de $f\left(\mathbf{v}\right)$. Que, vista en el plano vertical correspondiente como $\mathbb{R}^2$, es la segunda coordenada de un punto en $\mathbb{H}^1$, como en el caso anterior.

### 8.4.3 Trigonometría hiperbólica

#### Suma de ángulos en triángulos menor que $\pi$

## 8.5 Modelos de Poincaré y el hemiplano superior

# Capítulo 9

# Cónicas IV (tangentes y polaridad)

## 9.1 Forma bilineal de una cónica

## 9.2 Tangentes y polaridad

### 9.2.1 Teoremas de alineación y concurrencia

## 9.3 Proyección de cónicas

### 9.3.1 Grupo de invariancia