# Tarea I

## Probabilidad II

## 22 de febrero de 2006

**Axiomas de probabilidad**: Problemas #2.4, #2.5, #2.13, #2.16, #2.17

1. (#2.4) Sea $\mathcal{A}$ una $\sigma$-álgebra y $(A_n)_{n\geq 1}$ una suseción de eventos en $\mathcal{A}$. Demuestre que

   *a*) $\liminf_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{A}$

   *b*) $\limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{A}$

   *c*) $\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$

2. (#2.5) Sea $(A_n)_{n\geq 1}$ una suseción de conjuntos. Demuestre que

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n} - \liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\{\limsup A_n - \liminf A_n\}}$$

3. (#2.13) Sean $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Demuestre que

$$\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j)$$

$$+ \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n).$$

4. (#2.16) (Desigualdades de Bonferroni) (Ver tarea 3 del curso probabilidad I).

   Sean $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Demuestre que

   *a*) $\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} (A_i \cap A_j)$

   *b*) $\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=-1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} (A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k)$

5. (#2.17) Suponga que $\Omega$ es un conjunto infinito. Sea $\mathcal{A}$ la familia de subconjuntos finitos o de complemento finito. Demuestre que $\mathcal{A}$ es un álgebra, pero que *no* es una $\sigma$-álgebra.