4-gráficas tensas y una probadita de topología

Ricardo Strausz*

Generalizando de manera natural algunos conceptos de triangulaciones completas de superficies, se mencionan algunos resultados sobre 4-gráficas —hipergráficas 4-regulares— y se conjetura la existencia de un tipo especial de éstas. Con el nuevo enfoque, se formula una conjetura necesaria para hacer verdadera la de Poincaré.

Preliminares

La herramienta más fuerte en el estudio de las superficies es la característica de Euler, un invariante topológico de índole esencialmente combinatorio. Imagina una gráfica $G = (V, \Lambda)$ dibujada en una superficie Σ de forma que las aristas sólo se crucen en los vértices. Ahora recorta la superficie por las líneas que define el dibujo. Si lo que quedan son puros discos diremos que el dibujo es un *encaje celular* de G en la superficie. El número $\chi = v - a + d$, donde v es la cantidad de vértices, a la de aristas y d la de discos, es un invariante de la superficie que no depende de la gráfica. Surgen las preguntas: dada una superficie ¿qué gráficas la descomponen celularmente? o, dada una gráfica ¿en cuáles superficies la puedo dibujar 'bien'?

Es sabido desde el trabajo de Kuratowsky [1] que la gráfica completa de cinco vértices K_5 no se puede dibujar en el plano al igual que la gráfica completa bipartita $K_{3,3}$, y que ellas están encajadas en cierto sentido topológico en todas las gráficas *no-planas*.

Las gráficas K_5 y $K_{3,3}$ respectivamente

La gráfica completa de orden cinco K_5, si bien no es plana, es möebiana. Más aún, los discos que define son puros triángulos. Las propiedades combinatorias de este encaje pueden quedar contenidas en lo que se conoce como la 3-cadena de orden cinco ${}^3C'_5 = (Z^*_{11}/\{-1, 1\}, \Delta)$, donde Z^*_{11} es el grupo multiplicativo del campo finito de orden once y Δ es una familia de subconjuntos de cardinalidad 3 de éste definido como

$$\Delta = \{[x][y][z] : x \pm y = z\}.$$

${}^3C'_3$ ${}^3C'_5$

Definiciones Básicas

Una *3-gráfica* es un par ordenado (V, Δ) donde V es un conjunto (finito) de vértices o puntos y Δ es una familia de *ternas* o triángulos subconjuntos de V. Una 3-gráfica es un tipo especial de una generalización natural de las gráficas, conocidas como hipergráficas —las aristas en vez de ser pares de vértices, son subconjuntos arbitrarios de éstos.

La *1-traza* de un vértice $v \in V$ en la 3-gráfica ${}^3H = (V, \Delta)$ es una 2-gráfica (o simplemente una gráfica) ${}^2\tau_1(v,\ {}^3H) = (V \setminus v, \Lambda)$, que consta de todos los vértices menos v y de las aristas que junto con v forman un triángulo. i.e., $\Lambda = \{xy : vxy \in \Delta\}$

${}^2\tau_1(v)$

La figura anterior representa una 3-gráfica en gris y la 1-traza del vértice blanco en negro.

Una *3-cadena* (*3-ciclo*) de orden n es una 3-gráfica ${}^3C'_n$ (${}^3C_n$) donde las 1-trazas de sus n vértices son todas cadenas (ciclos). Estos bichos corresponden precisamente a encajes triangulares de gráficas completas de orden n en superficies (cerradas) ya que la "vecindad" de cada vértice es un semidisco (disco) en el que están todos los demás vértices.

${}^2\tau_1(v,\ {}^3C_8)$ ${}^2\tau_1(v,\ {}^3C'_6)$

Las figuras anteriores representan pedazos de un 3-ciclo y una 3-cadena en gris y la 1-traza del vértice blanco en negro.

Los ejemplos más pequeños de estos bichos son el tetraedro y el triángulo:

Definiciones Generalizadas

Una *n-gráfica* es un par ordenado (V, Θ) donde V es un conjunto (finito) de vértices o puntos y Θ es una familia de *n-adas* o simplejos de dimensión $n-1$, subconjuntos de V.

La *r-traza* de un subconjunto $v \subset V$ de cardinalidad r en la n-gráfica ${}^nH = (V, \Theta)$ es una (n-r)-gráfica ${}^{n-r}\tau_r(v,\ {}^nH) = (V \setminus v, \Phi)$, donde $\Phi = \{u \subset V : u \cup v \in \Theta\}$.

Una *n-cadena* (*n-ciclo*) de orden m es una n-gráfica ${}^nC'_m$ (${}^nC_m$) donde las 1-trazas de sus m vértices son todas (n-1)-cadenas ((n-1)-ciclos). Ejemplo de un n-ciclo de orden $n+1$ es la frontera del simplejo de dimensión n, es decir, las n-aristas son todos los subconjuntos de n elementos de un conjunto de $n+1$ vértices. Por el otro lado, si a un n-ciclo le extraemos un vértice obtenemos una n-cadena.

Obsérvese que se puede dar una definición alternativa de n-ciclos generalizando el siguiente lema

${}^4H$ es un 4-ciclo si y sólo si las 2-trazas de todas sus 2-aristas son ciclos.

