

Separoides:
el Complejo de Radon

Ricardo Strausz

September 11, 2001

-1. Índice.

0. Prefacio	...3
1. Introducción	...4
2. Complejos Politopales	...9
3. Grassmannianas	...15
4. Separoides	...19
Nociones Básicas	
El cubo de una familia de subconjuntos	
El complejo de Radon	
El octaedro geométrico	
La demostración del Teorema 4	
5. Matroides Orientados	...29
El criptomorfismo	
El k -dual del n -cubo	
La caracterización de la gráfica de cocircuitos	
6. El circo de 3 pistas	...36
Apéndice	...42
Bibliografía	...46

0. Prefacio.

Durante una cálida mañana de otoño, viajábamos Luis y yo en una camioneta rumbo a La Palapa mientras le platicaba que, la noche anterior, había encontrado una estructura asociada a las configuraciones de cinco puntos en el plano que resultaba ser un ciclo de longitud diez. La construcción era harto complicada y me pidió que esperara a que llegáramos al pizarrón, donde nos esperaba Roli, siempre con un excelente café. Ahí, después de varios minutos, logré explicarles aquella construcción, misma que sería inmediatamente simplificada y generalizada por ese par —ya ven cómo son esos dos cuando trabajan juntos. Al poco rato, Luis habría de enunciar la conjetura que dio lugar a todo esto: *ese complejo es una esfera*. En ese momento Roli me dijo: “si ha de ser cierto que tu construcción siempre da un ciclo cuando $n = d + 3$, tendrás que encontrar una esfera a la cual le quites o le pongas o le hagas algo para que lo que te dé sea el ciclo de tu construcción. Te creo que la pura combinatoria te permita demostrar que es una gráfica regular de valencia 2, pero eso sólo demostraría que es una unión de ciclos. No veo de dónde vas a sacar la conexidad si no comienzas con algo conexo desde el principio y, en el siguiente caso, tendrías que demostrar además que es plana... está cabrón”. A las pocas semanas, teníamos ya la geometría de la demostración de la conjetura de Luis para el caso general. Éste fue el origen de los separoides.

Hay que agradecer al Arocha, su simple presencia. Los mismísimos axiomas fueron escritos por primera vez de su puño y letra... fue en el pizarrón del cubículo de Roli, no podría olvidarlo.

Tengo que decir que, los últimos meses de trabajo en mi tesis hubieran sido imposibles sin la compañía de mi amigo Juancho y la paciencia infinita de Merari.

Pá, carnalitos, Pera, ustedes siempre presentes... gracias.

Finalmente, quisiera dedicar esta tesis a una bola de amiguitos que conocí durante el paro que sufrió nuestra máxima casa de estudios, la Coordinadora de Estudiantes de Posgrado y Sedes de Investigación (o, mejor dicho, a lo que sobrevivió de ella). Pasé con ustedes momentos inolvidables y fue en este periodo de tiempo que conocí mi universidad, e incluso mi país, mejor que nunca antes. Cuenten siempre conmigo.

1. Introducción

La teoría de los matroides orientados fue introducida en los años 60 por J. Folkman y J. Lawrence cuando probaron que todo matroide orientado puede ser pensado como una familia de pseudoesferas [11]. Probaron también que un orden parcial, asociado naturalmente a sus vectores signados, resulta ser la latiz de caras de una esfera. Los ejemplos más claros de la teoría surgen de la geometría combinatoria. Consideremos un conjunto de cinco puntos en el plano

$$\mathcal{P} := \{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_4\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Las primeras imágenes que le vienen a uno a la mente son:

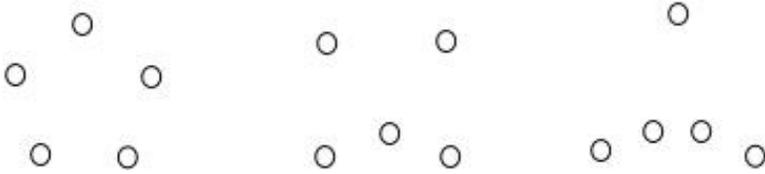


Figura 1. *Cinco puntos en el plano en posición general*

Éstas representan las tres configuraciones de cinco puntos en el plano en posición general. Hay sin embargo otras configuraciones “degeneradas” que siguen teniendo el derecho de considerarse de dimensión 2:

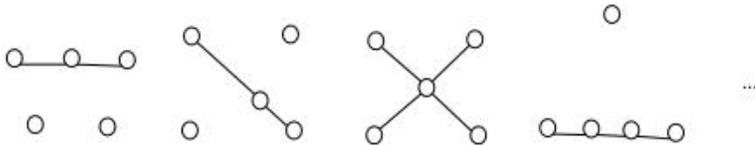
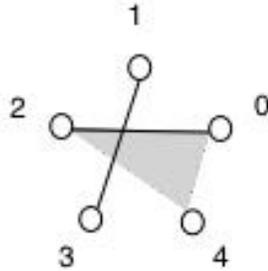


Figura 2. *Cinco puntos degenerados en el plano*

Una pieza fundamental de la teoría es lo que se conoce hoy como el teorema de Radon (1921): *dada una familia de $n \geq d+2$ puntos en \mathbb{R}^d , existe una pareja de subconjuntos ajenos de ésta cuyos cascos convexos se intersectan.*

Siempre que una pareja de subconjuntos $A, B \subset \mathcal{P}$ cumpla esta propiedad (i.e., $A \cap B = \emptyset$ y $\langle A \rangle \cap \langle B \rangle \neq \emptyset$) denotaremos el hecho por $A \dagger B$. Las propiedades obvias que cumple dicha relación $\dagger \subseteq 2^{\mathcal{P}} \times 2^{\mathcal{P}}$ en la familia de subconjuntos de \mathcal{P} se pueden considerar como los axiomas de un *separoide*. Cada matroide orientado tiene asociado un único separoide

—de hecho su categoría es más general— y este último codifica toda la información de aquél. Veamos que pasa en el ejemplo de la Figura 1.a:



$$\begin{array}{ccccc} 02 \dagger 13 & 13 \dagger 24 & 24 \dagger 03 & 03 \dagger 14 & 14 \dagger 02 \\ 024 \dagger 13 & 013 \dagger 24 & 124 \dagger 03 & 023 \dagger 14 & 134 \dagger 02 \end{array}$$

Figura 3. Las particiones de Radon del pentágono

Obsérvese como $02 \dagger 13$ implica que $024 \dagger 13$ y que $02 \dagger 134$. A las parejas de subconjuntos $A, B \subseteq \mathcal{P}$ que cumplen que $A \dagger B$ las llamaremos *particiones de Radon de \mathcal{P}* y a cada parte (A y B) se le conoce como *componente de Radon*. Es claro que, en una configuración de puntos, basta conocer las particiones *minimales* —donde cada componente tiene los menos elementos— para reconstruir todas las particiones. Obsérvese, en el ejemplo, que si $A \dagger B$ es minimal, entonces para todo $c \in \mathcal{P} \setminus (A \cup B)$ existe un único $d \in A \cup B$ tal que $(A \setminus d) \dagger (B \setminus d) \cup c$.

Asociaremos a cada partición (de Radon) minimal $A \dagger B$ (a cada *circuito*, para usar el lenguaje de los matroides orientados) una cara del n -cubo $[A, \overline{B}]$, pensado este último como la familia de subconjuntos de nuestro conjunto original $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ y donde $\overline{B} = \mathcal{P} \setminus B$ denota el complemento. En el ejemplo 1.a asociamos a la partición $02 \dagger 13$ la cara $[02, 024]$.

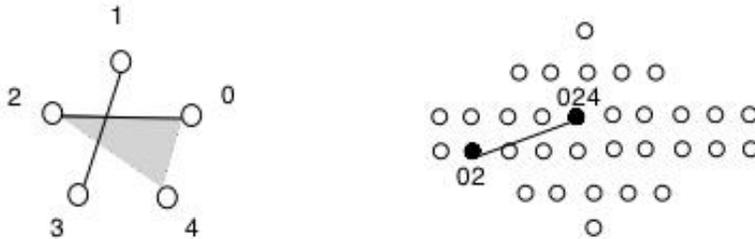


Figura 4. Una arista de \mathcal{Q}_5

Si se considera la familia de todas las caras del n -cubo que vienen de alguna partición minimal de una configuración, se puede definir un complejo que, a su vez, define un espacio topológico que, como se verá, es una esfera de la dimensión que le toca. En el ejemplo 1.a, el complejo es un ciclo que tiene la topología de la 1-esfera.

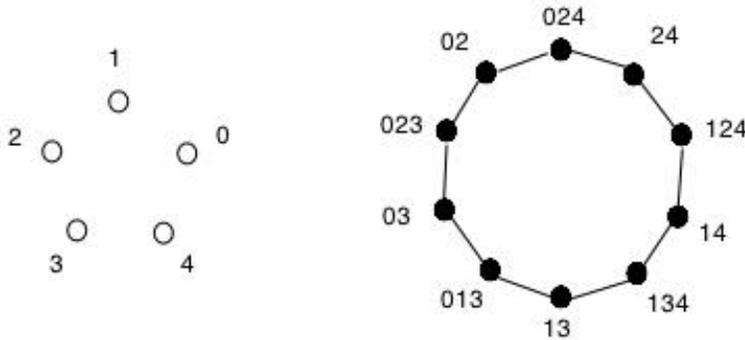


Figura 5. *Un ciclo antipodal de Q_5*

Que el complejo anterior —que llamamos el *complejo de Radon*— sea una esfera, es una consecuencia de Teorema Básico de Esfericidad de Folkman y Lawrence, en la versión de Edelman (1982), y de la dualidad de Alexander. Sin embargo, presentamos una demostración geométrica para el caso de las configuraciones de puntos. Dicha demostración nos permite estudiar el espacio de **todas** las configuraciones de orden n en dimensión d .

De regreso a las configuraciones de puntos, podemos observar que, pensando al afín $\mathbf{A}^d \hookrightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ como subespacio del espacio vectorial siguiente, se puede definir un *arreglo de hiperplanos* como la familia de aquellos que son ortogonales a cada uno de los vectores de la configuración. Dichos hiperplanos, al intersectarlos con la esfera unitaria, definen una configuración de subesferas de ésta. Si estas subesferas son deformadas por una transformación topológica que preserve las propiedades de intersección de éstas, lo que se obtiene es un *matroide orientado*. De hecho, lo que demuestran Folkman y Lawrence es que así son **todos** los matroides orientados.

Un vistazo más de cerca a dicho resultado nos llevará a caracterizar las *gráficas de cocircuitos* de un matroide orientado —el 1-esqueleto del complejo celular que resulta de la descomposición que inducen dichos

pseudohiperplanos— problema que ha sido atacado por K. Fukuda y sus colaboradores desde el año de 1993. Éllos caracterizan las *gráficas de topes* $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ de los matroides orientados de rango a lo más 3, mostrando que son aquellas gráficas planas y antipodales que se encajan isométricamente en algún n -cubo. La planaridad de \mathcal{T} induce una gráfica dual $\mathcal{G} = \mathcal{T}^*$ que, se demuestra, es la gráfica de cocircuitos de \mathcal{M} . No se conoce a la fecha ninguna caracterización para el caso general, pero el Teorema 7 es una caracterización de los matroides orientados *uniformes*. De hecho, demuestra que: \mathcal{G} es la gráfica de cocircuitos de un matroide orientado uniforme de orden n y dimensión d si y sólo si \mathcal{G} es de orden $2\binom{n}{d+2}$, es antipodal y puede ser encajada “isométricamente” en el $(n - d - 2)$ -dual del n -cubo. La Figura 6 representa con líneas punteadas una subgráfica plana $\mathcal{T} \hookrightarrow \mathcal{Q}_5$ del 1-esqueleto del 5-cubo cuyo 2-dual $\mathcal{G} = \mathcal{T}^*$ es el 1-esqueleto de una configuración de cinco líneas en la 2-esfera correspondiente a 5 puntos en el plano en posición general.

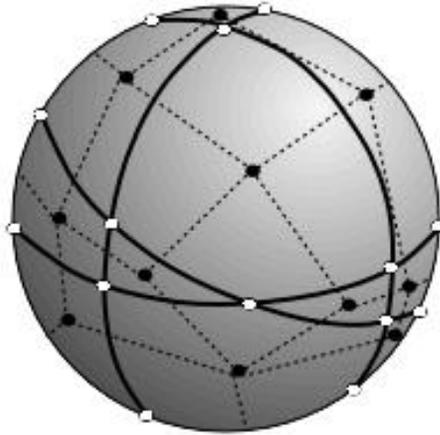


Figura 6. *Cinco líneas en en la 2-esfera*

Edelman ya había estudiado el “complemento” del complejo de Radon pensando en el matroide orientado dual \mathcal{M}^* —pensando en separaciones en vez de en particiones de Radon. Él demostró que el complejo definido por

$$\Gamma(\mathcal{T}) := \{X \in \{-, 0, +\}^E : X \leq T \text{ y } T \in \mathcal{T}\}$$

es homotópicamente una esfera de dimensión $r - 1$.

