Probabilidad II

EXAMEN I

1. Sea $f\colon \Omega \to E$ una función, y sea $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(E)$ una σ-álgebra de subconjuntos de E (donde $\mathcal{P}(E)$ denota al conjunto potencia de E). Demuestre que
$$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega \mid \text{existe } B \in \mathcal{E} \text{ tal que } A = f^{-1}(B)\}$$
es una σ-álgebra de subconjuntos de Ω, donde
$$f^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in B\}.$$

2. Una urna contiene n bolas blancas y m bolas negras. Sacamos una bola, nos fijamos en su color, y la regresamos junto con c bolas del mismo color. Luego sacamos una segunda bola de la urna. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola haya sido blanca si la segunda fue negra?

3. Sea $(A_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de conjuntos. Demuestre que
$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n} - \liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\{\limsup A_n - \liminf A_n\}}$$

4. Sea $X_n \sim \text{Binomial}(p, n)$ (es decir, $\mathbb{P}(X_n = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$). Demuestre que si $b > 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \leq b) = 0$. (Hint: Use una de las desigualdades de Chebyshev, con $\mathbb{E}(X_n) = np$ y $\sigma^2_{X_n} = np(1-p)$.)

Probabilidad II

EXAMEN I

1. Sea $f\colon \Omega \to E$ una función, y sea $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(E)$ una σ-álgebra de subconjuntos de E (donde $\mathcal{P}(E)$ denota al conjunto potencia de E). Demuestre que
$$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega \mid \text{existe } B \in \mathcal{E} \text{ tal que } A = f^{-1}(B)\}$$
es una σ-álgebra de subconjuntos de Ω, donde
$$f^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in B\}.$$

2. Una urna contiene n bolas blancas y m bolas negras. Sacamos una bola, nos fijamos en su color, y la regresamos junto con c bolas del mismo color. Luego sacamos una segunda bola de la urna. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola haya sido blanca si la segunda fue negra?

3. Sea $(A_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de conjuntos. Demuestre que
$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n} - \liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\{\limsup A_n - \liminf A_n\}}$$

4. Sea $X_n \sim \text{Binomial}(p,n)$ (es decir, $\mathbb{P}(X_n = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$). Demuestre que si $b > 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \leq b) = 0$. (Hint: Use una de las desigualdades de Chebyshev, con $\mathbb{E}(X_n) = np$ y $\sigma^2_{X_n} = np(1-p)$.)