

Introducción Analítica a la Geometría

Javier Bracho

May 6, 2003

Abstract**0.1 Prologo**

Este libro es un texto para el primer nivel universitario. No presupone “cierta madurez” matemática sino que se empeña en crearla, y sólo requiere del estudiante conocimientos mínimos del lenguaje de teoría de conjuntos, además de su esfuerzo. Fué concebido y experimentado en cursos de geometría analítica de primer año de las licenciaturas en matemáticas, física, actuaría y ciencias de la computación; pero puede extenderse a otras áreas.

A principios del Siglo XXI, la geometría –como área de las matemáticas– evade a las definiciones pues sus límites son difusos y sus ramificaciones numerosas. Es, quizás, más bien una sensibilidad al practicar el pensamiento abstracto que un cuerpo bien definido de conocimiento. El título de “geómetra” hoy se lo disputan matemáticos de muy diversas áreas; por dar ejemplos, los que hacen investigación en geometría algebraica, geometría diferencial o geometría discreta se llaman a si mismos “geómetras”, a secas y con soberbio aire excluyente. Además, a cada rato aparecen nuevas sectas de “geómetras” abriendo o bautizando áreas como “geometría computacional”, “geometría simpléctica” o “geometría no conmutativa”, por no hablar del uso del término como calificativo: “topología geométrica”, “convexidad geométrica”, “teoría geométrica de grupos”, “física geométrica”, etc. Quiero dar a entender con esta breve enumeración –que sólo a unos pocos lectores dice algo más que la rimbombancia misma de las palabras– que la Geometría, ahora sí, con mayúsculas, está vivita y coleando; en plena expansión como el resto de la ciencia. Sea lo que fuere, área o sensibilidad, es un motor activo y prolífico en el imponente desarrollo actual de las matemáticas. Es, en fin, una parte medular de la matemática contemporánea y a su vez, como sensibilidad o por sus aplicaciones, la rebasa para ser un preciadísimo bien cultural.

Sin embargo, y en contraste preocupante con este panorama, la educación de la geometría a nivel universitario básico ha quedado estancada y ha sido relegada casi hasta la vacuidad. En muchas universidades, el curso clásico de “geometría analítica” ha desaparecido o se ha integrado a los cursos de cálculo como servicio, pues las cónicas –argumentan– son de nivel bachillerato; y en aquellas donde aún se da, es con programas que parecen ignorar que el Siglo XIX aconteció. Los cursos de “geometría sintética” o “a la griega”, a veces llamados con ironía involuntaria “geometría moderna” –pues tratan de “geometría griega” hecha despues de ellos– también se sienten anquilosados y, en el mejor de los casos, se usan como materias optativas de divertimento histórico-didáctico, desligados por completo del resto del currículo científico. No obstante, se siguen formando géometras pues, como sensibilidad, la geometría es irrefrenable. Los estudiantes que la tienen, aprenden por ósmosis y desarrollan su intuición en otros cursos básicos o intermedios, como el de álgebra lineal o topología, y sólo hasta niveles avanzados de licenciatura vuelven a encontrar “geometrías”, pero siempre con apellidos como “algebraica” o “diferencial”; ya

muy especializadas.

El contraste entre la vitalidad de la geometría en el desarrollo de las matemáticas –su enorme importancia en ellas– por un lado, y por el otro, su magro valor curricular en la formación de científicos y profesionistas –su ausencia en la cultura ciudadana mínima–, obliga a una reflexión seria, sobre todo de parte de los que nos consideramos geómetras.

Para arañar la superficie de esta discusión, tengo que recurrir al balance entre las dos grandes tendencias, fuerzas o procesos que desarrollan la ciencia. Se tiene por un lado a la fuerza creativa o de investigación que la hace avanzar y conquistar nuevo conocimiento. Pero además, hay un proceso de digestión, destilación o decantación en el cual nos vamos quedando con lo fundamental, reprosesando las ideas básicas, limpiando los argumentos centrales, aclarando y simplificando los razonamientos que construyen las grandes teorías; de tal manera que cada generación pueda acceder a ese conocimiento a una edad más temprana y con más profundidad que sus predecesoras.

