Tarea V

Probabilidad II

12 de abril de 2006

1. Un par de dados son arrojados. Calcule la función generadora de momentos de la suma las caras de los dados. Diferencie para obtener la media y la varianza.

2. La densidad conjunta de X y Y esta dada por

$$f(x,y) = \frac{e^{-x}e^{-y/x}}{x} \qquad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty.$$

   a) Calcule la función conjunta generadora de momentos de X y Y.

   b) Calcule las funciones generadoras de momentos individuales de X y Y.

3. El número de personas que entran en un elevador en la planta baja es una variable aleatoria con distribución Poisson(10). Si hay N pisos sobre la planta baja (PB, 1, 2, ... , N), y cada una de las personas tiene la misma probabilidad de salir del elevador en cualquiera de estos N pisos de manera independiente de las otras perosas, calcule la esperanza del número de paradas que hará el elevador hasta que todas las personas lo abandonen.

4. La densidad conjunta de X y Y está dada por

$$f(x,y) = \frac{e^{-y}}{y} \qquad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty.$$

   Calcule $\mathbb{E}[X^3 \mid Y = y]$.

5. La densidad conjunta de X y Y está dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 4y(x-y)e^{-(x+y)} & 0 \le x < \infty, \quad 0 \le y \le x \\ \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

   Calcule $cov(X,Y)$.

6. ¿Cuántas veces esperarías arrojar un dado antes de que todas sus seis caras aparezcan al menos una ves?

7. Un apostador gana o pierde con probabilidad p y $1-p$ respectivamente. Cuando $p > \frac{1}{2}$, una sistema de apuesta muy popular es conocido como la estrategia de Kelley, la cual consiste en apostar la $(2p-1)$-fracción de la fortuna actual. Calcule la esperanza de la fortuna después de n apuestas si el jugador comienza con una fortuna x y emplea la estrategia de Kelley.

8. El tiempo de vida en horas de un foco es una variable aleatoria con con una función de densidad dada por

$$f(x) = \alpha^2 x e^{-\alpha x} \quad x \ge 0$$

   Calcule la esperanza de vida de un foco.

9. Sea X una variable aleatoria con función generadora de momentos $\phi(t)$ y defina $\Phi(t) = \log \phi(t)$. Demuestre que

$$\Phi''(t)|_{t=0} = var(X).$$

10. Una moneda que cae águila con probabilidad p es arrojada continuamente. Calcule la esperanza del número de veces que la moneda es arrojada hasta obtener un total de r águilas consecutivas.

    Hint. Condicione sobre el tiempo de la primera ocurrencia de un sol para obtener la ecuación

$$\mathbb{E}[X] = (1-p)\sum_{i=1}^{r} p^{i-1}(i + \mathbb{E}[X]) + (1-p)\sum_{i=r+1}^{\infty} p^{i-1} r.$$

    Simplifique y resuelva para $\mathbb{E}[X]$.