ÁLGEBRA GEOMÉTRICA
NOTAS DE CURSO

ELHOIM SUMANO RAMÍREZ

(VERSIÓN: ?)

Índice

1. El plano euclidiano real

Denotemos como $\mathbb{R}$ al conjunto de los números reales. Recordemos que $\mathbb{R}$ es un *campo*, más precisamente existen funciones:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x\,y \end{array}$$

llamadas suma y producto, las cuales cumplen las siguientes propiedades:

(i) $x+(y+z)=(x+y)+z$ y $x\,(y\,z)=(x\,y)\,z$ para cualesquiera $x,y,z\in\mathbb{R}$.
(ii) $x+y=y+x$ y $x\,y=y\,x$ para cualesquiera $x,y\in\mathbb{R}$.
(iii) Existen elementos $0,1\in\mathbb{R}$ tales que $x+0=x=0+x$ y $x\,1=x=1\,x$.
(iv) Para todo $x\in\mathbb{R}$, existe un único elemento $-x\in\mathbb{R}$ con la propiedad $x+(-x)=0=(-x)+x$, y existe un único elemento $x^{-1}\in\mathbb{R}$ con la propiedad $x\,(x^{-1})=1=(x^{-1})\,x$.
(v) $x\,(y+z)=x\,y+x\,z$ y $(x+y)\,z=x\,z+y\,z$ para cualesquiera $x,y,z\in\mathbb{R}$.

Denotamos también como $\mathbb{R}^2$ al conjunto de las parejas ordenadas (x,y) donde $x,y\in\mathbb{R}$. Llamamos a $\mathbb{R}^2$ el *plano* (*euclidiano real*). Los elementos de $\mathbb{R}^2$ son llamados *puntos*.

1.1. Línea euclidiana. Recordemos que una *línea* (*recta euclidiana*) ℓ de $\mathbb{R}^2$, es un subconjunto $\ell \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que:

$$\ell \;=\; \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; Ax + By + C = 0 \right\}$$

para algunos $A, B, C \in \mathbb{R}$, donde $A \neq 0$ ó $B \neq 0$. En este caso decimos que $Ax + By + C = 0$ es una *ecuación cartesiana* de ℓ y escribimos $\ell\colon Ax + By + C$.

El siguiente enunciado determina a todas las ecuaciones cartesianas de una línea:

Lema 1.1. *Si $\ell\colon Ax + By + C$ y $\ell'\colon A'x + B'y + C'$ son dos líneas de $\mathbb{R}^2$, entonces $\ell = \ell'$ si y solamente si existe $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tal que $\alpha A = A'$, $\alpha B = B'$ y $\alpha C = C'$.*

Si $\ell\colon Ax + By + C$ es una línea y $P = (x_0, y_0) \in \ell$ es un punto de ella, es decir si se cumple que $Ax_0 + By_0 + C = 0$, decimos que ℓ *pasa por* P. Mostremos:

Corolario 1.2. *Sean $P = (x_0, y_0), Q = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ dos puntos distintos del plano, entonces existe una única línea de $\mathbb{R}^2$ que pasa por P y Q. Más aún, si denotamos a esta línea como ℓ_P^Q entonces $\ell_P^Q\colon (y_1 - y_0)x + (x_0 - x_1)y + (x_1y_0 - y_1x_0)$.*

Demostración. Notemos primero que la línea ℓ_P^Q definida por la ecuación cartesiana $(y_1 - y_0)x + (x_0 - x_1)y + (x_1y_0 - y_1x_0) = 0$ pasa efectivamente por P y Q, pues:

$$(y_1 - y_0)x_0 + (x_0 - x_1)y_0 + (x_1y_0 - y_1x_0) = 0 = (y_1 - y_0)x_1 + (x_0 - x_1)y_1 + (x_1y_0 - y_1x_0)\,.$$

Supongamos por otro lado que $\ell\colon Ax + By + C$ es una línea que pasa por P y Q. Queremos mostrar que $\ell = \ell_P^Q$. Por hipótesis $Ax_0 + By_0 + C = 0$ y $Ax_1 + By_1 + C = 0$, en particular $A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = 0$. Mostremos que la relación $A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = 0$ implica que existe $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tal que $A = \alpha(y_1 - y_0)$ y $B = \alpha(x_0 - x_1)$:

Si $x_0 \neq x_1$: Notemos primero que $B \neq 0$. En efecto, si $B = 0$ entonces $A(x_0 - x_1) = 0$ y $x_0 \neq x_1$ implican que $A = 0$. Esto es una contradicción porque $A \neq 0$ ó $B \neq 0$. Por lo tanto $B \neq 0$. Además $A = \frac{B}{(x_0 - x_1)}(y_1 - y_0)$ y $B = \frac{B}{(x_0 - x_1)}(x_0 - x_1)$, pues $x_0 \neq x_1$. Basta tomar entonces $\alpha = \frac{B}{(x_0 - x_1)} \neq 0$.

Si $x_0 = x_1$: Notemos que como $P \neq Q$, entonces $y_0 \neq y_1$. Por lo tanto $B = 0$, ya que $A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = 0$. En particular $A \neq 0$ y entonces $A = \frac{A}{(y_1 - y_0)}(y_1 - y_0)$ y $B = 0 = \frac{A}{(y_1 - y_0)}(x_0 - x_1)$.