Nosotros, para estudiar el complejo de Radon de las configuraciones

de puntos, nos restringiremos a estudiar aquellos matroides orientados que son *realizables* —que su separoide es un *separoide de puntos*— y pensaremos en éstas como funciones $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$. Presentaremos una demostración original del Teorema Básico de Esfericidad para este caso. Se demostrará cómo la estructura combinatoria del separoide es codificada por la intersección del n -octaedro (la esfera de \mathbb{R}^n cuando es dotado de la norma $\|\mathbf{x}\|_1 := \sum |x_i|$), con la intersección del núcleo de la función lineal que define la configuración, y el hiperplano ortogonal al vector $(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Cada partición de Radon $A \dagger B$ está definida por tres expresiones de la forma

$$\begin{aligned} \sum_{i \in A} x_i \mathbf{P}_i &= \sum_{i \in B} x_i \mathbf{P}_i, \\ \sum_{i \in A} x_i &= \sum_{i \in B} x_i = 1, \\ x_i &\geq 0, \quad i \in A \cup B; \end{aligned}$$

lo que se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \sum_{i \in A \cup B} x_i \mathbf{P}_i &= 0, \\ \sum_{i \in A \cup B} x_i &= 0, \\ \sum_{i \in A \cup B} |x_i| &= 2, \end{aligned}$$

Se demostrará que dos funciones lineales $\varphi, \varphi': \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ representan la misma configuración (módulo la acción del grupo afín) si y sólo si la intersección de sus respectivos núcleos interseccionan al hiperplano definido por $\sum x_i = 0$ —el ortogonal al vector $(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ — en el mismo subespacio. Esto nos permite asociar a cada configuración (afín) un elemento de la variedad *Grassmanniana* definida por los d -subespacios lineales de \mathbb{R}^{n-1} .

Si en esta variedad identificamos aquellas configuraciones que definen al mismo separoide, dicha Grassmanniana es partida en conjuntos abiertos y la estructura politopal asociada a dicha partición es estudiada en detalle para los casos donde $d = 1$, $n = d + 2$ y $n = d + 3$.

2. Complejos Politopales

Prácticamente todos los conjuntos que usaremos a lo largo de esta tesis deben ser pensados como subconjuntos del espacio Euclidiano de dimensión n . Muchas definiciones y resultados pueden ser expresados como invariantes afines, sin embargo por lo pronto no “estresaremos” este punto. Al usar el símbolo \mathbb{R}^n , debe quedar claro por el contexto si nos referimos al espacio vectorial, a su estructura afín o a su estructura métrica. En este último caso, usaremos una métrica que **no** proviene del producto interno usual: $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\|\mathbf{x}\| = \sum |x_i| \quad \text{donde } \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n).$$

Asumiré que el lector tiene cierta familiaridad con la geometría afín y la Euclidiana.

Un subconjunto de $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice que es *convexo* si contiene el segmento de recta que une a cualesquiera de sus puntos, i.e., $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{K}$,

$$\{\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} : 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset \mathcal{K}.$$

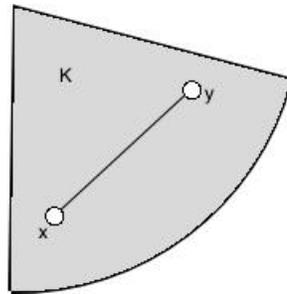


Figura 7. Un conjunto convexo

Como la intersección de conjuntos convexos es un conjunto convexo, podemos definir el *casco convexo* de un conjunto arbitrario $A \subseteq \mathbb{R}^n$ como la intersección de todos los convexos que lo contienen. Dicho conjunto convexo lo denotaremos por

$$\langle A \rangle := \bigcap \{ \mathcal{K} \supseteq A : \mathcal{K} \text{ es convexo} \}.$$

De manera equivalente, se puede definir el casco convexo como la familia de todas las combinaciones convexas de sus elementos:

$$\langle A \rangle = \left\{ \sum_{a \in A} \lambda_a a : \sum_{a \in A} \lambda_a = 1 \text{ y } \lambda_a \geq 0 \right\}.$$

Si debilitamos esta última construcción y no pedimos que todos los coeficientes λ_a sean no-negativos, lo que resulta es el *subespacio afín generado por A* . Se define la *dimensión* del convexo como aquella del subespacio afín que genera.

Un subespacio afín $H \subset \mathbb{R}^n$ es un *hiperplano soporte* del convexo \mathcal{K} si es un hiperplano que intersecta al convexo en su frontera $\partial\mathcal{K}$ y deja al resto de éste totalmente contenido en el interior de uno de los 2 semiespacios que tienen a H como frontera. La convexidad de \mathcal{K} implica que cada punto de su frontera define, al menos, un hiperplano soporte que pasa por él. De hecho \mathcal{K} es la intersección de todos estos semiespacios. A la intersección de los soportes con el convexo los llamaremos *caras*.

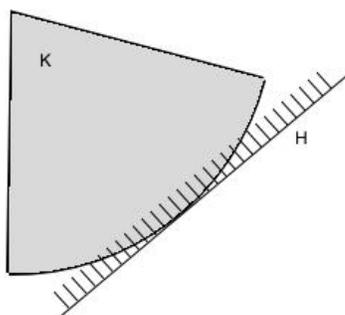


Figura 8. *Un hiperplano soporte del convexo*

El conjunto de todas las caras definen un orden parcial, aquel inducido por la contención. En lo que sigue, siempre supondremos que dicho orden parcial es **finito**. De hecho estaremos trabajando con dos latices concretas: la latiz de caras del n -cubo y su dual el n -octaedro. Nos referiremos a estos objetos simplemente como *politopos*, i.e., un politopo será el casco convexo de un conjunto finito de puntos junto con la estructura de incidencia de sus caras. Usaremos expresiones del tipo $\sigma < \tau$ para decir que que la cara σ está contenida en (es menor a) la cara τ . Claramente, la intersección de un politopo con un subespacio afín es de nuevo un politopo.

Se asumirá cierta familiaridad con conceptos básicos de topología tales como *homeomorfismo* de espacios (denotados por \cong), *complejos simpliciales* abstractos y geométricos, la *realización geométrica* $|K|$ de un complejo abstracto K , etc. (ver e.g. Spanier 1966). El interior relativo σ° y la frontera $\partial\sigma$ tienen los significados establecidos. Si $d(\sigma) = 0$

entonces $\sigma^\circ = \sigma$.

Un *complejo politopal* K es una colección finita de politopos $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ donde los interiores σ° son una partición de $|K|$ y sus fronteras $\partial\sigma$ son uniones de algunos elementos de K .

Estos complejos han sido estudiados ampliamente en la literatura y son un caso particular de lo que se conoce como “CW complejos regulares finitos” o simplemente como “complejos de bolas” [cf. Björner et al. p.202]. En nuestro caso, insisto, sólo trabajaremos con subcomplejos del n -cubo y de su dual el n -octaedro.

Dos simplejos σ, τ dan lugar a una bola, llamada su *ensamble* $\sigma * \tau$, que se define como la unión de los segmentos de línea que tienen como extremos un punto en cada simplejo. Nótese que solo si la unión de los vértices (o puntos) de esto simplejos son afínmente independientes, su ensamble es de nuevo un simplejo.

Lema 1 Sean $\tau_0, \tau_1 < \sigma$ dos caras de un simplejo y \mathcal{L} un subespacio afín que los intersecta en el interior, entonces \mathcal{L} intersecta el interior de su ensamble, i.e.,

$$\tau_i \cap \mathcal{L} \neq \emptyset \implies (\tau_0 * \tau_1)^\circ \cap \mathcal{L} \neq \emptyset.$$

Demostración. Sean $a \in \tau_0^\circ \cap \mathcal{L}$ y $b \in \tau_1^\circ \cap \mathcal{L}$. Entonces el segmento \overline{ab} está contenido en \mathcal{L} y su interior en $(\tau_0 * \tau_1)^\circ$, por lo tanto el interior del ensamble de las caras del simplejo intersectan a susodicho subespacio. \square

Dados un politopo \mathcal{K} y un subconjunto de sus vértices $A \subseteq \mathcal{K}^{(0)}$ (caras de dimensión cero), denotamos por $\mathcal{K}[A]$ al complejo politopal inducido por dichos vértices, i.e., al complejo que consta de los vértices A y de todas aquellas caras de \mathcal{K} que tengan todos sus vértices en A .

Dado un politopo $\mathcal{K} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, éste define un punto que se conoce como *baricentro*, a saber,

$$b(\mathcal{K}) := \frac{1}{\#(\mathcal{K}^{(0)})} \sum_{\mathbf{p} \in \mathcal{K}^{(0)}} \mathbf{p}.$$

Si se consideran los baricentros de todas las caras de un complejo politopal como vértices (es decir, los elementos del orden parcial pasan a ser todos singuletes) y como caras a aquellos simplejos que resultan del ensamble de estos vértices con la frontera de la cara (del politopo) que los contiene (es decir, las cadenas del orden parcial pasan a ser las caras y su dimensión la determina la longitud de la cadena), lo que resulta es un nuevo complejo que se conoce como *subdivisión baricéntrica* \mathcal{K}' y, es bien sabido que su realización, es homeomorfa al politopo original, i.e. $|\mathcal{K}| \cong |\mathcal{K}'|$. Si bién $\mathcal{K} \cap \mathcal{L}$ es politopal, no es subcomplejo de \mathcal{K} . Sin embargo si es subcomplejo de la subdivisión baricéntrica, i.e., $(\mathcal{K} \cap \mathcal{L})' \subset \mathcal{K}'$. La combinatoria de la subdivisión baricéntrica no cambia cuando se permite que, en su realización, los baricentros se desplacen al interior de la cara que los definió. En particular, dados un complejo politopal \mathcal{K} y un subespacio afín \mathcal{L} que lo intersekte, se puede definir la siguiente realización de la subdivisión baricéntrica $\mathcal{K}' = \mathcal{K}'(\mathcal{L})$ definida por ésta intersección:

$$(\mathcal{K}')^{(0)} = \left\{ b_\sigma : b_\sigma = \begin{cases} b(\sigma), & \text{si } \sigma^\circ \cap \mathcal{L} = \phi; \\ b(\sigma^\circ \cap \mathcal{L}), & \text{si no.} \end{cases} \right\},$$

$$\langle b_{\sigma_0}, \dots, b_{\sigma_k} \rangle \in (\mathcal{K}')^{(k)} \iff \sigma_0 < \dots < \sigma_k \in \mathcal{K}$$

donde, si σ es una cara del complejo, $b(\sigma)$ denota el baricentro usual de σ . Claramente la subdivisión baricéntrica de un complejo politopal es un complejo simplicial.

En el capítulo 4, cuando demostremos que el complejo de Radon de una configuración es una esfera, nos presentaremos con dos formas distintas de intersectar politopos con subespacios afines: la usual, donde sólo se consideran aquellas caras que son intersectadas en el interior; y lo que llamamos *la intersección gorda*, en la que se consideran **todas** las caras que “tocan” a dicho subespacio. Combinatoriamente, ambas intersecciones son subcomplejos de la subdivisión baricéntrica del politopo y, como se demostrará más adelante, la intersección usual es un retracto fuerte de la intersección gorda.

Denotaremos por

$$\mathcal{K} \sqcap \mathcal{L} := \mathcal{K}'[b_\sigma : \sigma \cap \mathcal{L} \neq \phi]$$

y por

$$\mathcal{K} \overset{\circ}{\sqcap} \mathcal{L} := \mathcal{K}'[b_\sigma : \sigma^\circ \cap \mathcal{L} \neq \phi]$$

a los subcomplejos de \mathcal{K}' inducido por la intersección gorda y la intersección usual, respectivamente. Claramente el espacio que define la intersección usual (en el interior) de las caras es la intersección de los espacios, i.e., $|\mathcal{K} \overset{\circ}{\cap} \mathcal{L}| = \mathcal{L} \cap |\mathcal{K}|$. De hecho, $\mathcal{K} \overset{\circ}{\cap} \mathcal{L} = (\mathcal{L} \cap \mathcal{K})'$.