Durante el siglo XX el proceso de digestión de las matemáticas se centró en sus fundamentos y formalización. Se creó un lenguaje, un estilo y una notación basados en la Teoría de Conjuntos (iniciada por Georg Cantor hacia finales del XIX) que permeó y cambió a todas las matemáticas; desde cómo se le presentan a los párvulos hasta cómo se escriben sus artículos de investigación, pasando, por supuesto, por sus libros de texto y los currículos de todos los niveles de enseñanza. Pecando de simplismo pero, y valga la redundancia, en aras de simplificar mi argumento, permítaseme ubicar a este monumental cambio en el ámbito de lo *simbólico*: “la otra sensibilidad” para enfrentar las matemáticas. Me aventuro a afirmar entonces que la digestión de la geometría quedó rezagada porque la energía intelectual de un siglo no puede desperdigarse demasiado. Pero la marea, como el siglo, está cambiando.

En los últimos 20 o 30 años del Siglo XX, se dió un renacimiento de la geometría del Siglo XIX a nivel de investigación, pero ahora, se está digiriendo rápidamente para permear en la enseñanza. La geometría hiperbólica renació ligada a la topología en dimensiones bajas; la geometría proyectiva revivió como fundamento para desarrollar la visualización por computadora; los grupos geométricos encontraron exitantes aplicaciones en la física, etc. Y en este entorno, nuevos libros de texto han aparecido dándole a la geometría un enfoque más “Kleiniano”. Lo llamo así, porque al concluir el Siglo XIX –en el que se convulsionó la geometría al descubrirse sus versiones no euclidianas– la “Geometría” había dejado de ser una unidad, se había “desvalagado” en múltiples direcciones al parecer divergentes y Felix Klein, en su famosa ponencia del *Programa de Erlangen* y con profundidad visionaria, trató de resumir esta revolución diciendo, a muy grandes razgos, que “la geometría es el estudio de espacios junto con sus grupos de transformaciones”. Ochenta años despues, empezó a plasmarse esta filosofía en textos de nivel medio universitario.

De estos nuevos libros de texto, tuvieron gran influencia sobre mi, y por lo tanto sobre el presente libro, el de E. Rees [??] y el de P. J. Ryan [??], sin embargo presuponen ya una cierta madurez matemática de parte del estudiante;

la filosofía de este libro es esencialmente la misma pero llevada a un nivel más bajo, introductorio. Se desarrolló en los cursos de Geometría Analítica que periódicamente he dado en la Facultad de Ciencias de la UNAM durante 17 años. Con un programa oficial que bien podría datar del Siglo XVIII (la geometría analítica como se entendía entonces), este curso ha ido evolucionando hasta su presente forma. La condición inicial de tener que cubrir un programa basado en el estudio de las cónicas, más que estorbar, acabó dándole una gran consistencia. Pues los problemas que plantean motivan el desarrollo teórico que a su vez, con más herramientas geométricas en mano, permiten entenderlas más profundamente hasta plantear nuevos problemas que a su vez ...

Es frecuente pensar (yo lo hice por demasiado tiempo) que la geometría analítica representa un rompimiento con la geometría griega clásica, presentarla como algo que la supera; o bien, que las geometrías proyectiva e hiperbólica rompen con la euclidiana y que hay que tomar partido por alguna. No. Son todas ellas parte de lo mismo, La Geometría. Para hacer énfasis (quizá excesivo) en ello, gran parte del primer capítulo se dedica a reconstruir la axiomática euclidiana a partir de la de los números reales que es la de la geometría analítica. Parece superfluo, pero da lugar a ejercitar las operaciones vectoriales y la idea de “demostración” en casos sencillos e intuitivamente claros, va construyendo la llamada “madurez matemática” y en los ejercicios, tanto teóricos como numéricos, debe darle al estudiante seguridad y fe en su intuición geométrica. Más adelante, como los planos proyectivo e hiperbólico se construyen, ya no hay necesidad de axiomatizar, vamos sobre terreno firme y los axiomas quedan como observaciones con notas históricas.

Es un hecho que el enfoque (históricamente) original con el que se resuelven los problemas no es siempre el más directo, consiso, claro o elegante. Lo mismo sucede con las grandes Teorías; su enseñanza siguiendo estrictamente su línea de desarrollo histórico no es necesariamente la más profunda, directa o eficiente. Estoy convencido de que la cultura geométrica general, y muy en especial la de los científicos y matemáticos, debe actualizarse con urgencia a tener un rezago de por lo menos un Siglo, no de cuatro. Este libro es fruto de mi esfuerzo para contribuir a ello.

0.1.1 Prologo para el maestro

Aquí falta por escribir un prologo para el maestro. Descripción de los capítulos, de las inovaciones en ellos, de cómo se concatenan y de los conceptos importantes para estudios ulteriores. También de los posibles recorridos y las secciones extras (no necesarias para el cuerpo básico, pero como material interesante para ciertos estudiantes).

