Probabilidad I

3^{er} EXAMEN PARCIAL

1. Se ha observado que el número de accidentes diarios en el segundo piso del periférico es una variable aleatoria Poisson(3). ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran al menos 3 accidentes el día de hoy? ¿Cuál sería la respuesta a la pregunta anterior si suponemos que al menos un accidente ocurre el día de hoy?

   Solución. Sea X el número de accidentes diarios en el segundo piso del periférico. Entonces $X \sim Poisson(3)$. Así,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq 3) &= 1 - \mathbb{P}(X < 3) \\
&= 1 - (\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2)) \\
&= 1 - \left(\frac{3^0}{0!}e^{-3} + \frac{3^1}{1!}e^{-3} + \frac{3^2}{2!}e^{-3}\right) \\
&= 1 - \left(e^{-3} + 3e^{-3} + \tfrac{9}{2}e^{-3}\right) \\
&= 1 - \tfrac{17}{2}e^{-3} \\
&= 0.57681
\end{aligned}
$$

   Luego,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq 3 | X \geq 1) &= \mathbb{P}(\{X \geq 3\} \cap \{X \geq 1\}) / \mathbb{P}(X \geq 1) \\
&= \mathbb{P}(\{X \geq 3\}) / \mathbb{P}(X \geq 1) \\
&= \left(1 - \tfrac{17}{2}e^{-3}\right) / (1 - \mathbb{P}(X = 0)) \\
&= \left(1 - \tfrac{17}{2}e^{-3}\right) / \left(1 - e^{-3}\right) \\
&= 0.60703
\end{aligned}
$$

2. La probabilidad de sacar un *full* en el juego del *poker* es aproximadamente 0.0014. Aproxima la probabilidad de que en un total de 1000 manos de *poker* salgan al menos 2 *fulls*.

   Solución. Sea X_n el número fulls que salen al repartir n manos. Entonces $X_n \sim Binomial(n, p)$, donde $p = 0.0014$. Así,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{1000} \geq 2) &= 1 - \mathbb{P}(X_{1000} \leq 1) \\
&= 1 - (\mathbb{P}(X_{1000} = 0) + \mathbb{P}(X_{1000} = 1)) \\
&= 1 - \left((1-p)^{1000} + \tbinom{1000}{1} p (1-p)^{999}\right) \\
&= 1 - \left((0.9986)^{1000} + 1000(0.0014)(0.9986)^{999}\right) \\
&= 0.40826
\end{aligned}
$$

Sabemos que X_{1000} es aproximadamente $Poisson(1000 \times 0.0014) = Poisson(1.4)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{1000} \geq 2) &= 1 - \mathbb{P}(X_{1000} \leq 1) \\
&= 1 - (\mathbb{P}(X_{1000} = 0) + \mathbb{P}(X_{1000} = 1)) \\
&\approx 1 - \left(\tfrac{(1.4)^0}{0!} e^{-1.4} + \tfrac{(1.4)^1}{1!} e^{-1.4} \right) \\
&= 0.40817
\end{aligned}$$

3. Suponga que la función de distribución de X está dada por

$$F(b) = \begin{cases} 0 & b < 0 \\ \frac{b}{4} & 0 \leq b < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{b-1}{4} & 1 \leq b < 2 \\ \frac{11}{12} & 2 \leq b < 3 \\ 1 & b \geq 3 \end{cases}$$

Encuentra $\mathbb{P}(X = i)$ para $i = 1, 2, 3$ y también $\mathbb{P}(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2})$.

Solución. Tenemos que

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X \leq 1) - \mathbb{P}(X < 1) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = \boxed{\tfrac{1}{4}}$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X \leq 2) - \mathbb{P}(X < 2) = \tfrac{11}{12} - \tfrac{3}{4} = \boxed{\tfrac{1}{6}}$$

$$\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(X \leq 3) - \mathbb{P}(X < 3) = 1 - \tfrac{11}{12} = \boxed{\tfrac{1}{12}}$$

Luego tenemos que

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right) = \mathbb{P}\left(X < \frac{3}{2}\right) - \mathbb{P}\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2} - 1}{4} - \frac{\frac{1}{2}}{4} = \boxed{\tfrac{1}{2}}$$

4. Bolas numeradas de la 1 a la N están en una urna. Suponga que $n \leq N$ de ellas son aleatoriamente elegidas sin reemplazo. Sea Y el número más grande seleccionado. Encuentra la función densidad de Y.

Solución. Existen $\binom{N}{n}$ formas distintas de elegir n bolas de la urna. Queremos determinar $\mathbb{P}(Y = i)$ con $i \in \{n, n+1, \ldots, N\}$ (el espacio de estados de Y). El que $Y = i$ quiere decir que una de las bolas está numerada con i y las restantes con números menores a i. Existen $i - 1$ bolas cuyos números son menores a i, y de éstas escojemos $n - 1$, lo cual podemos hacer de $\binom{i-1}{n-1}$ formas distintas. Así, la probabilidad de que $Y = i$, con $n \leq i \leq N$, es

$$\boxed{\mathbb{P}(Y = i) = \tbinom{i-1}{n-1} / \tbinom{N}{n}}$$

5. El diablo apuesta a que al menos una vez sale 666 si se arrojan tres dados un total de n veces. ¿Cuál es la probabilidad de que gane? Más aún, el diablo te invita a que apuestes tu alma a cambio de unos millones con la condición de arrojar los dados al menos 150 veces. ¿Aceptarías? Justifica tu respuesta y...

FELIZ DÍA DE MUERTOS!!! 

Solución. La probabilidad de sacar 666 al arrojar los dados una vez es $p = (1/6)^3$. Si X es el número de veces que sale 666, entonces $X \sim Binomial(n, p)$. Así, la probabilidad de que el diablo gane es

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq 1) &= 1 - \mathbb{P}(X = 0) \\
&= 1 - \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n \\
&= 1 - (1 - (1/6)^3)^n \\
&= 1 - (1 - 1/216)^n
\end{aligned}$$

y entonces

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - (215/216)^n}$$

El diablo tiene *las de ganar* si $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - (215/216)^n > 1/2$. Despejando obtenemos que ésto ocurre si

$$n > \frac{\log(1/2)}{\log(215/216)} = 149.37$$

Como $150 > 149.37$, entonces en efecto el diablo gandalla tiene ventaja si se arrojan los dados al menos 150 veces. Si crees que tu alma vale unos millones apuesta, y si no pus no.