Concluimos que existe $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tal que $A = \alpha(y_1 - y_0)$ y $B = \alpha(x_0 - x_1)$. Se sigue del Lema 1.1 que $(y_1 - y_0)x + (x_0 - x_1)y + \frac{C}{\alpha} = 0$ es una ecuación cartesiana de ℓ. Por otro lado, como ℓ pasa por $P = (x_0, y_0)$ se tiene que:

$$(y_1 - y_0)x_0 + (x_0 - x_1)y_0 + \frac{C}{\alpha} = 0 \qquad \text{es decir} \qquad \frac{C}{\alpha} = x_1y_0 - y_1x_0\,.$$

Por lo tanto $\ell = \ell_P^Q$, pues llegamos a que $(y_1 - y_0)x + (x_0 - x_1)y + (x_1y_0 - y_1x_0)$ es una ecuación cartesiana de la línea ℓ.

$\square$

Si $\ell, \ell' \subseteq \mathbb{R}^2$ son dos líneas, decimos que ℓ y ℓ' son *paralelas* si $\ell \cap \ell = \emptyset$ ó $\ell = \ell'$. En este caso escribimos $\ell \parallel \ell'$. Mostremos el siguiente enunciado (ver el Lema 1.1):

Corolario 1.3. *Si $\ell\colon Ax + By + C$ y $\ell'\colon A'x + B'y + C'$ son dos líneas de $\mathbb{R}^2$, entonces $\ell \parallel \ell'$ si y solamente si existe $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tal que $\alpha A = A'$ y $\alpha B = B'$.*

Demostración. Sean $\ell\colon Ax+By+C$ y $\ell'\colon A'x+B'y+C'$ dos líneas y supongamos que $\alpha A = A'$ y $\alpha B = B'$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Sustituyendo concluimos que $\alpha Ax + \alpha By + C' = 0$ es una ecuación cartesiana de la recta ℓ'. Más aún, por el Lema 1.1 se tiene que $Ax + By + \frac{C'}{\alpha} = 0$ también es una ecuación cartesiana de la recta ℓ', pues $\alpha \neq 0$. Mostremos que $\ell\colon Ax + By + C$ y $\ell'\colon Ax + By + \frac{C'}{\alpha}$ son dos líneas paralelas de $\mathbb{R}^2$. En efecto, notemos que si $(x_0, y_0) \in \ell \cap \ell'$ entonces $C = -Ax_0 - By_0$ y $\frac{C'}{\alpha} = -Ax_0 - By_0$, por lo que $\frac{C'}{\alpha} = C$, es decir $\ell = \ell'$. Si por otro lado no existe $(x_0, y_0) \in \ell \cap \ell'$, entonces $\ell \cap \ell' = \emptyset$.

Recíprocamente, sean $\ell\colon Ax + By + C$ y $\ell'\colon A'x + B'y + C'$ dos líneas paralelas de $\mathbb{R}^2$. Si $\ell = \ell'$ se sigue del Lema 1.1 que existe $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tal que $\alpha A = A'$, $\alpha B = B'$ y $\alpha C = C'$. Supongamos entonces que $\ell \cap \ell' = \emptyset$.

Caso $A = 0$: Entonces $\ell\colon By + C$ donde $B \neq 0$. Se concluye que $\ell = \{(x, \frac{-C}{B}) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Notemos que si $A' \neq 0$ entonces tendríamos que $(\frac{B'C}{BA'} - \frac{C'}{A'}, \frac{-C}{B}) \in \ell \cap \ell'$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $A' = 0$ y $B' \neq 0$. Se sigue entonces que $\alpha = \frac{B'}{B} \neq 0$ cumple que $\alpha A = 0 = A'$ y $\alpha B = B'$.

Caso $A \neq 0 \neq A'$: Sea $\alpha = \frac{A'}{A} \neq 0$. En particular $\alpha A = A'$ y $A'x + \alpha By + \alpha C = 0$ es una ecuación cartesiana de ℓ. Notemos que por hipótesis no existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $A'x_0 + B'y_0 + C' = 0$ y $A'x_0 + \alpha By_0 + \alpha C = 0$, pues $\ell \cap \ell' = \emptyset$. Se concluye que $B' = \alpha B$, pues de lo contrario podríamos encontrar una solución (x_0, y_0). □

Corolario 1.4. *Si $\ell\colon Ax + By + C$ es una línea de $\mathbb{R}^2$ y $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, entonces existe una única línea paralela a ℓ que pasa por P. De hecho $\ell'\colon Ax + By + (-Ax_0 - By_0)$ es la línea paralela a ℓ que pasa por P.*

Demostración. Del Corolario 1.3 se sigue que $\ell'\colon Ax + By + (-Ax_0 - By_0)$ es una línea paralela a ℓ. Más aún, notemos que ℓ' pasa por P pues $Ax_0 + By_0 + (-Ax_0 - By_0) = 0$.

