# Tarea I

## Teoría de gráficas

1. (Bondy 1.2.4) Demuestre que hay once gráficacs simples no isomorfas de cuatro vértices.

2. (Bondy 1.2.9) Una gráfica es *$k$-partita* si sus vértices se pueden particionar en $k$ subconjuntos, cada uno independiente (una gráfica es *bipartita* si es 2-partita). Una gráfica es *$k$-partita completa* si es $k$-partita y cualquier par de vértices en particiones distintas son adyacentes. Denotamos por $T_{m,n}$, el *torneo $k$-partito*, a la gráfica $k$-partita completa con $n$ vértices con cada partición teniendo ya sea $[n/m] := \max\{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq n/m\}$ o $\{n/m\} := \min\{y \in \mathbb{Z} \mid y \geq n/m\}$ vértices. Demuestre que

   *a*) $||T_{m,n}|| = \binom{n-k}{2} + (m-1)\binom{k+1}{2}$, donde $k = [n/m]$.

   *b*) Si $G$ es una gráfica $k$-partita completa con $n$ vértices, entonces $||G|| \leq ||T_{m,n}||$, dándose la igualdad sólo si $G \cong T_{m,n}$.

3. (Diestel 1.2) Sea $d \in \mathbb{N}$. El *cubo $d$-dimensional* es la gráfica con vértices $V := \{0,1\}^d$ con una artista entre dos vértices si éstos difieren en exactamente una coordenada. Determine el grado promedio, el número de aristas, el diámetro, el cuello y la circunferencia del cubo $d$-dimensional.

4. (Diestel 1.5) Demuestre que $\text{rad}(G) \leq \text{diam}(G) \leq 2\text{rad}(G)$.

5. (Diestel 1.7) Demuestre que una gráfica conexa $G$ contiene una camino de longitud al menos $\min\{2\delta(G), |G|-1\}$.

6. (Diestel 1.10) Una gráfica $G = (V, E)$ es *$k$-conexa* si $|G| > k$ y para todo $X \subset V$ tal que $|X| < k$, $G - X$ es conexa. Demuestre que toda gráfica 2-conexa contiene un ciclo.

7. (Bollobás 1.14) Demuestre que una gráfica con grado promedio $d$ contiene una subgráfica bipartita (ver ejercicio 2), de grado promedio al menos $d/2$.

8. (Bollobás 1.15) Demuestre que una gráfica de orden $n$ y grado promedio $d$ contiene una subgráfica de orden mayor que $n/2$ y grado máximo a lo más $d$.

9. (Bollobás 1.20) Demuestre que, módulo isomorfismo, existe una única gráfica con sucesión de grados $2, 2, \ldots, 2, 1, 1$.

10. (Bondy 1.3.3) Demuestre que si $G$ es una gráfica simple y los valores característicos de $A$ son todos distintos (i.e. de multiplicidad 1), entonces el grupo de automorfismos de $G$ es abeliano.