Tarea II

Probabilidad II

22 de febrero de 2006

En todos los ejercicios el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ está fijo, y A, B, A_n, etc. son elementos de $\mathcal{A}$.

1. (#3.14), (#3.15), (#3.16)
   Una compañía de seguros asegura un número igual de hombres y mujeres conductores. La probabilidad de que un conductor masculino tenga un accidente y reclame en un período de un año es $\alpha \in (0,1)$ y es independiente de lo que ha ocurrido en otros años. Lo mismo pasa para el sexo femenino excepto que la probabilidad es $\beta \in (0,1)$ (en general, $\beta \ggg \alpha$). Suponga que la compañía selecciona a un conductor al azar.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que el conductor seleccionado reclame un seguro este año?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que el conductor seleccionado reclame seguros dos años consecutivos?
   c) Para cada $i = 1, 2$, sea A_i el evento que consiste en un reclamo de un conductor escogido al azar por la compañía en el año i. Desmuestre que $\mathbb{P}(A_2|A_1) \geq \mathbb{P}(A_1)$.
   d) ¿Cuál es la probabilidad de que un conductor femenino haga un reclamo?
2. (#3.18)
   Suponga que $\mathbb{P}(A) > 0$. Demuestre que $\mathbb{P}(A \cap B|A \cup B) \leq \mathbb{P}(A \cap B|A)$.
3. (#3.7)
   Sean $(A_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{A}$ y $(B_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{A}$. Suponga que $A_n \to A$ y $B_n \to B$ (recuerde que $A_n \to A$ quiere decir que $\mathbb{1}_{A_n}(\omega) \to \mathbb{1}_A(\omega)$ para toda $\omega \in \Omega$). Suponga que $\mathbb{P}(B) > 0$ y $\mathbb{P}(B_n) > 0$ para toda $n \geq 1$. Demuestre que
   a) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n|B) = \mathbb{P}(A|B)$
   b) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A|B_n) = \mathbb{P}(A|B)$
   c) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n|B_n) = \mathbb{P}(A|B)$
4. (#3.17)
   Suponga que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son eventos independientes. Demuestre que la probabilidad de que ningún A_n ocurra es menor o igual a $\exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\right)$.
5. (#3.11), (#3.12), (#3.13) (*Urna de Polya*).
   Una urna contiene r bolas rojas y a bolas azules. Se escoje una bola al azar y se regresa a la urna junto con d bolas del mismo color. El experimento se repite indefinidamente.
   a) Encuentre la probabilidad de que la segunda bola sea azul.
   b) Encuentre la probabilidad de que la primera bola haya sido azul si la segunda fue azul.
   c) Sea A_n el evento de que la n^{th} bola es azul. Demuestre que $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B_1)$ para toda $n \geq 1$.
   d) Encuentre la probabilidad de que la primera bola haya sido azul si las n's subsecuentes fueron azules. ¿Cuál es el límite de esta probabilidad cuando $n \to \infty$?