Supongamos que $\ell''\colon A''x + B''y + C''$ es una línea paralela a ℓ que pase por P. Por el Corolario 1.3 existe $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tal que $\alpha A = A''$ y $\alpha B = B''$, por lo que $0 = A''x_0 + B''y_0 + C'' = \alpha(Ax_0 + By_0) + C''$, es decir $C'' = -\alpha(Ax_0 + By_0)$. Concluimos que $\ell''\colon \alpha Ax + \alpha By + \alpha(-Ax_0 - By_0)$, es decir $\ell'' = \ell'$ por el Lema 1.1. □

1.2. Estructura vectorial del plano. Recordemos que el plano $\mathbb{R}^2$ tiene la estructura de un *espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$. Más precisamente, se tienen funciones:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \big((x,y),(z,w)\big) & \mapsto & (x,y)+(z,w) \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \big(\alpha,(x,y)\big) & \mapsto & \alpha\,(x,y) \end{array}$$

definidas como:

$$(x,y) + (z,w) = (x+z, y+w) \qquad \text{y} \qquad \alpha\,(x,y) = (\alpha x, \beta y)\,, \tag{1}$$

y llamadas suma y producto escalar, las cuales cumplen las siguientes propiedades:

(I) $\big((x,y)+(z,w)\big)+(s,t) = (x,y)+\big((z,w)+(s,t)\big)$.
(II) $(x,y)+(z,w) = (z,w)+(x,y)$.
(III) El origen $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ cumple que $(x,y)+(0,0) = (x,y) = (0,0)+(x,y)$ para todo punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
(IV) Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ es un punto arbitrario, entonces $(-x,-y) \in \mathbb{R}^2$ cumple $(x,y)+(-x,-y) = (0,0) = (-x,-y)+(x,y)$.
(V) $1\,(x,y) = (x,y)$ para todo punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
(VI) Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ entonces $(\alpha+\beta)\,(x,y) = \alpha\,(x,y)+\beta\,(x,y)$ y $(\alpha\,\beta)\,(x,y) = \alpha\,\big(\beta\,(x,y)\big)$.
(VII) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $(x,y),(z,w) \in \mathbb{R}^2$ entonces $\alpha\,\big((x,y)+(z,w)\big) = \alpha\,(x,y)+\alpha\,(z,w)$

Con la estructura de espacio vectorial en el plano $\mathbb{R}^2$, llamamos en ocasiones a los elementos de $\mathbb{R}^2$ *vectores* y los denotamos $\overline{u} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. El vector $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ es llamado el *vector nulo* y denotado $\overline{0} = (0,0)$.

Recordemos la forma vectorial de definir las líneas:

Proposición 1.5. *Sean $\overline{u} = (a,b), P = (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, entonces si $a \neq 0$ ó $b \neq 0$, el conjunto:*

$$\Big\{\, t\overline{u}+P = (ta+x_0, tb+y_0) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; t \in \mathbb{R} \,\Big\} \tag{2}$$

es una línea de $\mathbb{R}^2$.

Recíprocamente, si $\ell \subseteq \mathbb{R}^2$ es una línea entonces existen $\overline{u} = (a,b), P = (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ donde $a \neq 0$ ó $b \neq 0$, tales que:

$$\ell \;=\; \Big\{\, t\overline{u}+P = (ta+x_0, tb+y_0) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; t \in \mathbb{R} \,\Big\} \tag{3}$$

Demostración. Sean $\overline{u} = (a,b), P = (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ donde $a \neq 0$ ó $b \neq 0$. Mostremos que (2) es una línea del plano $\mathbb{R}^2$.

Caso $a = 0$: Se tiene entonces que $b \neq 0$. Mostremos que en este caso:

$$\Big\{\, t\overline{u}+P = (x_0, tb+y_0) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; t \in \mathbb{R} \,\Big\} \;=\; \Big\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; x = x_0 \,\Big\}.$$

En efecto, si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ es un punto de la forma $(x,y) = t\overline{u}+P = (x_0, tb+y_0)$ para algún $t \in \mathbb{R}$, se tiene en particular que $x = x_0$. Recíprocamente si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ es un punto tal que $x = x_0$, como $y = tb+y_0$ para $t = \frac{y-y_0}{b}$, concluimos que $(x,y) = t\overline{u}+P = (x_0, tb+y_0)$ para algún $t \in \mathbb{R}$.

Caso $b = 0$: Entonces $a \neq 0$ y se muestra de manera análoga al caso anterior que:

$$\Big\{\, t\overline{u}+P = (ta+x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; t \in \mathbb{R} \,\Big\} \;=\; \Big\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; y = y_0 \,\Big\}.$$

Caso $a \neq 0 \neq b$: Notemos que si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ es un punto de la forma $(x, y) = t\overline{u} + P$ para algún $t \in \mathbb{R}$, entonces $x = ta + x_0$ y $y = tb + y_0$ para alguna $t \in \mathbb{R}$; de donde obtenemos que $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$ (al igualar las $t's$). Por lo tanto:

$$\left\{ t\overline{u} + P = (ta + x_0, tb + y_0) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; bx - ay + (ay_0 - bx_0) = 0 \right\}$$

Sea por otro lado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un punto tal que $bx - ay + (ay_0 - bx_0) = 0$. Se tiene entonces que $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$. De donde $x = ta + x_0$ y $y = tb + y_0$ si definimos $t = \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$. Por lo tanto $(x, y) = t\overline{u} + P$ para algún $t \in \mathbb{R}$, es decir:

$$\left\{ t\overline{u} + P = (ta + x_0, tb + y_0) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} \supseteq \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; bx - ay + (ay_0 - bx_0) = 0 \right\}.$$

Recíprocamente, sea $\ell\colon Ax + By + C$ una línea. Consideremos dos casos:

Caso $A = 0$: Se tiene que $(x_0, y_0) \in \ell$ si y solamente si $By_0 + C = 0$, donde $B \neq 0$ pues ya se tiene que $A = 0$. Por lo tanto $\ell = \left\{ \left(x, -\frac{C}{B}\right) \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$. En particular:

$$\ell = \left\{ t\,(1, 0) + \left(0, -\frac{C}{B}\right) \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

Caso $A \neq 0$: En este caso notemos que $P = \left(-\frac{C}{A}, 0\right)$ y $Q = \left(-\frac{(B+C)}{A}, 1\right)$ son dos puntos distintos de ℓ, pues $A\left(-\frac{C}{A}\right) + B(0) + C = 0$ y $A\left(-\frac{(B+C)}{A}\right) + B(1) + C = 0$.