Teorema 1 *Dados un complejo politopal \mathcal{K} y un subespacio afín \mathcal{L} que lo intersekte, $|\mathcal{K} \overset{\circ}{\cap} \mathcal{L}|$ es un retracto fuerte de $|\mathcal{K} \cap \mathcal{L}|$.*

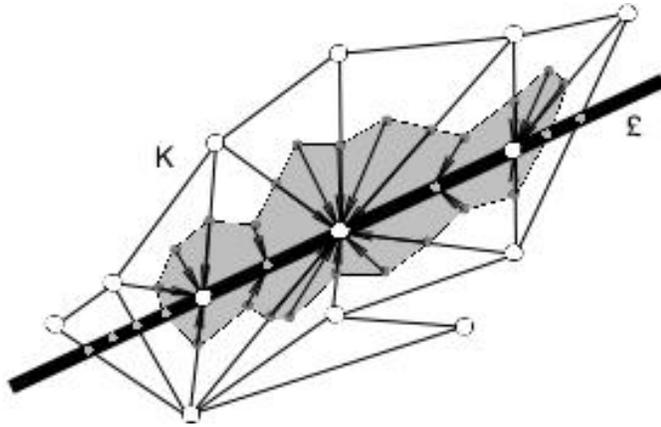


Figura 9. *Demostración del Teorema 1*

Demostración. Sea $f: \mathcal{K} \cap \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{K} \overset{\circ}{\cap} \mathcal{L}$ definida como sigue: para cada $b_\sigma \in \mathcal{K} \cap \mathcal{L}$ sea $f(b_\sigma) = b_\tau$, donde $\tau = \max \{ \tau < \sigma : \tau^\circ \cap \mathcal{L} \neq \emptyset \}$.

Antes que nada tenemos que demostrar que f está bien definida. En efecto, el lema 1 garantiza que el máximo es único. Ahora, para demostrar que es simplicial, obsérvese que $\sigma_0 < \sigma_1$ implica que

$$\max \{ \tau < \sigma_0 : \tau^\circ \cap \mathcal{L} \neq \emptyset \} \subset \max \{ \tau < \sigma_1 : \tau^\circ \cap \mathcal{L} \neq \emptyset \}$$

y por lo tanto $f(\sigma_0) < f(\sigma_1)$.

Claramente f es la identidad en $\mathcal{K} \overset{\circ}{\cap} \mathcal{L}$.

Ahora, para cada $t \in [0, 1]$, defínase

$$f_t: \mathcal{K} \cap \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{K} \overset{\circ}{\cap} \mathcal{L}$$

como sigue: primero, si $b_\sigma \in (\mathcal{K} \sqcap \mathcal{L})^{(0)}$ es un vértice,

$$f_t(b_\sigma) = (1 - t)b_\sigma + tf(b_\sigma).$$

Nótese que como b_σ y $f(b_\sigma)$ son puntos de $|\sigma|$, $f_t(b_\sigma)$ también lo es. Finalmente, extiéndase la definición anterior linealmente al resto del dominio, es decir, si $x \in |\mathcal{K} \sqcap \mathcal{L}|$ es cualquier otro punto, entonces $x \in |\langle b_{\sigma_0}, \dots, b_{\sigma_r} \rangle| \subset |\sigma_r|$ y por tanto x se puede escribir como una combinación convexa $x = \sum \lambda_i b_{\sigma_i}$ y se puede definir f_t ahí como

$$f_t(x) = \sum \lambda_i f_t(b_{\sigma_i}).$$

Luego, f_t es una retracción fuerte de $|\mathcal{K} \sqcap \mathcal{L}|$ sobre $|\mathcal{K} \overset{\circ}{\sqcap} \mathcal{L}|$. □

3. Grassmannianas

Se describió configuración en los primeros párrafos de esta tesis como cualquier subconjunto (finito) del espacio afín $\mathbf{A}^d = (\mathbb{R}^d, Af(d))$ — siempre supodremos que los puntos generan afinmente el espacio donde viven. Si $\mathcal{P} = \{\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n\} \subset \mathbf{A}^d$ es una configuración, se puede definir una función lineal de $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ como la extensión lineal de las ecuaciones

$$\varphi(\mathbf{e}_i) = \mathbf{p}_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

donde \mathbf{e}_i denota el i -ésimo vector canónico de \mathbb{R}^n . Dadas dos de estas funciones φ, φ' , se dirá que representan *la misma* configuración si existe una transformación afín $\psi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que

$$\psi \circ \varphi(\mathbf{e}_i) = \varphi'(\mathbf{e}_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

i.e., dos configuraciones son la misma si una es la imagen de la otra bajo una transformación afín.

Llamaremos *espacio de configuraciones* al conjunto de todas las configuraciones de n puntos en dimensión d (módulo la acción del grupo afín). Este conjunto será dotado de estructura y descrito con mayor detalle en la última parte de la tesis.

El primer ejemplo es cuando $n = d + 1$ y el espacio de configuraciones consta de un sólo punto que representa al simplejo correspondiente. La cosa se pone más interesante cuando $n \geq d + 2$ y es ahí donde aplica el teorema de Radon. Éste garantiza que existe una partición $A \dagger \bar{A}$ de \mathcal{P} y podemos considerar al conjunto de componentes $C(\mathcal{P}) := \{A \subset \mathcal{P} : A \dagger \bar{A}\}$ que son un subconjunto de los vértices del n -cubo —la familia de subconjuntos de \mathcal{P} . Si además de los vértices agregamos como caras a los intervalos de la forma $R(\mathcal{P}) = \{[A, B] : A, B \in C(\mathcal{P})\}$, obtenemos un complejo politopal que resultará ser homotópico a la esfera de dimensión $n - d - 2$.

Al espacio que consta de las subesferas de dimensión k de la esfera de dimensión n se le conoce como variedad *Grassmaniana* y se definirán con más cuidado abajo pero, por lo pronto diremos —como motivación a lo que viene— que éste es homeomorfo al espacio de configuraciones.

En la literatura clásica, las Grassmanianas son definidas como el conjunto de los subespacios de una dimensión fija de algún espacio vecto-

rial. Aquí nos referiremos exclusivamente a los subespacios de \mathbb{R}^n . A la grassmaniana de k -planos (k -subespacios) de \mathbb{R}^n la denotaremos por $\mathcal{G}^k(\mathbb{R}^n)$.

A este conjunto se le puede dar una topología muy natural. Cada k -plano es el núcleo de alguna función lineal sobreyectiva $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ y dos funciones tienen el mismo núcleo si $\exists \psi \in GL(\mathbb{R}^{n-k})$ que hace conmutar el siguiente diagrama..

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^n \\ & & \varphi \swarrow \quad \searrow \varphi' \\ \mathbb{R}^{n-k} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R}^{n-k} \end{array}$$

Así, la grassmaniana hereda la topología del espacio $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-k})$ módulo las transformaciones lineales de \mathbb{R}^{n-k} , i.e.,

$$\mathcal{G}^k(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-k})/GL(n-k).$$

Nótese que: en particular los espacios proyectivos \mathbb{P}^{n-1} , pensados como líneas —o como hiperplanos— de \mathbb{R}^n , son un caso particular de las grassmanianas, i.e. $\mathcal{G}^1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{P}^{n-1}$; y que, así como hay una dualidad natural —complementación ortogonal— entre líneas e hiperplanos, hay una dualidad natural entre ciertas grassmanianas. A saber

$$\mathcal{G}^k(\mathbb{R}^n) \cong \mathcal{G}^{n-k}(\mathbb{R}^n),$$

con el homeomorfismo dado por la complementación ortogonal.

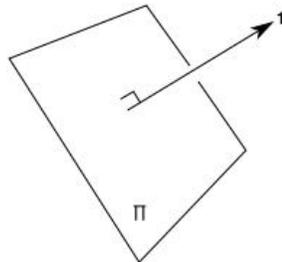


Figura 10. El hiperplano Π

Denotaremos por $\Pi := \mathbf{1}^\perp$ al hiperplano de \mathbb{R}^n ortogonal al vector $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$ que tiene puros 1 en sus entradas o, lo que es lo mismo por

$$\Pi = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \sum x_i = 0 \right\}$$

donde x_i es la i -ésima coordenada de \mathbf{x} .

Teorema 2 *Dos funciones $\varphi, \varphi' \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$ determinan la misma configuración si y sólo si las intersecciones de sus nucleos con el hiperplano Π son la misma.*

$$\begin{array}{ccc} K \cap \Pi & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^n \\ & & \varphi \swarrow \searrow \varphi' \\ \mathbf{A}^d & \xrightarrow{\psi} & \mathbf{A}^d \end{array}$$

Demostración. Sean $\mathbf{P}_i = \varphi(\mathbf{e}_i)$ y $\mathbf{P}'_i = \varphi'(\mathbf{e}_i)$ dos configuraciones de n puntos y sean K y K' sus respectivos nucleos. Seará demostrado que

$$K \cap \Pi = K' \cap \Pi$$

si y sólo si existe una función afín $\psi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ que mande una sobre la otra:

$$\mathbf{P}_i = \psi \mathbf{P}'_i.$$

Esto inducirá una función biyectiva entre las configuraciones y los subespacios de dimensión $n - d - 1$ del espacio Π de dimensión $n - 1$.

Necesidad. Es claro que basta probar que $K \cap \Pi \subset K' \cap \Pi$, esto es, basta probar que

$$\sum \lambda_i = 0 \text{ y } \sum \lambda_i \mathbf{P}_i = 0 \implies \sum \lambda_i \mathbf{P}'_i = 0.$$

En efecto, si $\psi \mathbf{x} = M\mathbf{x} + \mathbf{v}$ denota el isomorfismo afín, entonces

$$0 = \sum \lambda_i \mathbf{P}_i = \sum \lambda_i (M\mathbf{P}'_i + \mathbf{v}) = M(\sum \lambda_i \mathbf{P}'_i) + (\sum \lambda_i) \mathbf{v} = M(\sum \lambda_i \mathbf{P}'_i).$$

Como M es invertible, entonces $\sum \lambda_i \mathbf{P}'_i = 0$.

Suficiencia. Por simplicidad supondremos que los primeros $d+1$ puntos de la configuración primal $\{\mathbf{P}'_1, \dots, \mathbf{P}'_{d+1}\}$, generan afínmente el espacio —el caso general es totalmente análogo pero hay que trabajar con conjuntos indexados de índices. Entonces existe una función afín definida por los primeros puntos de cada configuración

$$\mathbf{P}_i = \psi \mathbf{P}'_i \quad i = 1, \dots, d+1.$$

Será probado que éste es el caso para todos los puntos.

Para esto, considere otro punto \mathbf{P}'_j . Como el conjunto $\{\mathbf{P}'_1, \dots, \mathbf{P}'_{d+1}\}$ genera afinmente todos los demás puntos, existen números $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1}\}$ tales que $\sum \lambda_i = 1$ y que $\mathbf{P}'_j = \sum \lambda_i \mathbf{P}'_i$. Por hipótesis

$$\sum \lambda_i - 1 = 0 \text{ y } \sum \lambda_i \mathbf{P}'_i - \mathbf{P}'_j = 0 \implies \sum \lambda_i \mathbf{P}_i - \mathbf{P}_j = 0.$$

Finalmente tenemos que,

$$\mathbf{P}_j = \sum \lambda_i \mathbf{P}_i = \sum \lambda_i \psi \mathbf{P}'_i = \psi \sum \lambda_i \mathbf{P}'_i = \psi \mathbf{P}'_j,$$

lo que concluye la demostración. \square

Corolario 3 *Los puntos de la variedad grassmanniana $\mathcal{G}^d(\mathbb{R}^{n-1})$ están en correspondencia uno-a-uno con las configuraciones de n puntos en el espacio afín de dimensión d .*

Demostración. El subespacio Π puede ser identificado con \mathbb{R}^{n-1} y cada subespacio (de éste) de dimensión $n - d - 1$ se puede extender al núcleo de una función lineal $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$. El teorema anterior garantiza que la asignación de una configuración a dicho núcleo es una función bien definida que biyecta los puntos de la grassmanniana $\mathcal{G}^{n-d-1}(\mathbb{R}^{n-1})$ con los puntos del espacio de configuraciones en cuestión. Finalmente, la dualidad de las grassmannianas implica que éste puede ser biyectado con $\mathcal{G}^d(\mathbb{R}^{n-1})$. \square

4. Separoides

Una *configuración* \mathcal{P} es un subconjunto (ordenado y finito) de \mathbb{R}^d y dos se consideran *la misma* si una es imagen de la otra bajo una transformación afín. Éstas son nuestro principal objeto de estudio.

Para estudiarlas, les asociaremos a cada configuración un objeto combinatorio que llamamos *separoide*. La idea de separoide surge como sigue: en una configuración, algunos puntos están separados de otros por algún hiperplano afín; diremos que dos subconjuntos $A, B \subset \mathcal{P}$ “están separados” si existe un hiperplano que deje a A de un lado y a B del otro, las propiedades obvias de esta relación entre los subconjuntos de \mathcal{P} son los axiomas de un separoide.

Los separoides por su parte, al estar definidos en la familia de subconjuntos $2^{\mathcal{P}}$ de \mathcal{P} , tienen asociado un complejo politopal que “vive” en un hipercubo. Este complejo codifica buena parte de la estructura de éstos —si bien no toda— y permite clasificar lo que llamaremos los *tipos de Radon*.

Por otro lado, como se demostró, al conjunto de configuraciones de n puntos en dimensión d se le puede asociar una variedad. Se verá como la combinatoria del cubo impone a ésta una poliedrización que captura la estructura de los morfismos en la categoría de separoides de puntos.

