Tarea IV

Probabilidad I

2 de septiembre de 2005

1. Sean A y B dos eventos de probabilidad positiva (es decir, $\mathbb{P}(A) > 0$ y $\mathbb{P}(B) > 0$). Demuestre que si $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$, entonces $\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$ (es decir, si A es independiente de B, entonces B es independiente de A y por lo tanto el ser independiente es una relación *simétrica*.

2. Si un evento A es independiente de si mismo, ¿cuál puede ser su probabilidad $\mathbb{P}(A)$?

3. Una moneda es hechada al aire tres veces consecutivas. ¿Cuál es la probabilidad de que caigan exactamente dos águilas si sabemos que

   a) en el primer volado cayó un sol?

   b) en el primer volado cayó una águila?

   c) en los dos primeros volados cayeron soles?

   d) en los dos primeros volados cayeron águilas?

   e) en el primer volado cayó sol y en el segundo cayó águilda?

4. Una moneda es hechada al aire tres veces consecutivas. Considere los siguientes eventos:

   - $A = \{$Águila en el primer volado$\}$.
   - $B = \{$Sol en el segundo volado$\}$.
   - $C = \{$Águila en el tercer volado$\}$.
   - $D = \{$Los tres volados iguales (tres águilas ó tres soles)$\}$.
   - $E = \{$Exactamente una águila en los tres volados$\}$.

   a) ¿Cuál de los siguientes pares de eventos son independientes?

   1) A y B.
   2) A y D.
   3) A y E.
   4) D y E.

b) ¿Cuál de las siguientes tripletas de eventos son independientes?

   1) A, B y C.
   2) A, B y D.
   3) C, D y E.

5. Sea $\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$. Supongamos que $\mathbb{P}(a) = \mathbb{P}(a) = \frac{1}{8}$ y $\mathbb{P}(c) = \mathbb{P}(d) = \mathbb{P}(e) = \mathbb{P}(f) = \frac{3}{16}$. Considere los eventos $A = \{a, d, e\}$, $B = \{a, c, e\}$ y $C = \{a, c, d\}$. Demuestre que
$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$$
pero que ningún par de éstos eventos son independientes.

6. Si se arroja un dado dos veces, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de sus caras sea mayor a 7 (> 7) si

   a) la primera vez que se arroj sali un 4?
   b) la primera vez que se arroj sali un número mayor que 3 (> 3)?
   c) la primera vez que se arroj sali un 1?
   d) la primera vez que se arroj sali un número menor que 5 (< 5)?

7. Sean A, B y C tres eventos de probabilidad positiva (es decir, $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(B) > 0$ y $\mathbb{P}(C) > 0$). Demuestre que
$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(C \mid A \cap B)$$

8. Suponga que A y B son eventos tales que $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(B \mid A)$, $\mathbb{P}(A \cup B) = 1$ y $\mathbb{P}(A \cap B) > 0$. Demuestre que $\mathbb{P}(A) > \frac{1}{2}$.

9. La urna A contiene 5 bolas rojas y 3 blancas, y la urna B contiene 2 rojas y 6 blancas.

   a) Si se saca una bola de cada urna, ¿cuál es la probabilidad de que las dos sean del mismo color?
   b) Si se sacan dos bolas de cada urna, ¿cuál es la probabilidad de que todas las cuatro bolas sean del mismo color?

10. Cierto proyectil da en el blanco con probabilidad $\frac{1}{3}$ (es decir, una de cada tres veces). ¿Cuántos proyectiles deberán ser lanzados para garantizar un 80 % de probabilidad de pegar en el blanco?