Por otro lado, la parte que ya mostramos de la Proposición implica que si definimos $\ell' = \left\{ t\,(Q - P) + P \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$, entonces ℓ' es una línea de $\mathbb{R}^2$. Más aún, notemos que $P, Q \in \ell'$ pues se tiene que $0\,(Q - P) = P$ y $(Q - P) + P = Q$. Se sigue que $\ell = \ell' = \left\{ t\,(Q - P) + P \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$, pues de acuerdo al Corolario 1.2 existe una única línea que pasa por P y Q. □

Si $\ell \subseteq \mathbb{R}^2$ es una línea definida como en (3) de la Proposición 1.5, decimos que $t\overline{u} + P$ es una *representación vectorial* de ℓ y escribimos $\ell\colon t\overline{u} + P$.

Notemos que en la prueba de la Proposición 1.5, vimos que $t\,(Q - P) + P$ es la representación vectorial de ℓ_P^Q, la única línea que pasa por P y Q del Corolario 1.2. La siguiente afirmación implica que si $\ell\colon t\,\overline{u} + P$ es una línea del plano, entonces $t\,\overline{u} + Q$ es la representación vectorial de la única línea paralela a ℓ que pasa por Q (ver el Corolario 1.4).

Lema 1.6. *Si $\ell\colon t\,\overline{u} + P$ y $\ell'\colon s\,\overline{v} + Q$ son dos líneas de $\mathbb{R}$, entonces:*

1.- *$\ell = \ell'$ si y solamente si, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ donde $\alpha \neq 0$ tales que $\overline{v} = \alpha\,\overline{u}$ y $Q - P = \beta\,\overline{u}$.*
2.- *$\ell \parallel \ell'$ si y solamente si existe $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tal que $\overline{v} = \alpha\,\overline{u}$.*

Demostración. Mostremos 1. Supongamos primero que existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ donde $\alpha \neq 0$ tales que $\overline{v} = \alpha\,\overline{u}$ y $Q - P = \beta\,\overline{u}$. Queremos mostrar que $\ell = \ell'$. En efecto, si $t\,\overline{u} + P \in \ell$ entonces:

$$t\,\overline{u} + P = \frac{t}{\alpha}\,\overline{v} + Q - \frac{\beta}{\alpha}\,\overline{v} = \left(\frac{t - \beta}{\alpha}\right)\overline{v} + Q \in \ell'\,.$$

Por otro lado si $s\,\overline{v} + Q \in \ell'$ entonces:

$$s\,\overline{v} + Q = (s\alpha)\,\overline{u} + P + \beta\,\overline{u} = (s\alpha + \beta)\,\overline{u} + P \in \ell\,.$$

Recíprocamente supongamos que $\ell = \ell'$, es decir supongamos que:

$$\left\{ t\overline{u} + P \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s\overline{v} + Q \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\}.$$

En particular, $Q = t_0\,\overline{u} + P$ para alguna $t_0 \in \mathbb{R}$ y $\overline{v} + Q = t_1\,\overline{u} + P$ para alguna $t_1 \in \mathbb{R}$. Se sigue que $Q - P = t_0\,\overline{u}$ y $\overline{v} = (t_1 - t_0)\,\overline{u}$. Más aún $t_1 - t_0 \neq 0$ pues se tiene que $\overline{v} \neq \overline{0}$.

Mostremos 2. Para ello supongamos primero que existe $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tal que $\overline{v} = \alpha\,\overline{u}$. Queremos mostrar que $\ell = \ell'$ ó $\ell \cap \ell' = \emptyset$. Notemos que si $\ell \cap \ell' = \emptyset$, ya terminamos. Supongamos entonces que existe $(x_0, y_0) \in \ell \cap \ell'$, es decir $t_0\overline{u} + P = (x_0, y_0) = s_0\overline{v} + Q$ para algunos $s_0, t_0 \in \mathbb{R}$. Se sigue que entonces que:

$$Q - P \;=\; t_0\overline{u} - s_0\overline{v} \;=\; t_0\overline{u} - (s_0\alpha)\overline{u} \;=\; (t_0 - s_0\alpha)\overline{u}\,.$$

Por lo tanto $\ell = \ell'$ por la parte del Lema que ya demostramos.