0. Nociones Básicas.

Un *separoide* es una relación $| \subseteq 2^S \times 2^S$ en la familia de subconjuntos de un conjunto dado S —que se identificará con el separoide mismo— con las siguientes propiedades:

- $A | B \implies B | A,$
- $A | B \implies A \cap B = \phi,$
- $A | B \text{ y } A' \subseteq A \implies A' | B.$

Cuando dos subconjuntos están relacionados, se dice que están *separados* y a las separaciones con el conjunto vacío se les llama *triviales*. Un separoide es *acíclico* si el conjunto vacío se separa del total, i.e. $\phi | S$.

Si en una configuración de puntos definimos la relación

$$A | B \iff \langle A \rangle \cap \langle B \rangle = \phi,$$

ésta corresponde a la separación por hiperplanos pues dos subconjuntos de \mathbb{R}^d se separan por un hiperplano si y sólo si sus cascos convexos son ajenos. De tal manera que esta relación cumple las tres propiedades y por tanto toda configuración es también un separoide. A este tipo de separoides los llamaremos *separoides de puntos* (y en ocasiones simplemente separoides) para hacer incapié en su estructura combinatoria más allá de su geometría ya que varias configuraciones dan lugar al mismo separoide. Se puede demostrar que: *todo separoide acíclico puede realizarse como una familia de cuerpos convexos cuya estructura de separación por hiperplanos es aquella del separoide en cuestión* —de ahí el nombre de la categoría. La figura 11 muestra todos los separoides con tres elementos.

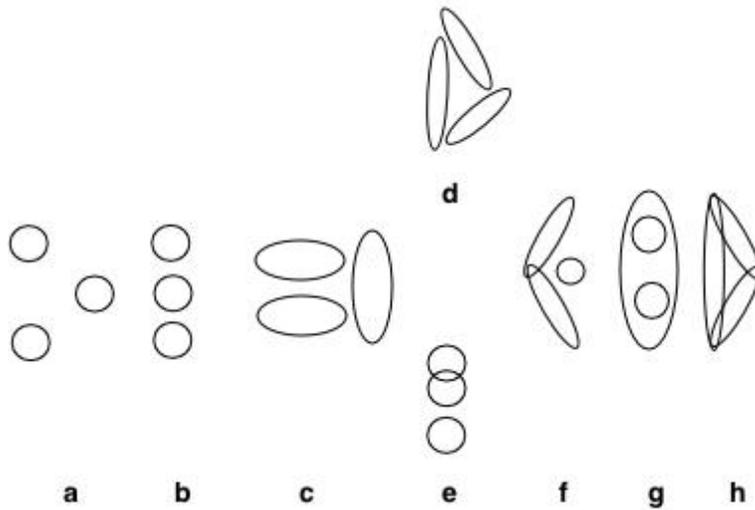


Figura 11. Los separoides acíclicos con 3 elementos

La geometría de las configuraciones invita a hacer las siguientes definiciones combinatorias. Un *simploide de dimensión d* es un separoide con $d + 1$ elementos en el que se separan todos de todos. Es la relación de ser ajenos

$$A | B \iff A \cap B = \phi.$$

Este separoide se realiza con los vértices de un simplejo y es por tanto de puntos. La *dimensión* de un separoide es la dimensión del simplejo más grande que contiene.

La dimensión (combinatoria) coincide, en los separoides de puntos, con la dimensión del subespacio afín que generan estos. Cuando hablemos de configuraciones siempre supondremos que la dimensión del espacio y la del separoide son la misma, i.e. que los puntos generan afínmente el espacio donde viven.

Lema 2 (*Radon*) Sea S un separoide de dimensión d y $X \subseteq S$ cualquier subconjunto de éste. Entonces, si el cardinal de X es al menos $d + 2$, existen dos subconjuntos ajenos de éste $A, B \subset X$ que no se separan.

Demostración. Por definición, la dimensión de un separoide es la mínima d que hace este lema verdadero. \square

En un separoide una *partición de Radon* $A \dagger B$ es una pareja de subconjuntos ajenos que no se separan y cada uno de éstos es llamado una *componente* de Radon. Obsérvese que $A \dagger B \implies A \dagger \bar{A}$ y por tanto las componentes (de Radon) de un separoide son aquellos subconjuntos que no se separan de su complemento. La familia de componentes

$$C(S) := \{A \subset S : A \dagger \bar{A}\}$$

determina el *tipo* (de Radon) del separoide. No se conoce ninguna clasificación combinatoria de los tipos de los separoides de puntos. Un campo que ha estudiado este problema —proponiendo una estructura intermedia entre los puntos y los separoides— es el de los matroides orientados. El problema de clasificar los separoides de puntos es equivalente a caracterizar matroides orientados realizables.

Siguiendo la nomenclatura de los matroides orientados —una clase especial de separoides, pero muy importante— a las particiones de Radon del tipo $A \dagger \bar{A}$ las llamaremos *cotopes generalizados*. Se dice que un separoide está en *posición general* si todo subconjunto de $d + 1$ elementos es un simpleoide.

Lema 3 (*Posición General*) Sea S un separoide de dimensión d en posición general. Entonces

$$A \dagger B \implies \#(A \cup B) \geq d + 2.$$

Demostración. Por estar en posición general, todo subconjunto de $d + 1$ elementos es un simpleoide y por tanto si $\#(A \cup B) \leq d + 1$ entonces $A \mid B$. \square

En lo que sigue, veremos como el conjunto de las componentes (de Radon) de un separoide de puntos, pensadas éstas como vértices del cubo, inducen un complejo que, como se demostrará, es homotópico a una esfera.

1. El cubo de una familia de subconjuntos

La familia de subconjuntos $\mathcal{Q}_n := 2^S$ de un conjunto dado S con n elementos, ordenados naturalmente por la contención, define un cubo de dimensión $n - 1$. Los vértices son los subconjuntos y las caras son los intervalos

$$[X, Y] := \{Z \subseteq S : X \subseteq Z \subseteq Y\}.$$

El n -cubo puede ser realizado en \mathbb{R}^n como el casco convexo de todos los vectores de la forma $\mathbf{x} = (x_i)$ donde $x_i \in \{-1, 1\}$. Es por tanto muy natural, denotar sus vértices como vectores signados (véase la figura 12).

Nótese que así definido, el cubo es en realidad un politopo de dimensión n (por el intervalo $[\emptyset, S]$) pero en lo que sigue será pensado como el complejo politopal que es la frontera de ésta —la esfera de dimensión $n - 1$.

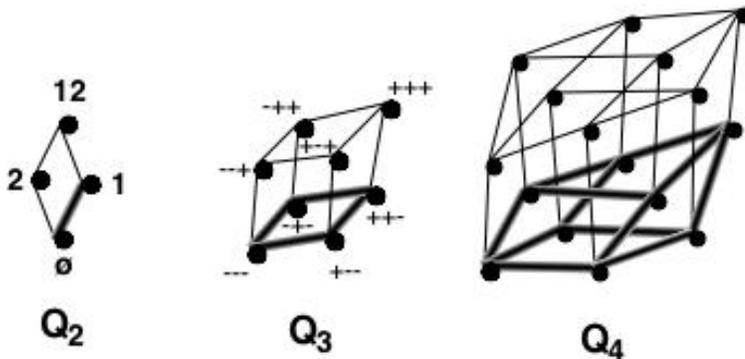


Figura 12. El n -cubo, para $n=2,3,4$

2. El complejo de Radon

A todo separoide S se le puede asociar un *subcomplejo politopal* del n -cubo, a saber el complejo inducido por las componentes de éste. Es decir, los vértices del complejo son los vértices del cubo que corresponden, pensados éstos como subconjuntos de S , a las componentes del separoide en cuestión y, un subcubo de \mathcal{Q}_n es una cara de éste si todos sus vértices son componentes del separoide. Denotaremos por $R(S) := \mathcal{Q}_n[C(S)]$ a éste complejo y le llamaremos *complejo de Radon*.

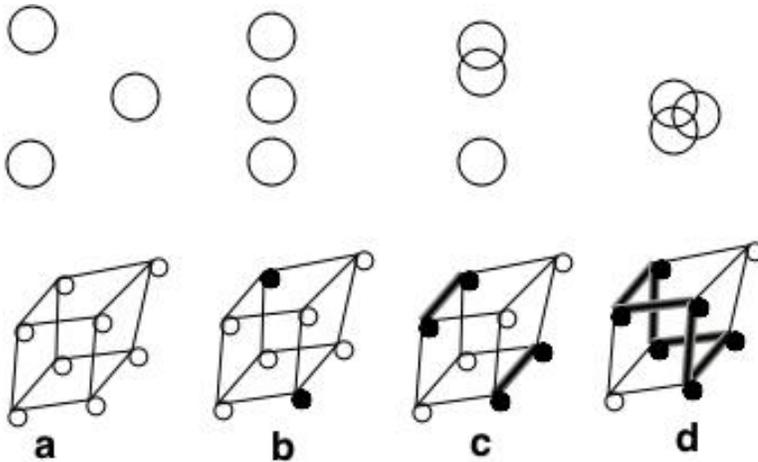


Figura 13. Los separoides de 3 puntos y sus complejos de Radon

Lema 4 Si $A \dagger B$ es una partición de de Radon de un separoide S , entonces $[A, \overline{B}]$ es una cara de su complejo de Radon $R(S)$.

Demostración. Sea $A \dagger B$ una partición de S . Claramente, para todo $C \subseteq \overline{B}$ tenemos que $(A \cup C) \dagger B$ y por tanto, todos los vértices de $[A, \overline{B}]$ son componentes de S . \square

El regreso de este lema no es cierto en general, pero en el caso de los separoides de puntos, las caras del complejo de Radon están en correspondencia uno-a-uno con las particiones.

Lema 5 Si $[A, B]$ es una cara del complejo de Radon $R(\mathcal{P})$ de una configuración de puntos $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ entonces $A \dagger \overline{B}$ es una partición de Radon de dicha configuración.

Demostración. Sea $[A, B]$ una cara de $R(\mathcal{P})$ y denotemos por $C = B \setminus A$ a la diferencia de los subconjuntos que la determinan. Claramente todos los vértices de dicha cara son de la forma $A \cup C'$ para algún $C' \subseteq C$. Luego, por ser vértices del complejo, para cada $C' \subseteq C$ tenemos que $A \cup C' \nmid \overline{A \cup C'}$, i.e., el conjunto $\{A \cup C' : C' \subseteq C\}$ está contenido en las componentes de \mathcal{P} .

Ahora, supóngase que $A|\overline{B}$. Esto equivale a la existencia de un hiperplano $H \leftrightarrow \mathbb{R}^d$ que separa los cascos convexos de A y \overline{B} . Es fácil ver que dicho H , una vez que existe, se puede escoger para que no toque ningún punto de la configuración. Ahora, denotemos por C_a a aquellos puntos de C que están contenidos en el mismo semiespacio de A , y análogamente C_b a aquellos que están del lado de B , de tal manera que $C = C_a \cup C_b$. De la definición se sigue que H separa a $A \cup C_a$ de $B \cup C_b$, lo que contradice al hecho de que $A \cup C_a \nmid \overline{A \cup C_a}$. \square

El siguiente teorema se demuestra en la sección 4 y es la guía de nuestra intuición para el desarrollo del capítulo siguiente.

Teorema 4 *La realización del complejo de Radon de una configuración de n puntos en dimensión d es homotópico a una esfera de dimensión $n-d-2$. Más aún, si los puntos están en posición general, la homotopía es un homeomorfismo.*

Este teorema tiene como consecuencia directa el siguiente corolario que es una transcripción del teorema de Radon (en su versión fuerte) —de ahí el nombre del complejo— que asegura la existencia de particiones de Radon.

Corolario 5 *El complejo de Radon de una configuración de $n \geq d+2$ puntos en dimensión d es no vacío. Más aún, si consta de exactamente $d+2$ puntos en posición general, su complejo es la esfera de dimensión cero, dos puntos antípodas.*

3. El octaedro geométrico.

Si a \mathbb{R}^n se le dota de la métrica de Manhattan, la esfera unitaria resulta ser una realización geométrica de la frontera del n -octaedro —el politopo dual del n -cubo— a saber,

$$\mathcal{O}_n := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \sum |x_i| = 1 \right\},$$

donde las x_i son las coordenadas de \mathbf{x} . Es el casco convexo de los vectores canónicos de \mathbb{R}^n y sus negativos, y es por tanto un complejo politopal, pero más aún, es un complejo simplicial.