0.1.2 Prologo para el estudiante

Rollito sobre cómo leer, como estudiar y los diferentes tipos de ejercicios.

0.1.3 Agradecimientos

En su momento...

Contenido

0.1	Prologo	3
0.1.1	Prologo para el maestro	5
0.1.2	Prologo para el estudiante	5
0.1.3	Agradecimientos	6
1	El Plano Euclidiano	13
1.1	La Geometría Griega	13
1.2	Puntos y parejas de números	15
1.2.1	Geometría Analítica	17
1.2.2	El espacio de dimensión n	18
1.3	El Espacio Vectorial \mathbb{R}^2	19
1.3.1	¿Teorema o Axiomas?	21
1.4	Líneas rectas	25
1.4.1	Coordenadas Baricéntricas	28
1.4.2	Planos en el espacio I	30
1.5	Medio Quinto	34
1.6	Intersección de rectas I	38
1.6.1	Sistemas de ecuaciones lineales	40
1.7	Producto Interior	41
1.7.1	El compadre ortogonal	44
1.8	La ecuación normal de la recta	48
1.8.1	Intersección de rectas II	52
1.8.2	Teoremas de concurrencia	54
1.8.3	Planos en el espacio II	55
1.9	Norma y ángulos	57
1.9.1	El círculo unitario	60
1.9.2	Coordenadas polares	64
1.9.3	Angulo entre vectores	65
1.10	Bases ortonormales	66
1.10.1	Fórmula geométrica del producto interior	68
1.10.2	El caso general	69
1.11	Distancia	70
1.11.1	El espacio euclidiano (primera misión cumplida)	71

1.11.2	Distancia de un punto a una recta	73
1.11.3	El determinante como área dirigida	75
1.11.4	La mediatriz	76
1.11.5	Bisectrices y ecuaciones unitarias	77
1.12	*Los espacios de rectas en el plano	78
1.12.1	Rectas orientadas	79
1.12.2	Rectas no orientadas	80
2	Cónicas I (presentación)	83
2.1	Círculos	84
2.1.1	Tangentes y polares	87
2.2	Elipses	90
2.3	Hipérbolas	93
2.4	Parábolas	94
2.5	Propiedades focales	95
2.5.1	De la parábola	95
2.5.2	De la hipérbola	96
2.5.3	De la elipse	98
2.5.4	Telescopios	99
2.6	*Armonía y excentricidad	99
2.6.1	Puntos armónicos y círculos de Apolonio	100
2.6.2	Excentricidad	104
2.7	*Esferas de Dandelin	106
3	Transformaciones	109
3.1	Funciones y transformaciones	110
3.1.1	Grupos de Transformaciones	112
3.2	Las transformaciones afines de \mathbb{R}	116
3.2.1	Isometrías de \mathbb{R}	118
3.3	Isometrías y Transformaciones Ortogonales	119
3.3.1	Ejemplos	121
3.3.2	Grupos de Simetrías	124
3.3.3	Transformaciones ortogonales	129
3.4	Las funciones lineales	136
3.4.1	Extensión lineal	139
3.4.2	La estructura de las funciones lineales	141
3.5	Matrices	142
3.5.1	Vectores columna	142
3.5.2	La matriz de una función lineal	143
3.5.3	Multiplicación de matrices	146
3.5.4	Algunas familias distinguidas de matrices	147
3.6	El Grupo General Lineal ($\mathbf{GL}(2)$)	153