Supongamos ahora que $\ell \parallel \ell'$. Si $\ell = \ell'$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tal que $\overline{v} = \alpha\,\overline{u}$ por la parte del Lema que ya mostramos. Tenemos entonces que $\ell\colon t\,\overline{u} + P$ y $\ell'\colon s\,\overline{v} + Q$ son dos líneas tales que $\ell \cap \ell' = \emptyset$. De manera explícita, si $\overline{u} = (a, b), \overline{v} = (c, d), P = (x_0, y_0)$ y $Q = (x_1, y_1)$ tenemos que no existen $s_0, t_0 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$t_0 a + x_0 = s_0 c + x_1 \qquad \text{y} \qquad t_0 b + y_0 = s_0 d + y_1\,.$$

Caso $a \neq 0$: Entonces no existen $s_0, t_0 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$bt_0 - \frac{bc}{a}s_0 = \frac{bx_1}{a} - \frac{bx_0}{a} \qquad \text{y} \qquad bt_0 - ds_0 = y_1 - y_0\,.$$

Lo que implica que $d = \left(-\frac{c}{a}\right) b$. Como $c = \left(-\frac{c}{a}\right) a$, entonces $\overline{v} = \alpha\overline{u}$ donde $\alpha = \left(-\frac{c}{a}\right)$. Más aún $\alpha \neq 0$ pues $\overline{v} \neq \overline{0}$.

Caso $b \neq 0$: Mostramos de manera análoga al caso anterior, que $\overline{u} = \beta\overline{v}$ para algún $\beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Entonces $\overline{v} = \frac{1}{\beta}\overline{u}$ donde $\frac{1}{\beta} \neq 0$. $\square$

Recordemos finalmente la interpretación geométrica del producto escalar y de la suma de vectores en el plano:

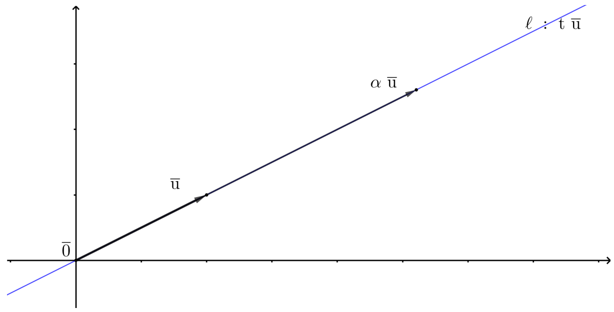
Producto escalar de un vector fijo: Sea $\overline{u} \in \mathbb{R}^2$ un vector del plano. Si $\overline{u} = \overline{0}$, entonces los múltiplos escalares de $\overline{u}$ también son el vector nulo, pues $\alpha\,(0, 0) = (\alpha\,0, \alpha, 0) = (0, 0)$.

Supongamos que $\overline{u} \neq \overline{0}$, entonces la línea de representación paramétrica $t\,\overline{u}$ es la única línea que pasa por $\overline{0}$ y $\overline{u}$. Esto es una consecuencia del Corolario 1.2 pues $\overline{0} = 0\,\overline{u}$ y $\overline{u} = 1\,\overline{u}$.

En palabras, los múltiplos escalares de un vector $\overline{u}$ no nulo son los puntos de la única línea del plano por $\overline{0}$ y $\overline{u}$:

Suma de dos vectores: Sean $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^2$ dos vectores del plano. Notemos que si los tres puntos del plano $\overline{0}$, $\overline{u}$ y $\overline{v}$ pasan por una línea ℓ (ver el Ejercicio 6), entonces $\overline{u} + \overline{v} \in \ell$. En efecto, si por ejemplo $\overline{v} = \alpha\,\overline{u}$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\overline{u} + \overline{v} = (1 + \alpha)\,\overline{u}$.

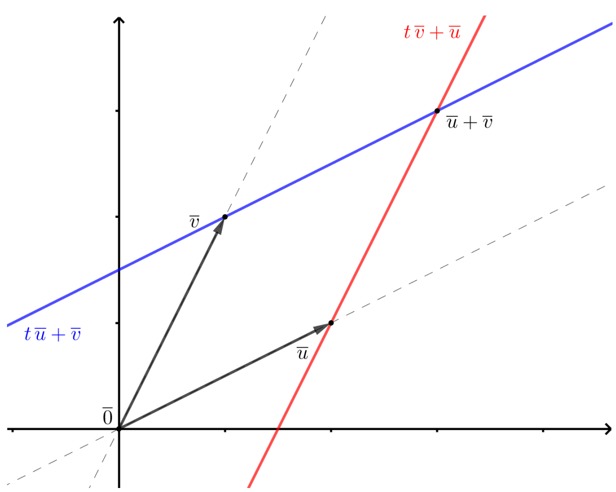
Supongamos por el contrario que los tres puntos $\overline{0}$, $\overline{u}$ y $\overline{v}$ no pasan por una misma línea (*i.e.* supongamos que no son colineales, ver el Ejercicio 6). Consideremos la línea $\ell\colon t\overline{u} + \overline{v}$, es decir ℓ es la única línea que pasa por $\overline{v}$ y que es paralela a la única línea que pasa por $\overline{0}$ y $\overline{u}$.



Análogamente, sea $\ell'\colon s\overline{v}+\overline{u}$ la única línea que pasa por $\overline{u}$, paralela a la única línea que pasa por los puntos $\overline{0}$ y $\overline{v}$.

Notemos que $\overline{u}+\overline{v}\in\ell\cap\ell'$. Más aún, si $(x_0,y_0)\in\ell\cap\ell'$, es decir si $t_0\overline{u}+\overline{v}=(x_0,y_0)=s_0\overline{v}+\overline{u}$ para algunos $t_0,s_0\in\mathbb{R}$, entonces $(t_0-1)\,\overline{u}=(s_0-1)\,\overline{v}$. Notemos que si $t_0\neq 1$ entonces $\overline{u}=\frac{(s_0-1)}{(t_0-1)}\,\overline{v}$, lo cual es imposible porque $\overline{0}$, $\overline{u}$ y $\overline{v}$ no son colineales. Se deduce así que $t_0=1=s_0$, es decir $(x_0,y_0)=\overline{u}+\overline{v}$. Por lo tanto $\ell\cap\ell'=\{\overline{u}+\overline{v}\}$.