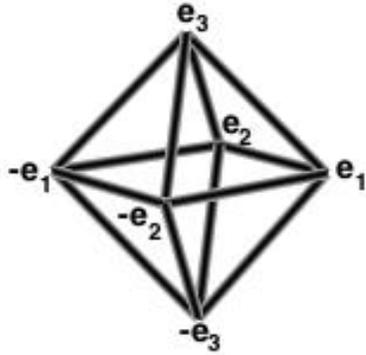


Figura 14. El 3-octaedro

A este octaedro se le puede dar la siguiente descripción combinatoria: asígnese a cada cara σ una n -ada de números $(z_1, \dots, z_n) \in \{-1, 0, 1\}^n$, indicando que vértices (cuáles canónicos ó sus negativos) inciden en ella y obsérvese que las caras del octaedro se realizan como los simplejos

$$|\sigma| = \langle z_i \mathbf{e}_i : z_i \neq 0 \rangle.$$

Como es bién sabido, este politopo es dual del n -cubo —si se invierten los latices de incidencia de sus caras, se pasa de uno a otro— y existen por tanto funciones entre sus caras, tantas como automorfismos, que realizan dicha dualidad. Usaremos la canónica:

$$\delta: \mathcal{O}_n \rightarrow \mathcal{Q}_n,$$

$$\delta(\langle z_i \mathbf{e}_i : z_i \neq 0 \rangle) := [\{i : z_i = 1\}, \{i : z_i \neq -1\}].$$

Obsérvese que con esta definición el dual de la faceta que definen los negativos de los canónicos es el conjunto vacío y el de sus positivos es el total.

4. La demostración del Teorema 4.

Sea $\mathcal{P} = \{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\} \subset \mathbf{A}^d$ una configuración, $S = S(\mathcal{P})$ su separoide y $R = R(S)$ el complejo de Radon asociado a éste. Se desea demostrar que R es homotópico a una esfera de dimensión $n-d-2$. Y más aún, que si \mathcal{P} está en posición general, dicha homotopía es un homeomorfismo.

Para esto, como en el capítulo 3, identificaremos a la configuración con la intersección del núcleo $K = \varphi^{-1}(0)$ de una función lineal $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ (definida por $\varphi(\mathbf{e}_i) = \mathbf{p}_i$), y el hiperplano

$$\Pi = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \sum x_i = 0\}.$$

Este $(n-d-1)$ -subespacio de Π será denotado por $\mathcal{L} = K \cap \Pi$.

Ahora, dótese a \mathbb{R}^n de la norma de Manhattan y denótese por

$$\mathcal{O} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \sum |x_i| = 2\}$$

a la esfera de radio 2 centrada en el origen (nótese que, a diferencia de la sección anterior, estamos usando al octaedro de radio 2; esto es debido a un tecnicismo que quedará claro adelante pero es fácil ver que toda la discusión de dicha sección se aplica de manera totalmente análoga). Recuérdese la definición de intersección gorda (capítulo 2)

$$\mathcal{O} \sqcap \mathcal{L} = \mathcal{O}'[\sigma \in \mathcal{O} : \sigma \cap \mathcal{L} \neq \emptyset]$$

y defínase el complejo de sus caras duales como

$$\mathfrak{R} := \{\delta(\sigma) \in \mathcal{Q}_n : \sigma \in \mathcal{O} \text{ y } \sigma \cap \mathcal{L} \neq \emptyset\},$$

donde $\delta: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{Q}_n$ es la función dualidad definida en la sección anterior. Claramente $\mathfrak{R} = \mathcal{O} \sqcap \mathcal{L}$. Obsérvese que, como \mathcal{P} contiene una base afín, \mathcal{L} es un subespacio lineal de dimensión $n-d-1$ y por tanto $\mathcal{O} \cap \mathcal{L}$ es una esfera de dimensión $n-d-2$. Luego, por el teorema 1, $\mathcal{O} \cap \mathcal{L}$ es un retracto fuerte de $\mathcal{O} \sqcap \mathcal{L}$ y, por lo tanto, \mathfrak{R} tiene el tipo de homotopía de una esfera de dimensión $n-d-2$.

Afirmación. \mathfrak{R} es igual a R .

Como, por el lema 4 y 5, $A \dagger B$ es una partición si y sólo si $[A, \overline{B}]$ es una cara de R , basta demostrar que $[A, \overline{B}]$ es una cara de \mathfrak{R} si y sólo

si $\langle A \rangle \cap \langle B \rangle \neq \phi$. En efecto, sea $\sigma \in \mathcal{O}$ y $z_i \in \{-1, 0, 1\}$ su n -ada correspondiente (como en la sección 3). Es decir, correspondiendo a σ tenemos la siguiente partición de \mathcal{P} : $A = \{\mathbf{p}_i : z_i = 1\}$, $B = \{\mathbf{p}_i : z_i = -1\}$, y $C = \overline{A \cup B} = \{\mathbf{p}_i : z_i = 0\}$. Por la definición de δ tenemos que $\delta(\sigma) = [A, A \cup C]$. Así, basta demostrar que

$$\sigma \cap \mathcal{L} \neq \phi \iff \langle A \rangle \cap \langle B \rangle \neq \phi.$$

Para esto, sea $\mathbf{x} \in \sigma \cap \mathcal{L}$, entonces

$$\sum x_i \mathbf{p}_i = 0, \sum x_i = 0 \text{ y } \sum |x_i| = 2.$$

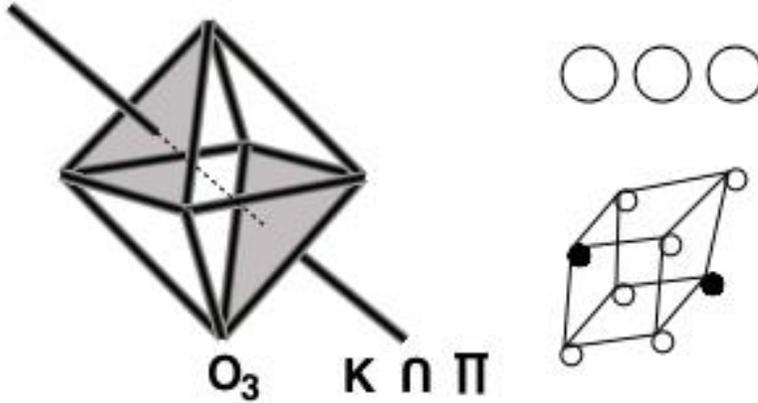


Figura 15. La demostración del Teorema 5

La primera igualdad se debe a que $\mathbf{x} \in K$, la segunda a que $\mathbf{x} \in \Pi$ (todo esto porque $\mathbf{x} \in \mathcal{L} = K \cap \Pi$) y la tercera a que $\mathbf{x} \in \mathcal{O}$. Además, como $\mathbf{x} \in \sigma$, se nos permite también escribir a

$$\frac{1}{2}\mathbf{x} = \sum \lambda_i (z_i \mathbf{e}_i)$$

como combinación convexa ($\sum \lambda_i = 1$ y $\lambda_i \geq 0$) de los canónicos o sus negativos correspondientes. Combinando lo anterior ($x_i = 2z_i \lambda_i$) tenemos que

$$\sum_{\mathbf{p}_i \in A} \lambda_i \mathbf{p}_i = \sum_{\mathbf{p}_i \in B} \lambda_i \mathbf{p}_i$$

y

$$\sum_{\mathbf{p}_i \in A} \lambda_i = \sum_{\mathbf{p}_i \in B} \lambda_i = 1.$$

Esto último sucede si y sólo si $\langle A \rangle \cap \langle B \rangle \neq \phi$. Como todos los pasos son reversibles, concluimos la afirmación. •

Para el caso de posición general, obsérvese que R tiene una cara $[A, B]$ de dimensión mayor a $n - d - 2$ si y sólo si $\#(B \setminus A) > n - d - 2$. Esto equivale a la existencia de una partición $A \dagger \overline{B}$ donde $\#(A \cup \overline{B}) < d + 2$. Si S está en posición general, esto último es imposible y se tiene que, como las caras máximas son de dimensión $n - d - 2$,

$$|\mathcal{O} \sqcap \mathcal{L}| = |\mathcal{O} \cap \mathcal{L}|.$$

Por lo tanto R es homeomorfa a la esfera de dimensión $n - d - 2$. ◻

Obsérvese que el último argumento de la demostración implica que los puntos están en posición general si y sólo si \mathcal{L} está en posición general con respecto a \mathcal{O} .

5. Matroides Orientados

El teorema 4 puede ser llevado a una clase más amplia de separoides que se vienen estudiando desde finales de los 60's, los matroides orientados [cf. Edelman (1983)]: *El complejo de Radon del separoide de un matroide orientado es homotópico a una esfera*. Un vistazo más de cerca a este resultado nos permitirá clasificar las gráficas de circuitos (el 1-esqueleto del complejo dual del complejo de Radon) de los matroides orientados uniformes. Un matroide orientado, al ser un separoide, tiene asociado un complejo de Radon que vive en algún hipercubo. ¿Qué complejos “cúbicos” son el complejo de Radon de un matroide orientado?

Sea S un separoide y $G = G(R(S))$ su gráfica de Radon. Si $R(S)$ induce una esfera en Q_n , ésta está hecha de subcubos de alguna dimensión fija (digamos $k = n - d - 2$) y se puede definir el politopo dual, cuyo 1-esqueleto es una gráfica con vértices en los k -subcubos y dos son adyacentes cuando se intersectan en un $(k - 1)$ -subcubo; denotemos dicha gráfica como $G^* \hookrightarrow Q_n^k$. Ésta gráfica es conocida (en el caso de los matroides orientados) como *gráfica de circuitos* —obsérvese que por cada vértice de G^* hay un subcubo de la forma $[A, A \cup C]$, con $|C| = r$ que puede relacionarse a una partición $A \dagger (B \cup C)$, donde B es el complemento de la unión de A y C , $A \dagger B$ es una partición minimal, y cuyos vértices son de la forma $A \cup C' \dagger B \cup C''$, donde $C' \cup C'' = C$.

Se presenta el mismo fenómeno que con la grsmanniana (vista como subesferas de alguna esfera más grande) pero a nivel combinatorio; son subcomplejos esféricos de Q_n , preservan cierta “geodeicidad” al interior de ésta esfera de dimensión $n - 1$. Se antoja demostrar que el encaje de la gráfica de circuitos en el k -dual del n -cubo es *isoantipodal*, i.e., es cerrada por la función antípoda y la noción de distancia (gráfica) de G^* es la que hereda de Q_n^k .

Se estudiarán en detalle los siguientes casos: cuando G es un ciclo de longitud $2n$, es autodual, se puede encajar isoantipodalmente en Q_n y es el complejo de Radon de un matroide orientado uniforme de dimensión $n - 3$; análogamente, si G es una gráfica plana (y se encaja), tiene un dual plano y viene de un matroide de dimensión $n - 4$ [cf. Fukuda et al]. ¿es suficiente que G induzca una esfera para que venga de un matroide orientado? ¿que tanto se puede debilitar esta hipótesis?

0. El criptomorfismo.

En lo que sigue, los separoides (y por tanto los matroides orientados) serán tratados como familias de vectores signados. Para esto, algunas definiciones y la introducción de notación vienen a la orden:

Sea E un conjunto con n elementos y denótese por $\{-, 0, +\}^E$ el conjunto de todos los vectores (signados) con n entradas en $\{-, 0, +\}$. Dado un vector $X = (X_e)_{e \in E}$, el conjunto $X^\pm := \{e \in E : X_e \neq 0\}$ es llamado el *soporte* de X . El *conjunto cero* de X es el complemento del soporte, $X^0 := E \setminus X^\pm = \{e \in E : X_e = 0\}$. El conjunto *de mases* X^+ y el de *menos* X^- tienen la connotación obvia. El *opuesto* $-X$ es definido por $(-X)_e = -(X_e)$.

En la familia de todos los vectores signados, se puede definir un orden parcial como

$$X \leq Y \iff X^+ \subseteq Y^+ \text{ y } X^- \subseteq Y^-.$$

De hecho, este orden parcial es la latiz de caras del n -octaedro, dual del n -cubo (recuérdense las coordenadas baricéntricas usadas para la demostración del teorema 4 y el papel que jugaban las $z_i \in \{-1, 0, 1\}$).

El *separador* de dos vectores X y Y es

$$S(X, Y) := \{e \in E : X_e = -Y_e \neq 0\}.$$

Dados dos vectores signados X y Y con soportes del mismo tamaño ($|X^\pm| = |Y^\pm| < n$), diremos que son *adyacentes* si existen $i, j \in E$ tales que $X_k = Y_k$ para toda $k \notin \{i, j\}$, $X_i = 0 \neq Y_i$ y $Y_j = 0 \neq X_j$.

Esta noción de adyacencia define una gráfica G_n con vértices en la familia de vectores signados y motiva la definición de *mover un cero* de un lugar a otro (que no sea cero) que es un paso en una camino de dicha gráfica. Por tanto la distancia en G_n de un vector a otro es el mínimo número de movimientos de ceros (de pasos) necesarios para llegar al vector destino. De aquí la siguiente definición: el *recorrido* —del inglés *traversal*— de dos vectores X, Y es

$$T(X, Y) := \{e \in E : X_e = 0 \neq Y_e \text{ o } X_e \neq 0 = Y_e\}.$$

Ojo: X y Y son adyacentes si y sólo si $|S(X, Y)| = 0$ y $|T(X, Y)| = 2$.

Esta noción será interpretada de tres maneras diferentes: como adyacencia en la gráfica de circuitos de un matroide orientado; como adyacencia en el k -dual del n -cubo; y como adyacencia de k -subcubos del n -cubo.