3.6.1	El determinante	154
3.7	Transformaciones Afines	157
3.7.1	Combinaciones afines (el Teorema de 3 en 3)	159
3.8	Isometrías II	163
3.8.1	Rotaciones y translaciones	164
3.8.2	Reflexiones y “pasos”	166
3.8.3	Homotесias y semejanzas	168
3.9	*Simetría plana	169
3.9.1	El Teorema de Leonardo	169
3.9.2	Grupos discretos y caleidosc6picos	178
3.9.3	Fractales afinmente autosimilares	182
4	C6nicas II (clasificaci6n)	183
4.1	¿Qu6 es clasificar?	183
4.1.1	Clasificaci6n de tri6ngulos	184
4.2	Clasificaci6n de C6nicas	185
4.2.1	Las C6nicas Can6nicas (y algo m6s)	185
4.2.2	Equivalencia de polinomios	187
4.3	Reducci6n de polinomios cuadr6ticos	188
4.3.1	Translaciones (c6mo encontrar el centro)	189
4.3.2	Rotaciones (c6mo encontrar los ejes)	190
4.4	Clasificaci6n Isom6trica	196
4.4.1	Ejemplo	196
4.4.2	Conclusi6n	196
4.5	Clasificaci6n Afín	196
4.5.1	Clasificaci6n homot6tica	196
4.5.2	Conclusi6n	196
5	La Esfera y el Espacio	197
5.1	Planos en \mathbb{R}^3	197
5.2	El producto cruz	199
5.2.1	Intersecci6n de planos	204
5.2.2	El determinante y orientaci6n	206
5.2.3	Sistemas de ecuaciones	207
5.2.4	Dependencia e independencia lineal	209
5.3	La Esfera	211
5.3.1	Geod6sicas	211
6	Geometría Proyectiva	213
6.1	Motivaci6n	213
6.1.1	C6nicas a la griega	213
6.1.2	El problema del pintor	214
6.1.3	El quinto postulado	214

6.2	Proyecciones de rectas en rectas	214
6.2.1	Ejemplo	216
6.3	Transformaciones de Möbius	217
6.3.1	Teorema de 3 en 3	220
6.4	La recta proyectiva y \mathbb{R}^2	223
6.4.1	Proporciones	224
6.4.2	Rectas por el origen	225
6.5	El problema del pintor II	226
6.6	El plano proyectivo	228
6.6.1	Coordenadas homogéneas	228
6.6.2	Rectas proyectivas	229
6.6.3	Axiomas de incidencia y el quinto postulado	230
6.6.4	Parametrización de rectas proyectivas	231
6.7	Modelos del plano proyectivo	232
6.7.1	Completación de \mathbb{R}^2	232
6.7.2	Cartas afines	234
6.7.3	La esfera módulo antípodas	235
6.7.4	Modelos Topológicos	236
6.8	Transformaciones proyectivas	238
6.8.1	Con regla	238
6.8.2	Analíticas	240
6.8.3	El Teorema de 4 en 4	241
6.8.4	Transformaciones afines	243
6.8.5	Teoremas de Desargues y de Pappus	245
6.9	Proyecciones de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^2	247
6.9.1	Realidad virtual	247
6.9.2	Animación por computadora	247
7	Cónicas III (clasificación proyectiva)	249
7.1	Curvas Algebraicas en \mathbb{P}^2	249
7.1.1	Polinomios y su homogeneización	249
7.1.2	Conos y curvas algebraicas proyectivas	252
7.1.3	Equivalencia proyectiva	257
7.2	Formas cuadráticas	259
7.2.1	Clasificación usando a la afín	261
7.2.2	Equivalencia lineal	262
7.3	Diagonalización de matrices simétricas	264
7.4	Geometría de las formas cuadráticas	268
7.4.1	Su simetría	269
7.4.2	Ejemplos	270
7.4.3	Reducción final	272
7.5	Clasificación en \mathbb{P}^3 y en \mathbb{R}^3	272

7.5.1	Resumen de cónicas en \mathbb{P}^2 y en \mathbb{R}^2	272
7.5.2	Dimensión 3	273
7.5.3	Superficies regladas	274
7.5.4	Idea de la clasificación general	274
8	Geometría Hiperbólica	275
8.1	El plano hiperbólico	275
8.1.1	El modelo proyectivo	277
8.1.2	Geometría de incidencia	277
8.2	La forma bilineal de Lorentz	278
8.2.1	L -ortogonalidad	279
8.2.2	Polaridad	281
8.2.3	Ternas ortogonales	283
8.3	El grupo de transformaciones	284
8.3.1	Transitividad	286
8.3.2	Rotaciones y ángulos	287
8.3.3	Traslaciones	288
8.3.4	Traslaciones horocíclicas	291
8.3.5	Transformaciones hiperbólicas y de Moebius (su isomorfismo)	294
8.4	Métrica	297
8.4.1	Ángulos	297
8.4.2	Distancias	298
8.4.3	Trigonometría hiperbólica	302
8.5	Modelos de Poincaré y el hemiplano superior	302
9	Cónicas IV (tangentes y polaridad)	303
9.1	Forma bilineal de una cónica	303
9.2	Tangentes y polaridad	303
9.2.1	Teoremas de alineación y concurrencia	303
9.3	Proyección de cónicas	303
9.3.1	Grupo de invariancia	303