En resumen, si $\overline{0}$, $\overline{u}$ y $\overline{v}$ no pasan por un misma línea, los puntos $\overline{0}$, $\overline{u}$, $\overline{v}$ y $\overline{u}+\overline{v}$ son los vértices de un paralelogramo en el plano $\mathbb{R}^2$:



1.3. Transformaciones lineales. Recordemos que una *transformación lineal* del plano $\mathbb{R}^2$ es una función $T\colon\ \mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ que cumple las propiedades:

(i) $T(\overline{u}+\overline{v})=T(\overline{u})+T(\overline{v})$ para cualesquiera $\overline{u},\overline{v}\in\mathbb{R}$.
(ii) $T\big(\alpha\,\overline{u}\big)=\alpha\,T(\overline{u})$ para cualquier $\alpha\in\mathbb{R}$ y $\overline{u}\in\mathbb{R}^2$.

Si denotamos como $\mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R})$ al conjunto de las matrices de 2 por 2 con coeficientes reales, se tiene una asignación:

$$\mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R})\ \longrightarrow\ \Big\{\,T\colon\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2\ \Big|\ T\text{ es una función}\,\Big\}\qquad(4)$$

que a cada matriz $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ asocia la siguiente función del plano:

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{T_A} \mathbb{R}^2 \qquad \text{definida como} \quad T_A(x,y) = \big(ax+cy, bx+dy\big)\,. \tag{5}$$

El siguiente enunciado afirma que la función (4) identifica a las matrices de 2 por 2 con coeficientes reales con las transformaciones lineales del plano real.

Proposición 1.7. *La función* (5) *es una transformación lineal para toda matriz A. Más aún, si $T\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal entonces existe una única matriz con coeficientes reales $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, tal que $T = T_A$.*

Demostración. Mostremos que si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ es una matriz con coeficientes reales, entonces (5) define una función lineal del plano. En efecto, si $\overline{u} = (x_0, y_0), \overline{v} = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que:

$$\begin{aligned} T_A(\overline{u}+\overline{v}) = T_A(x_0+x_1, y_0+y_1) =& \big(a(x_0+x_1)+c(y_0+y_1), b(x_0+x_1)+d(y_0+y_1)\big) \\ =& (ax_0+ax_1+cy_0+cy_1, bx_0+bx_1+dy_0+dy_1) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} T_A(\overline{u})+T_A(\overline{v}) = T_A(x_0,y_0)+T_A(x_1,y_1) =& (ax_0+cy_0, bx_0+dy_0)+(ax_1+cy_1, bx_1+dy_1) \\ =& (ax_0+cy_0+ax_1+cy_1, bx_0+dy_0+bx_1+dy_1)\,, \end{aligned}$$

por lo que $T_A(\overline{u}+\overline{v}) = T_A(\overline{u})+T_A(\overline{v})$.

Por otro lado si $\overline{u} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$T_A(\alpha\,\overline{u}) = T(\alpha x_0, \alpha y_0) = (a\alpha x_0 + c\alpha y_0, b\alpha x_0 + d\alpha y_0)$$

y

$$\alpha\, T_A(\overline{u}) = \alpha\, T_A(x_0,y_0) = \alpha\,(ax_0+cy_0, bx_0+dy_0) = (\alpha a x_0 + \alpha c y_0, \alpha b x_0 + \alpha d y_0)\,,$$

es decir $T_A(\alpha\,\overline{u}) = \alpha\, T_A(\overline{u})$.

Supongamos ahora que $T\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal. Notemos que si $\overline{u} = (x_0, y_0)$ es un punto del plano, entonces podemos escribir:

$$\overline{u} = (x_0, y_0) = x_0\,(1,0) + y_0\,(0,1)\,.$$

Por lo que:

$$T(\overline{u}) = T(x_0,y_0) = T\big(x_0\,(1,0)+y_0\,(0,1)\big) = x_0\,T(1,0) + y_0\,T(0,1)\,,$$

es decir la imagen de $\overline{u}$ bajo la función T está determinada por las imágenes $T(1,0)$ y $T(0,1)$.

Si denotamos como $T(1,0) = (a,b)$ y $T(0,1) = (c,d)$ tenemos entonces que:

$$T(x_0,y_0) = x_0\,(a,b) + y_0\,(c,d) = \big(ax_0+cy_0, bx_0+dy_0\big) = T_A(x_0,y_0)$$

donde $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Sean ahora $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ y $A' = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$ dos matrices con coeficientes reales, tales que $T_A(x_0, y_0) = T_{A'}(x_0, y_0)$ para todo punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. En particular, si tomamos $(x_0, y_0) = (1, 0)$ y $(x_0, y_0) = (0, 1)$ tenemos que:

$$(a, b) = T_A(1, 0) = T_{A'}(1, 0) = (a', b') \qquad \text{y} \qquad (c, d) = T_A(0, 1) = T_{A'}(0, 1) = (c', d')\,,$$

es decir $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ y $d = d'$. Por lo tanto $A = A'$. □