Con estas definiciones a la mano, las particiones de Radon de un separoide (E, \dagger) pueden ser codificadas con vectores signados como sigue: $\mathcal{S} \subseteq \{-, 0, +\}^E$ son las particiones de Radon de un separoide si y sólo si

$$\begin{aligned} \circ & \quad X \in \mathcal{S} \implies -X \in \mathcal{S}, \\ \circ \circ \circ & \quad X \in \mathcal{S} \text{ y } X \leq X' \implies X' \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Un *matroide orientado* $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C})$ de orden $n = |E|$ es un conjunto de vectores

$$\mathcal{C} \subseteq \{-, 0, +\}^E,$$

con las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} (C1) & \quad \mathbf{0} \notin \mathcal{C} && (\phi | \phi) \\ (C2) & \quad X \in \mathcal{C} \implies -X \in \mathcal{C} && (\text{simetría}) \\ (C3) & \quad X, Y \in \mathcal{C} \text{ y } X^\pm \subseteq Y^\pm \implies X = \pm Y && (\text{incomparabilidad}) \\ (C4) & \quad X, Y \in \mathcal{C} \text{ y } e \in S(X, Y) \implies \text{existe } Z \in \mathcal{C} \\ & \quad \text{tal que } Z^+ \subseteq X^+ \cup Y^+, Z^- \subseteq X^- \cup Y^- \text{ y } Z_e = 0 && (\text{eliminación débil}) \end{aligned}$$

Los elementos de \mathcal{C} son conocidos como *circuitos* del matroide.

Claramente los circuitos de un matroide orientado son las particiones minimales de algún separoide. Tenemos el siguiente criptomorfismo obvio:

Teorema 6 *Las particiones minimales de Radon (MRP) de un separoide \mathcal{S} son los circuitos de un matroide orientado si y sólo si*

$$\begin{aligned} (M1) & \quad \phi \dagger \phi \notin MRP, \\ (M3) & \quad A \dagger B, C \dagger D \in MRP \text{ y } A \cup B = C \cup D \implies \{A, B\} = \{C, D\}, \\ (M4) & \quad A \dagger B, A' \dagger B' \in MRP \text{ and } x \in A \cap B' \implies \exists A'' \dagger B'' \in MRP \\ & \quad A'' \subseteq A' \cup A \setminus x \text{ and } B'' \subseteq B \cup B' \setminus x. \end{aligned}$$

1. El k -dual del n -cubo.

Todo matroide orientado $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C})$ tiene asociado una gráfica $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{M})$ cuyos vértices son los circuitos del matroide y dos de ellos son adyacentes si sus vectores lo son (recuérdese la definición de adyacencia). Esta gráfica es llamada *gráfica de circuitos* del matroide orientado —de hecho en la literatura, esta gráfica es estudiada via el matroide dual y es mejor conocida como *gráfica de cocircuitos*. Es bien sabido que la gráfica de cocircuitos de un matroide orientado es el 1-esqueleto de la descomposición celular inducida por las pseudoesferas que realizan al matroide orientado via el Teorema de Representación Topológica de Folkman y Lawrence, por tanto dos (co)circuitos X y Y son adyacentes si y sólo si $|S(X, Y)| = 0$ y $|T(X, Y)| = 2$ (recuérdese la definición de mover un cero).

Denotemos por \mathcal{Q}_n^k el k -dual de \mathcal{Q}_n definido como sigue ($k > 0$): los vértices de \mathcal{Q}_n^k son las k -caras de \mathcal{Q}_n y dos son adyacentes si se intersectan en una $(k-1)$ -cara. De ahora en adelante, denotaremos las caras de \mathcal{Q}_n con vectores signados, esto es, una cara $[A, B]$ será denotada por un vector signado X , donde

$$X_i = \begin{cases} + & \text{if } i \in A, \\ 0 & \text{if } i \in B \setminus A, \\ - & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

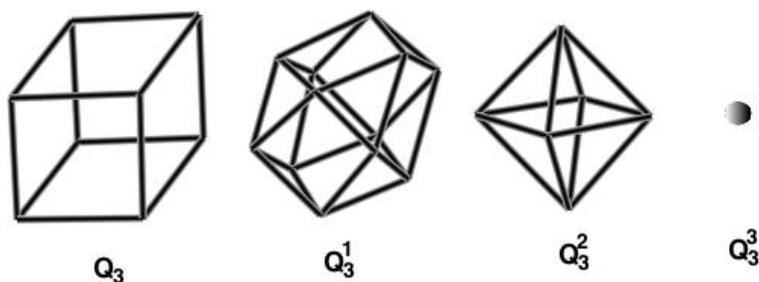


Figura 16. Los tres k -duals de \mathcal{Q}_3 .

Llamamos *automorfismo antipodal* a la función que manda a cada vector X a su opuesto $-X$. Obsérvese que si todos los circuitos de un separoide tienen el mismo tamaño (digamos $n - k$), el 1-esqueleto del complejo dual de su complejo de Radon es una subgráfica de \mathcal{Q}_n^k cerrada por el autormorfismo antipodal.

Lema 6 *La gráfica de circuitos de un matroide orientado uniforme es el 1-esqueleto de su complejo de Radon.*

Demostración. Sea \mathcal{M} un matroide orientado uniforme de orden n y dimensión d , \mathcal{S} su separoide y \mathcal{R} su complejo de Radon. Como \mathcal{M} es uniforme (\mathcal{S} está en posición general), todas las caras de \mathcal{R} son de dimensión $k = n - d - 2$ y por tanto el dual está bien definido. Cada cara $[A, B]$ de \mathcal{R} puede ser identificada con una partición del tipo $A \dagger \overline{B}$ (y viceversa). Ahora, por el Ojo, dos k -subcubos X, Y de \mathcal{Q}_n son “adyacentes” (se intersectan en un $(k - 1)$ -subcubo) si y sólo si $|S(X, Y)| = 0$ y $|T(X, Y)| = 2$. \square

Esta sección termina con el enunciado de dos lemas cuya demostración aparece en el Apéndice —una copia “verbatim” de la última sección de un artículo que escribí junto con Juancho y mandamos al JCT para su publicación.

Lema 7 *La distancia gráfica en \mathcal{Q}_n^k ($k > 0$) es, para $X \neq Y$*

$$d_{\mathcal{Q}_n^k}(X, Y) = \begin{cases} |S(X, Y)| + 1 & \text{if } X^\pm = Y^\pm, \\ |S(X, Y)| + \frac{1}{2}|T(X, Y)| & \text{si no.} \end{cases}$$

Lema 8 *Sea $G \hookrightarrow \mathcal{Q}_n^k$ un encaje isométrico tal que $X^\pm = Y^\pm$ si y sólo si $X = \pm Y$. Dados $X, Y \in V(G)$ dos vértices no-antipodales ($X \neq \pm Y$) y un elemento en su separador $e \in S(X, Y)$, existe un vértice $Z \in V(G)$ tal que $e \in Z^0$, $Z^+ \subseteq X^+ \cup Y^+$ y $Z^- \subseteq X^- \cup Y^-$.*

2. El teorema

Por un encaje $G \hookrightarrow H$ de gráficas entendemos una función inyectiva $i: V(G) \rightarrow V(H)$ de sus vértices que manda aristas en aristas. Más aún, en tal caso, los vértices del dominio serán identificados con aquellos de su imagen. De hecho, nos referiremos a los vértices del dominio con los nombre de sus imagenes. En particular, si la gráfica está encajada en \mathcal{Q}_n^k , sus vértices serán denotados por los vectores signados de sus imagenes. Como es usual, se dirá que un encaje es *isométrico* si la distancia gráfica del dominio es preservada en el codominio.

Teorema 7 Una gráfica \mathcal{G} es la gráfica de circuitos de un matroide orientado uniforme d -dimensional de orden $n > d + 2$ si y sólo si existe un encaje $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{Q}_n^{n-d-2}$ con las siguientes condiciones:

1. $|V(\mathcal{G})| = 2 \binom{n}{d+2}$,
2. \mathcal{G} es cerrada por el automorfismo antipodal de \mathcal{Q}_n^{n-d-2} ,
3. $X \neq \pm Y \in V(\mathcal{G}) \implies d_{\mathcal{G}}(X, Y) = |S(X, Y)| + \frac{1}{2}|T(X, Y)|$,

Demostración. Antes que nada, obsérvese que el Lema 7 implica que la tercera condición es verdadera si y sólo si el encaje es isométrico y no existen dos vértices no-antipodas con el mismo soporte.

Necesidad. Sea \mathcal{M} un matroide orientado uniforme de orden n y dimensión d . Denotemos por \mathcal{S} su separoide y por \mathcal{R} su complejo de Radon. Como \mathcal{M} es uniforme, todas las caras de dimensión máxima (facetas) de \mathcal{R} son $(n - d - 2)$ -cubos. Sea \mathcal{G} la gráfica con vértices $V(\mathcal{G}) = \mathcal{R}^{(n-d-2)}$, las facetas de \mathcal{R} . Claramente \mathcal{G} es la gráfica de circuitos de \mathcal{M} (lema 6) y está encajada en \mathcal{Q}_n^{n-d-2} . Como la relación de separación es simétrica, \mathcal{R} es un complejo antipodal y por tanto \mathcal{G} es cerrada por el automorfismo antipodal de \mathcal{Q}_n^{n-d-2} . Como \mathcal{S} cumple (M3), no existen dos particiones minimales con el mismo soporte y por tanto la distancia es aquella del enunciado (lemma 7). Finalmente, la posición general y (M3) implican que cualesquiera $d + 2$ elementos definen dos particiones minimales simétricas y por tanto 1.

Suficiencia. Sea $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{Q}_n^{n-d-2}$ un encaje con las tres propiedades del enunciado. Queremos construir un matroide orientado uniforme que tenga a \mathcal{G} como gráfica de circuitos. Sea \mathcal{S} el siguiente separoide: para todo vértice $X \in V(\mathcal{G})$, correspondiente a la cara $[A, B] < \mathcal{Q}_n$, defínase la partición mínima de Radon $A \dagger \overline{B}$. Tenemos que probar que el conjunto de todas esas particiones son los circuitos de un matroide orientado uniforme. El axioma (C1) es trivial. Como \mathcal{G} es antipodal, la relación es simétrica y se sigue (C2). Si (C3) no se cumpliera, por el lema 7, la distancia no sería la del enunciado. Para demostrar (C4) aplicamos el lema 8 para exhibir un Z en un camino geodesico de X a Y con las propiedades deseadas. Finalmente la posición general se sigue de que \mathcal{S} es un matroide orientado con exactamente $2 \binom{n}{d+2}$ circuitos. \square

Obsérvese que la hipótesis de uniformidad no puede ser desechada sin agregar un nuevo ingrediente ya que, en tal caso, la gráfica puede no

ser encajable en \mathcal{Q}_n^k . Creemos que debe existir una noción de distancia en la primera subdivisión baricéntrica del cubo que permita enunciar un teorema similar pero para el caso general (no-uniforme).

6. Circo de 3 pistas.

Estaremos trabajando, simultáneamente, en tres categorías diferentes: Las configuraciones de puntos, vistas como funciones lineales o matrices; los separoides, vistos como la estructura combinatoria que son; y los subcomplejos de bolas del n -cubo, visto éste como el orden parcial inducido por los intervalos de la contención natural de la familia de subconjuntos de un conjunto finito.

Dado un separoide S , se le puede asociar un complejo cúbico $R(S)$ donde sus vértices son sus particiones de Radon máximas. Reconstruir el separoide a partir de su complejo de Radon es imposible —varios separoides dan lugar al mismo complejo— no obstante, cualquier complejo cúbico, inducido por sus vértices, que sea antipodal (cerrado por la función antípoda), da lugar a, al menos un separoide. En el caso de que el separoide sea de puntos, no hay lugar a confusión: el complejo de Radon codifica toda la información (ver lemas 4 y 5). Al parecer, éste es también el caso para los matroides orientados pero no contamos con una demostración formal.

Por otro lado, una configuración de puntos puede ser interpretada como una matriz e identificada con la intersección de: el núcleo de la función que ésta define, el plano $\mathbf{1}^\perp$ y el n -octaedro. Como se demostró en el capítulo 4, esta intersección da lugar al complejo dual del complejo de Radon del separoide asociado a dicha configuración. Surge la pregunta ¿cuándo un complejo cúbico es el complejo de Radon de una configuración de puntos? En general esta pregunta sigue sin respuesta, pero los casos $n = d + 2$ y $n = d + 3$ son estudiados en detalle en las siguientes secciones.

El siguiente resultado se sigue directamente del uso de la técnica para la demostración del teorema 4. En él, entendemos por un *filtro* $F \subseteq \mathcal{O}$ un subconjunto cerrado por “supercontenciones”, i.e., si $A \in F$ y $A' \supset A$ entonces $A' \in F$. Además denotamos por \searrow a las retracciones.