Para demostrar esto obsérvese que: ${}^2\tau_2(uv,\ {}^4H) =\ {}^2\tau_1(u,\ {}^3\tau_1(v,\ {}^4H))$ ◻

Resultados Clásicos

Existe un 3-ciclo de orden n si y sólo si $n \equiv 0, 1$ (mod 3).

Éste es un resultado básico del trabajo de Ringel [2]. La necesidad es una consecuencia inmediata del número de aristas, $[\frac{n(n-1)}{3}]$, que debe ser un entero; para demostrar la suficiencia se tiene que exhibir un 3-ciclo para cada n. Para ésto, se trabajó dividiendo el resultado en 12 casos para el caso orientable —uno por cada residuo módulo 12— y 6 en el no-orientable.

Existe una 3-cadena de orden n si y solo si $n \equiv 0, 2$ (mod 3).

Si bien antes de [3] parece que nadie se había cuestionado sobre la existencia de 3-cadenas, el anterior es una consecuencia del trabajo de Ringel. Sin embargo queda la pregunta de si existen todos los tipos de 3-cadenas imaginables. i.e., con todas las fronteras, particiones del orden. Por ejemplo, de orden 8 hay tres 3-cadenas con frontera conexa ${}^2C_8$, una con frontera ${}^2C_4 \cup {}^2C_4$ y otra con frontera ${}^2C_5 \cup {}^2C_3$. (cf. [4], [5])

$\mathcal{L}_{17} \cong {}^3C'_{4+4}$ ${}^3C'_{5+3}$

Las figuras anteriores representan las 3-cadenas de orden 8 con frontera disconexa.

Generalizaciones Triviales

Si existe un 4-ciclo de orden n, entonces $n \equiv 1, 2, 4, 5, 8, 10$ (mod 12).

Para demostrar esto basta contar los tetraedros de la información de las trazas y observar que debe ser un número entero. □

Análogamente,

Si existe una 4-cadena de orden n, entonces $n \equiv 0, 1, 3, 4, 7, 9$ (mod 12).

Conjetura: Para cada $n \equiv 1, 2, 4, 5, 8, 10(\mod 12)$ $(\equiv 0, 1, 3, 4, 7, 9)$, existe un 4-ciclo (4-cadena) de orden n.

Generalizaciones no-tan triviales

Existe un 4-ciclo de orden 8. Es único y tenso, i.e., en toda 4-coloración de sus vértices aparece un tetraedro heterocromático.

Existe una 4-cadena de orden 7, única y tensa.

La demostración de estos resultados fue lograda al construir el primer ejemplo no-trivial de un 4-ciclo (*El Cuaco*) y después quitándole un vértice para obtener una 4-cadena (*El Toroespín*). Para la unicidad y la tensión hay que fijarse en las simetrías del bicho y en las particiones de sus vértices. $\square$

Si bien en el estudio de los 3-ciclos con la característica de Euler nos bastaba para saber el género —la complejidad— de la superficie, en el caso de los 4-ciclos no contamos con una clasificación de las 3-variedades. Tratando de entender topológicamente al cuaco, se demostró que su primer grupo de homología es trivial, por ser completo en triángulos (i.e., toda terna está en algún tetraedro); y su tercer grupo de homología es Z, por ser orientable. Pero más aún, en general

El primer grupo de homología de un 4-ciclo es trivial.

Es claro que dado un 4-ciclo ${}^4C_n = (V, \Theta)$ y una terna $\{a, b, c\} \subset V$, el vértice c debe aparecer en alguna posición del ciclo ${}^2\tau_2(ab)$. Por tanto abc está contenido en algún tetraedro de Θ y por tanto abc es un triángulo. Es decir, todo 4-ciclo es completo en triángulos. $\square$

Por otro lado, no es difícil convencerse de que el único 4-ciclo que es variedad, es ${}^4C_5$, la 3-esfera, ya que en general las vecindades de los vértices no son bolas sino superficies con género. De ser cierta la conjetura de Poincaré, sería cierta la siguiente

Conjetura: La única 4-gráfica completa en triángulos que es variedad es el 4-ciclo de orden 5.

Referencias

[1] K. Kuratowski, “Sur le problème des courbes gauches en topologie”. Fund. Math. No. 15, 271-283 (1930)

[2] G. Ringel, “Map Color Theorem”. Springer-Verlag (1974)

[3] J. L. Arocha, J. Bracho y V. Neumann-Lara, “On the minimum size of tight hypergraphs”. J.Graph Theory. Vol. 16, No. 4, 319-326 (1992).

[4] J. L. Arocha, J. Bracho y V. Neumann-Lara, “Tight and untight tringulated surfaces”. J. Combinatorial Theory, ser. B. Vol. 63, No. 2 (1995).

[5] R. Strausz, “Triangulaciones completas de superficies de orden pequeño”. Tesis, UNAM. Por salir.

*Estudiante de la facultad de ciencias de la U.N.A.M. actualmente inscrito en la maestría bajo la tutoría del Dr. Javier Bracho que fue el director de su tesis [5]. También, es becario del IMATE y participó en el seminario el 10 de marzo del año en curso.