Notemos que si $T_A\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es la transformación lineal asociada a la matriz $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, entonces la imagen del eje x y del eje y bajo la función T_A es igual a los siguientes conjuntos:

$$T_A(\text{eje } x) \;=\; \Big\{\, T_A(x, 0) = x\,(a, b) \;\Big|\; x \in \mathbb{R} \,\Big\} = \begin{cases} \{(0, 0)\} & \text{si} \quad (a, b) = (0, 0) \\ \ell\colon t\,(a, b) & \text{si} \quad (a, b) \neq (0, 0) \end{cases}$$

y

$$T_A(\text{eje } y) \;=\; \Big\{\, T_A(0, y) = y\,(c, d) \;\Big|\; y \in \mathbb{R} \,\Big\} = \begin{cases} \{(0, 0)\} & \text{si} \quad (c, d) = (0, 0) \\ \ell\colon t\,(c, d) & \text{si} \quad (c, d) \neq (0, 0)\,, \end{cases}$$

respectivamente.

Más generalmente, si $m\colon t\,(1, 0) + (0, y_0)$ y $m'\colon t\,(0, 1) + (x_0, 0)$ son líneas paralelas al eje x y al eje y respectivamente, entonces:

$$T_A(m) \;=\; \Big\{\, t\,(a, b) + T_A(0, y_0) \;\Big|\; t \in \mathbb{R} \,\Big\} = \begin{cases} \{T_A(0, y_0)\} & \text{si} \quad (a, b) = (0, 0) \\ \ell\colon t\,(a, b) + T_A(0, y_0) & \text{si} \quad (a, b) \neq (0, 0) \end{cases}$$

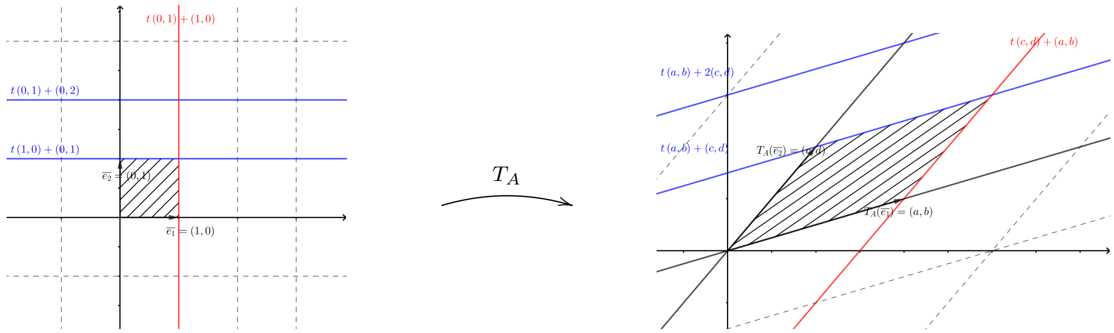
y

$$T_A(m) \;=\; \Big\{\, t\,(c, d) + T_A(x_0, 0) \;\Big|\; t \in \mathbb{R} \,\Big\} = \begin{cases} \{T_A(x_0, 0)\} & \text{si} \quad (c, d) = (0, 0) \\ \ell\colon t\,(c, d) + T_A(x_0, 0) & \text{si} \quad (c, d) \neq (0, 0)\,. \end{cases}$$

En resumen, cuando los tres puntos $(0, 0)$, (a, b) y (c, d) no pasan por una misma línea (ver el Ejercicio 6 y la Proposición 1.9), la acción de T_A en el plano puede visualizarse como en la siguiente figura:

Ejemplos:

(i) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ entonces T_A es la función identidad del plano $\mathbb{R}^2$.



(II) Para cada número real $\alpha > 0$ tal que $\alpha \neq 1$, la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ induce la transformación lineal del plano:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{T_A = \mathrm{H}_{\overline{0},\alpha}} & \mathbb{R}^2 \\ \overline{u} = (x,y) & \longmapsto & \alpha\overline{u} = (\alpha x, \alpha y) \end{array}$$

a la que llamamos la *homotecia en el origen de razón* α.

(III) La transformación lineal inducida por la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{T_A = \mathrm{ROT}_{\overline{0},\pi}} & \mathbb{R}^2 \\ \overline{u} = (x,y) & \longmapsto & -\overline{u} = (-x, -y) \end{array}$$

es llamada la *rotación en el origen de ángulo* π *radianes.*

(IV) La matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ induce una transformación lineal:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{T_A = \mathrm{ROT}_{\overline{0},\pi/2}} & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (-y, x) \end{array}$$

a la que llamamos la *rotación en el origen de ángulo* $\pi/2$ *radianes.*

Si $\overline{u} = (x,y)$ es un vector del plano, denotamos $\overline{u}^{\perp} = (-y,x) = \mathrm{ROT}_{\overline{0},\pi/2}(\overline{u})$ y llamamos a $\overline{u}^{\perp}$ *el vector ortogonal a la izquierda de* $\overline{u}$.

La transformación lineal inducida por la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{T_A = \mathrm{ROT}_{\overline{0},3\pi/4}} & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y, -x) \end{array}$$

es la *rotación en el origen de ángulo* $3\pi/2$ *radianes.*

(V) Notemos que la rotación en el origen de ángulo $\pi/4$ radianes sería la transformación lineal T_A asociada a una matriz de la forma $A = \begin{pmatrix} a & -a \\ a & a \end{pmatrix}$ donde $a \geq 0$ y con la propiedad:

$$T_{A\,A} = T_A \circ T_A = \mathrm{ROT}_{\overline{0},\pi/2} \qquad (\text{ver el Ejercicio 9})\,,$$

es decir tal que:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2a^2 \\ 2a^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -a \\ a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -a \\ a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

por lo que $a = 1/\sqrt{2}$.