Teorema 8 *Un separoide S , visto como un filtro antipodal del octaedro, es de puntos si y sólo si, existe un subespacio K tal que*

$$S \searrow K \cap \mathcal{O} \cap \mathbf{1}^\perp.$$

El caso $n = d + 2$.

$d + 2$ puntos en posición general inducen una única partición que puede ser interpretada como una 0-subesfera del $(d + 2)$ -cubo —un par de puntos antípodos— y, al revés, dados un subconjunto y su complemento se puede contruir una configuración que tenga a dichos subconjuntos como única partición. Esto induce una relación uno-a-uno entre los pares de puntos antípodos del n -cubo (que no sean los representantes del vacío y del total) y las configuraciones de $n = d + 2$ puntos en dimensión d en posición general.

Cuando la posición general se pierde, el complejo de Radon se “hincha” y adquiere caras de dimensión mayor; aristas, cuadrados, cubos, etc. Cada una de estas caras tiene asociado un intervalo en la familia de subconjuntos $[A, A \cup C]$ que a su vez representa una partición de Radon del tipo $A \dagger B \cup C$ —la dimensión de la “hinchazon” está dada por el cardinal de C .

Cinco puntos en el espacio ($5=3+2$):

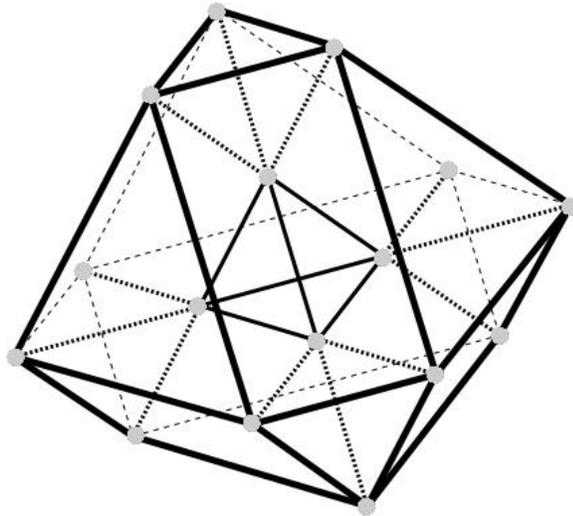


Figura 17. *La poliedrización del espacio proyectivo*

Sin pérdida de generalidad, los primeros cuatro de ellos ($d + 1$), deben formar los vértices de un tetraedro; los planos definidos por cada tres (d) de ellos, parten el espacio en abiertos (y puntos). Entonces el quinto punto puede ser localizado por su posición en el politopo que define

dicha partición —a cada abierto se le puede nombrar con un vector signado que corresponde a los signos de las coordenadas baricéntricas del quinto punto en terminos de la base ordenada que deteminan los cuatro anteriores y dicho vector puede ser identificado con la partición de sus positivos y negativos. Obsérvese que con esta convención, el signo del último es siempre negativo. Si el quinto punto cae en el plano generado por los primeros tres puntos ($d - 1$), las coordenadas baricéntricas de éste tienen un cero en la cuarta posición (el cardinal de C es 1); si cae en una línea, tiene dos ceros ($|C|=2$), etc. Tenemos entoces los siguientes “tipos” de particiones: en posición general —representadas en la grassmanniana por facetas de dimensión 3— $a \dagger bcde, ab \dagger cde$; degeneraciones de primer grado (caras) $a \dagger bcd, ab \dagger cd$; de segundo grado (aristas) $a \dagger bc$; y finalmente dos puntos iguales (vértices) $a \dagger b$. Esto es, el espacio de configuraciones esta integrado por dos tipos de facetas (cinco tetraedros y diez prismas), dos tipos de caras (veinte triángulos y quince cuadrados), un tipo de aristas (treinta de ellas) y un tipo de vértices (diez de ellos). Véase la Figura 17.

Teorema 9 *El espacio de configuraciones de $n = d + 2$ puntos en dimensión d , módulo el grupo afín, es*

$$\mathcal{O}_n \cap \mathbf{1}^\perp / \{-x, x\} = (\mathcal{Q}_n \setminus \{\phi, \bar{\phi}\})^* / \{-x, x\}.$$

Dado que dos configuraciones son equivalentes (módulo la acción del grupo afín) si y sólo si la intersección del nucleo de las funciones que definen con $\mathcal{O}_n \cap \mathbf{1}^\perp$ es la misma, y dado que dicha intersección es una esfera de dimensión 0 ($= n - d - 2$), las configuraciones están en relación uno-a-uno con las parejas de puntos antípodas de $\mathcal{O}_n \cap \mathbf{1}^\perp$. La dualidad con el cubo, está definida en el capítulo 4. \square

El caso $d = 1$.

Para el caso $n = d + 3$ es de gran utilidad entender primero el caso $d = 1$. Las facetas del espacio de configuraciones de éste último, están en biyección con los ordenes lineales y dos son adyacentes si difieren en una permutación de dos elementos consecutivos. Es fácil ver que estas facetas son siempre simplejos. Por otro lado, los vértices corresponden a dos conglomerados de puntos, así que los vértices de cada simplejo

son de la forma

$$\begin{aligned} a &| bcd \dots yz, \\ ab &| cd \dots yz, \\ abc &| d \dots yz, \\ &\dots \\ abcd \dots y &| z, \end{aligned}$$

donde el orden lineal que representa es $abcd \dots yz$. Sabemos además que es un espacio proyectivo de dimensión $n - 2$.

Cuatro puntos en la línea:

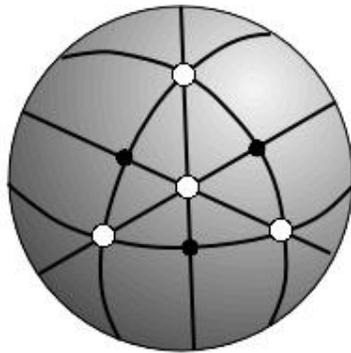


Figura 18. *La poliedrización del plano proyectivo*

En el plano proyectivo, tómanse cuatro puntos en posición general y dibújense las seis líneas que definen cada dos de ellos. Los primeros cuatro puntos representan las configuraciones definidas por una única separación del tipo $a | bcd$. En la intersección de las líneas aparecen tres nuevos vértices que representan las configuraciones definidas por una única separación del tipo $ab | cd$. Hay dos tipos de aristas; seis que unen dos vértices del primer tipo —caracterizadas por tener una partición de Radon del tipo $bc \dagger ad$ — y doce que unen a dos vértices de diferentes tipos —caracterizadas por tener una partición de Radon del tipo $b \dagger acd$. Obsérvese que no hay aristas entre dos vértices del tipo dos. Finalmente, hay 12 caras triangulares que constan de dos vértices del tipo uno y uno del tipo dos. \square

Teorema 10 *El espacio de configuraciones de n puntos en dimensión 1 es*

$$(\mathcal{Q}_n \setminus \{\phi, \bar{\phi}\})' / \{-x, x\}.$$

La estructura de abiertos que definen los $\binom{n}{n-2}$ hiperplanos del espacio proyectivo de dimensión $n-2$ que inducen n puntos en posición general es isomorfa a la primera subdivisión baricéntrica del n -emicubo menos el vacío y el total —el orden parcial en la descomposición de abiertos es $A < B \iff A \subset \partial B$. \square

El caso $n = d + 3$.

Como consecuencia del teorema 4, tenemos que toda configuración de $n = d + 3$ puntos en posición general en dimensión d dan lugar a un encaje $C_{2n} \hookrightarrow \mathcal{Q}_n$ de un ciclo en el cubo, a saber, su complejo de Radon. El lema 4 y 5 implican que dos separoides de puntos son iguales si y sólo si su complejo de Radon lo es. Ahora, por el teorema 7, a cada ciclo antipodal $C_{2n} \hookrightarrow \mathcal{Q}_n$ del cubo, se le puede asociar un matroide orientado uniforme que resulta ser de codimensión 1 y es, por tanto, un separoide de puntos. Finalmente, obsérvese que la condición de que el separoide sea acíclico equivale a que el complejo de Radon no contenga como vértice al conjunto vacío (ni al total). Tenemos entonces que

Teorema 11 *Las facetas (caras de dimensión máxima) del espacio de configuraciones de $n = d + 3$ puntos en el afín d , están en relación uno-a-uno con los ciclos antipodales $C_{2n} \hookrightarrow \mathcal{Q}_n \setminus \{\phi, \bar{\phi}\}$ encajados en el n -cubo.*

En $\mathcal{Q}_3 \setminus \{\phi, \bar{\phi}\}$ sólo hay un ciclo de longitud 6 y corresponde al puntoide con tres elementos.

En $\mathcal{Q}_4 \setminus \{\phi, \bar{\phi}\}$ hay esencialmente un sólo tipo de encajes de C_8 , pero hay tantos como ordenes lineales con 4 elementos. Obsérvese que

$$\{C_8 \hookrightarrow \mathcal{Q}_4 \setminus \{\phi, \bar{\phi}\} : \text{antipodales}\} = \left((\mathcal{Q}_4 \setminus \{\phi, \bar{\phi}\})' / \{-x, x\} \right)^{(2)}.$$

En $\mathcal{Q}_5 \setminus \{\phi, \bar{\phi}\}$ aparecen ya tres tipos de encajes que corresponden a las tres configuraciones de la figura 1.

No es difícil convencerse de que dos facetas del espacio de configuraciones se intersectan en una cara de dimensión uno menor si y sólo si

sus respectivos ciclos difieren en exactamente 2 vértices antípodos. Esto debe conducir a una descripción completa de la estructura combinatoria del espacio de configuraciones. Sin embargo permanece abierta la pregunta: dado el complejo de Radon (o su gráfica de circuitos) ¿cómo reconstruir la configuración de la que viene?

Para el caso en cuestión ($n = d+3$) tenemos una construcción que sabemos que funciona en todos los casos pequeños ($n = 3, 4, 5, 6$) pero no tenemos prueba para el caso general... sin embargo estamos convencidos de que debe funcionar siempre.

Para describir la construcción, regresemos al ejemplo 1.a (ver la figura 5). Obsérvese que, dado el ciclo $C_{10} \hookrightarrow \mathcal{Q}_5$ y un vértice A de éste, el camino del vértice a su antípoda define un orden lineal del conjunto base. En el ejemplo, si comenzamos con el conjunto $A = 02$, uno de los dos caminos a su antípoda es $02, 024, 24, 124, 14, 134$. Este camino define de manera natural el orden 40123 , que son los elementos que cambian en cada paso. Si nos olvidamos por el momento de algún elemento (digamos el 4), la información que nos queda es: una partición minimal $02 \uparrow 13$ y un orden lineal 0123 .

Recordemos la poliedrización del espacio de configuraciones de 4 puntos en la línea. En ésta, hay 4 vértices especiales (los que corresponden a los separoides del tipo $a | bcd$) y cada región (cada triángulo) representa un orden lineal. Si agregamos un quinto punto en la región que representa al orden 0123 y aplicamos una transformación proyectiva para que los otros 4 vértices realicen la partición $02 \uparrow 13$ en el plano afín paralelo a Π que pasa por los canónicos, obtendremos la configuración deseada.

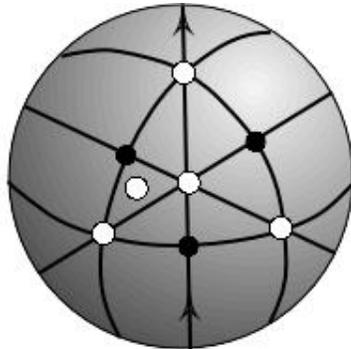


Figura 19. *La realización del pentágono*

Apéndice.

Proof of Lemma 7. Let $X, Y \in V(\mathcal{Q}_n^k)$. First of all, we exhibit a XY -path with the desired length —this will show that the distance in \mathcal{Q}_n^k is at most that of the statement. There are four cases:

Case 1 ($S(X, Y) = \phi$ and $T(X, Y) = \phi$).

This condition is equivalent to $X = Y$.

Case 2 ($S(X, Y) = \phi$ and $T(X, Y) \neq \phi$).

Let $T_0(X, Y) = \{i \in E : X_i = 0 \neq Y_i\}$ (analogously $T_0(Y, X) = \{i \in E : Y_i = 0 \neq X_i\}$). Clearly $T(X, Y) = T_0(X, Y) \cup T_0(Y, X)$ and, since they have the same support size, $|T_0(X, Y)| = |T_0(Y, X)|$. Let us give an arbitrary (but fixed) linear order in both previously defined sets: $T_0(X, Y) = (\tau_1, \dots, \tau_{|T_0(X, Y)|})$ and $T_0(Y, X) = (\pi_1, \dots, \pi_{|T_0(Y, X)|})$. Now, let $\{Z^1, Z^2, \dots, Z^{\frac{1}{2}|T(X, Y)|}\}$ be defined as follows:

$$(Z^m)_i = \begin{cases} Y_i & \text{if } i \in \{\tau_1, \dots, \tau_m, \pi_1, \dots, \pi_m\}, \\ X_i & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Observe that

$$S(X, Z^1) = S(Z^1, Z^2) = \dots = S(Z^{\frac{1}{2}|T(X, Y)|-1}, Y) = \phi,$$

$$|T(X, Z^1)| = |T(Z^1, Z^2)| = \dots = |T(Z^{\frac{1}{2}|T(X, Y)|-1}, Y)| = 2,$$

and $Z^{\frac{1}{2}|T(X, Y)|} = Y$. Therefore, by the remark, $(X, Z^1, Z^2, \dots, Z^{\frac{1}{2}|T(X, Y)|} = Y)$ is a XY -path and its length is $\frac{1}{2}|T(X, Y)|$.

Case 3 ($S(X, Y) \neq \phi$ and $T(X, Y) \neq \phi$).

Let us give an arbitrary (but fixed) linear order in the separator: $S(X, Y) = (\sigma_1, \dots, \sigma_{|S(X, Y)|})$, and let $\{Z^1, Z^2, \dots, Z^{|S(X, Y)|}\}$ be defined as follows:

$$(Z^m)_i = \begin{cases} Y_i & \text{if } i \in \{\tau_1, \sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}\}, \\ 0 & \text{if } i = \sigma_m, \\ X_i & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Observe that,

$$S(X, Z^1) = S(Z^1, Z^2) = \dots = S(Z^{|S(X, Y)|-1}, Z^{|S(X, Y)|}) = \phi,$$

$$|T(X, Z^1)| = |T(Z^1, Z^2)| = \dots = |T(Z^{|S(X,Y)|-1}, Z^{|S(X,Y)|})| = 2.$$

Moreover, $S(Z^{|S(X,Y)|}, Y) = \phi$ and

$$|T(Z^{|S(X,Y)|}, Y)| = |T(X, Y) \setminus \{\tau_1\} \cup \{\sigma_{S(X,Y)}\}| = |T(X, Y)|.$$

Now, construct a $Z^{|S(X,Y)|}Y$ -path as in the previous case. This completes the XY -path of the desired length.

Case 4 ($S(X, Y) \neq \phi$ and $T(X, Y) = \phi$).

Let $i_0 \in X^0 = Y^0$ be arbitrary (but fixed) and let Z^1 defined as follows

$$(Z^1)_i = \begin{cases} 0 & \text{if } i = \sigma_1, \\ + & \text{if } i = i_0, \\ X_i & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Observe that $S(Z^1, Y) = S(X, Y) \setminus \{\sigma_1\}$ and $T(Z^1, Y) = \{\sigma_1, i_0\}$, therefore the previous cases applies.

To end the proof, we have to show that the distance in \mathcal{Q}_n^k is at least that of the statement. We do it by induction.

Let $d: V(\mathcal{Q}_n^k) \times V(\mathcal{Q}_n^k) \rightarrow \mathbb{N}$ be the following function

$$d(X, Y) = \begin{cases} |S(X, Y)| + 1 & \text{if } X^\pm = Y^\pm, \\ |S(X, Y)| + \frac{1}{2}|T(X, Y)| & \text{otherwise.} \end{cases}$$

By the remark it follows that $d(X, Y) = 1$ if and only if $d_{\mathcal{Q}_n^k}(X, Y) = 1$. Let suppose that for every X, Y and for every $m < m_0$, we have that $d(X, Y) = m$ if and only if $d_{\mathcal{Q}_n^k}(X, Y) = m$. Let $(X, Z^1, \dots, Z^{m_0} = Y)$ be a geodesic XY -path (of minimum length). We want to prove that $d(X, Y) \leq m_0$ so, suppose that $d(X, Y) > m_0$.

Since the path is geodesic, it follows that $d_{\mathcal{Q}_n^k}(X, Y) = d_{\mathcal{Q}_n^k}(X, Z^1) + d_{\mathcal{Q}_n^k}(Z^1, Y)$ which by hypothesis implies that $m_0 = 1 + d(Z^1, Y)$ and so $d(X, Y) > 1 + d(Z^1, Y)$.

If we denote as

$$\delta_{XY} = \begin{cases} 1 & \text{if } X^\pm = Y^\pm, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

we can denote $d(X, Y) = |S(X, Y)| + \frac{1}{2}|T(X, Y)| + \delta_{XY}$ including in one equation both cases of its definition. Recall that $X^\pm = Y^\pm$ if and

only if $T(X, Y) = \phi$. With this notation at hand we have that

$$|S(X, Y)| + \frac{1}{2}|T(X, Y)| + \delta_{XY} > 1 + |S(Z^1, Y)| + \frac{1}{2}|T(Z^1, Y)| + \delta_{Z^1Y}.$$

Since X is adjacent to Z^1 , there exist $i, j \in E$ such that for every $\ell \notin \{i, j\}$; $X_\ell = (Z^1)_\ell$, $X_i = 0 \neq (Z^1)_i$ and $X_j \neq 0 = (Z^1)_j$. Then $S(X, Y)$ and $S(Z^1, Y)$, and respectively $T(X, Y)$ and $T(Z^1, Y)$, differs only in the i th and j th coordinates. This motivates the following notation: Given $F \subseteq E$, let $S_F(X, Y) = F \cap S(X, Y)$ and $T_F(X, Y) = F \cap T(X, Y)$. Therefore we have that

$$|S_{ij}(X, Y)| + \frac{1}{2}|T_{ij}(X, Y)| + \delta_{XY} > 1 + |S_{ij}(Z^1, Y)| + \frac{1}{2}|T_{ij}(Z^1, Y)| + \delta_{Z^1Y}.$$

We consider two cases:

Case 1 ($T_{ij}(X, Y) = \phi$).

Since $X_i = 0 \neq (Z^1)_i$ and $X_j \neq 0 = (Z^1)_j$, then $Y_i = 0$ and $Y_j \neq 0$ therefore $\{i, j\} \subset T_{ij}(Z^1, Y)$ and $i \notin S_{ij}(X, Y)$. But

$$2 \geq |S_{ij}(X, Y)| + \frac{1}{2}|T_{ij}(X, Y)| + \delta_{XY} > 1 + |S_{ij}(Z^1, Y)| + \frac{1}{2}|T_{ij}(Z^1, Y)| + \delta_{Z^1Y} \geq 2$$

an obvious contradiction.

Case 2 ($T_{ij}(X, Y) \neq \phi$).

Clearly, in this case, $\delta_{XY} = 0$. Then

$$|S_{ij}(X, Y)| + \frac{1}{2}|T_{ij}(X, Y)| > 1 + |S_{ij}(Z^1, Y)| + \frac{1}{2}|T_{ij}(Z^1, Y)|.$$

Since $X_i = 0$ then $i \notin S_{ij}(X, Y)$, and then $j \in S_{ij}(X, Y)$. Therefore $j \in T_{ij}(Z^1, Y)$ which implies that

$$1 + \frac{1}{2} \geq |S_{ij}(X, Y)| + \frac{1}{2}|T_{ij}(X, Y)| > 1 + |S_{ij}(Z^1, Y)| + \frac{1}{2}|T_{ij}(Z^1, Y)| \geq 1 + \frac{1}{2}$$

a new contradiction.

This concludes the proof. \square

Proof of Lemma 8. Since changing the separator $S(X, Y)$ in a XY -path from one sign to the other requires to move a sign to zero and, after that, to the other sign, then for every element in the separator there exists a vertex Z in the path with a zero in that position. It remains to prove that this vertex works.

Let $(X, Z^1, Z^2, \dots, Z^m = Y)$ be a geodesic path in G . It follows that $d_{\mathcal{Q}_n^k}(X, Y) = 1 + d_{\mathcal{Q}_n^k}(Z^1, Y)$ which by Lemma 7 implies that

$$|S(X, Y)| + \frac{1}{2}|T(X, Y)| + \delta_{XY} = 1 + |S(Z^1, Y)| + \frac{1}{2}|T(Z^1, Y)| + \delta_{Z^1Y}.$$

By an analogous argument to that in proof of Lemma 6, it is easy to see that

$$|S_{ij}(X, Y)| + \frac{1}{2}|T_{ij}(X, Y)| + \delta_{XY} = 1 + |S_{ij}(Z^1, Y)| + \frac{1}{2}|T_{ij}(Z^1, Y)| + \delta_{Z^1Y},$$

where $X_i = 0 \neq (Z^1)_i$ and $X_j \neq 0 = (Z^1)_j$. Since $X \neq \pm Y$ then $\delta_{XY} = 0$ and, because $X_i = 0$ we have that $i \notin S_{ij}(X, Y)$ and therefore

$$1 + \frac{1}{2} \geq |S_{ij}(X, Y)| + \frac{1}{2}|T_{ij}(X, Y)| = 1 + |S_{ij}(Z^1, Y)| + \frac{1}{2}|T_{ij}(Z^1, Y)| + \delta_{Z^1Y}$$

which implies that $|S_{ij}(Z^1, Y)| = \delta_{Z^1Y} = 0$.

In particular this implies that two antipodal vectors belongs to a geodesic path if and only if they are the extreme points of it.

Observe the following contradiction; if $(Z^1)_i \neq Y_i$ then $Y_i = 0 = X_i, i \in T_{ij}(Z^1, Y)$ and so

$$1 \geq |S_{ij}(X, Y)| + \frac{1}{2}|T_{ij}(X, Y)| = 1 + \frac{1}{2}|T_{ij}(Z^1, Y)| \geq 1 + \frac{1}{2}.$$

Therefore $(Z^1)_i = Y_i$.

Since for every $\ell \notin \{i, j\}$, $X_\ell = (Z^1)_\ell$ and $(Z^1)_j = 0$, we have that $(Z^1)^+ \subseteq X^+ \cup Y^+$ and $(Z^1)^- \subseteq X^- \cup Y^-$. Finally, since $Z^1 \neq -Y$ then the previous argument works all over along the path, i.e.

$$(Z^{m+1})^+ \subseteq (Z^m)^+ \cup Y^+ \subseteq X^+ \cup Y^+$$

and

$$(Z^{m+1})^- \subseteq (Z^m)^- \cup Y^- \subseteq X^- \cup Y^-,$$

therefore we have that every Z in the path has the desired property. \square

Bibliografía.

- [1] J. L. Arocha, J. Bracho, L. Montejano, D. Oliveros and R. Strausz, Separoids: their categories and a Borsuck-Ulam type theorem for transversals (Submitted).
- [2] E. Babson, L. Finchi and K. Fukuda, Cocircuit graphs and efficient orientation reconstruction in oriented matroids, *Europ. J. Combinatorics*, OM99 Proceedings (To appear).
- [3] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White and G. M. Ziegler, Oriented Matroids, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, 43, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1993.
- [4] J. Bracho, L. Montejano and D. Oliveros, The topology of the space of transversals through the space of configurations, *Topology and Applications* (to appear).
- [5] J. Bracho, R. Strausz, Separoids and a characterization of linear acyclic oriented matroids, (Submitted).
- [6] J. Bokowski, “Oriented Matroids”, *Handbook of Convex Geometry*, Ed. P. M. Gruber and J. M. Wills, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, The Netherlands 1993, pp. 555-602.
- [7] L. Danzer, B. Grünbaum and V. Klee, “Helly’s theorem and its relative”, *Convexity, Proc. Sypos. Pure Math*, VII, American Math. Soc., Providence, RI 1963, pp. 101-180.
- [8] J. Eckhoff, “Helly, Radon and Carathéodory type theorems”, *Handbook of Convex Geometry*, Ed. P. M. Gruber and J. M. Wills, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, The Netherlands 1993, pp. 389-448.
- [9] P. H. Edelman, The acyclic sets of an oriented matroid, *Jurnal Combinatorial Theory*, Ser B, 36, (1984) 36-31
- [10] L. Finschi and K. Fukuda, Generation of oriented matroids – A graph theoretical approach, *Discrete & Computational Geometry*, (to appear)

- [11] J. Folkman and J. Lawrence, Oriented Matroids, *Jurnal of Combinatorial Theory, Ser. B*, 25, (1978) 199-236.
- [12] K. Fukuda and K. Handa, Antipodal graphs and oriented matroids, *Discrete Mathematics*, 111, (1993) 245-256.
- [13] J. Goodman, R. Pollack and R. Wenger, “Geometric Transversal Theory”, *New Trends in Discrete and Combinatorial Geometry*, Ed. J. Pach, *Algorithms and Combinatorics*, 10, Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 1993, pp. 163-198.
- [14] P. Shor, “Stretchability of pseudolines is NP-hard”, *Applied Geometry and Discrete Mathematics – The Victor Klee Festschrift*, P. Gritzmann, B. Sturmfels, eds., *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 4, American Math. Soc., Providence, RI 1991, pp. 531-554.
- [15] E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York 1966.
- [16] R. Strausz, Separoides, *Situs, serie B*, 5, Universidad Nacional Autónoma de México, México DF (1998) pp. 36-41.
- [17] R. Strausz, On Separoids, Ph. D. Thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, (in preparation).