Definimos la *rotación en el origen de ángulo* $\pi/4$ *radianes* como la transformación lineal:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{T_A = \mathrm{Rot}_{\overline{0},\pi/4}} & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & 1/\sqrt{2}(x-y, x+y) \end{array}$$

asociada a la matriz $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Las *rotaciones en el origen de ángulo* $3\pi/4$, $5\pi/4$ y $7\pi/4$ son las transformaciones lineales asociadas a las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

respectivamente.

(VI) Definimos las *reflexiones respecto del eje* x y *respecto del eje* y como las transformaciones lineales:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{T_A = \mathrm{Ref}_{\text{eje } x}} & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,-y) \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{T_B = \mathrm{Ref}_{\text{eje } y}} & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (-x,y) \end{array}$$

inducidas por las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, respectivamente.

Las transformaciones lineales asociadas a las matrices $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{T_C = \mathrm{Ref}_{\ell}} & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,x) \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{T_D = \mathrm{Ref}_{\ell'}} & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (-y,-x) \end{array}$$

son llamadas las *reflexiones respecto de la línea* $\ell \colon t(1,1)$ y *respecto de la línea* $\ell' \colon s(-1,1)$, respectivamente.

1.3.1. Núcleo e imagen. El conjunto de todas las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ se pueden dividir en tres tipos: La transformación lineal cero (ver la Observación 1.8), las transformaciones lineales invertibles (ver la Proposición 1.9) y las "proyecciones en una línea"(ver la Proposición 1.10 y el Ejercicio 20).

Para profundizar sobre esta división recordemos que si $T \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal, el *núcleo de* T es el siguiente subconjunto del plano:

$$\ker(T) = \left\{ \overline{u} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; T(\overline{u}) = \overline{0} \right\}$$

Notemos:

Observación 1.8. *Si* $T_A\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *es la transformación lineal asociada a la matriz* $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, *es fácil mostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:*

1.- T_A *es la función constante cero, es decir* $T_A(x, y) = (0, 0)$ *para todo* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2.- $\ker(T_A) = \mathbb{R}^2$.

3.- *La imagen de* T_A *consiste únicamente del vector cero:* $\operatorname{im}(T_A) = \{\overline{0}\}$.

4.- $a = b = c = d = 0$.

Mostremos:

Proposición 1.9. *Si* $T_A\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *es la transformación lineal asociada a la matriz* $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, *entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1.- T_A *es una función biyectiva.*

2.- $\ker(T_A) = \{\overline{0}\}$, *es decir* T_A *es una función inyectiva (ver el Ejercicio 11).*

3.- T_A *es una función sobre:* $\operatorname{im}(T_A) = \mathbb{R}^2$.

4.- *Los puntos* $(0, 0)$, (a, b) *y* (c, d) *no son colineales, es decir no existe una línea del plano que pase por estos tres puntos (ver el Ejercicio 6).*

5.- *El* determinante *de* A *definido como* $\det(A) = ad - bc$ *es distinto de cero:* $\det(A) \neq 0$.

Más aún, en este caso la función inversa de T_A *es la transformación lineal asociada a la matriz* $\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-c}{ad-bc} \\ \frac{-b}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$.

Demostración. □

Finalmente tenemos:

Proposición 1.10. *Si* $T_A\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *es la transformación lineal asociada a la matriz* $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, *entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1.- T_A *no es una función biyectiva y no es la función cero.*

2.- $\ker(T_A)$ *es una línea.*

3.- $\operatorname{im}(T_A)$ *es una línea.*

4.- *Existe un única línea del plano que pase por los tres puntos* $(0, 0)$, (a, b) *y* (c, d). *Dicho de otro modo, al menos uno de los vectores* (a, b) *y* (c, d) *no es cero, y los puntos* $(0, 0)$, (a, b) *y* (c, d) *son colineales.*

5.- $\det(A) = ad - bc = 0$ *y al menos uno de los números reales* a, b, c, d *es no cero.*

En particular, en este caso A *es de la forma* $\begin{pmatrix} a & \lambda\, a \\ b & \lambda\, b \end{pmatrix}$ *donde* $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{\overline{0}\}$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$, *ó* A *es de la forma* $\begin{pmatrix} \lambda\, c & c \\ \lambda\, d & d \end{pmatrix}$ *donde* $(c, d) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{\overline{0}\}$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(ver el Ejercicio 20).*

1.4. Ejercicios.

1.- Haz una prueba del Lema 1.1.

2.- Mostrar que si ℓ y ℓ' son dos líneas de $\mathbb{R}^2$, entonces ℓ y ℓ' no son paralelas si y solamente si $\ell \cap \ell'$ consiste de un único punto.

3.- Si $\ell, \ell', \ell'' \subseteq \mathbb{R}^2$ son tres líneas del plano tales que $\ell \parallel \ell'$ y $\ell' \parallel \ell''$, mostrar que $\ell \parallel \ell''$.

4.- Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto A y que es paralela a la recta ℓ donde:

$$A = (5,3)\,,\ \ \ell\colon x{-}y{+}1 = 0\,; \quad A = (1,7)\,,\ \ \ell\colon 4x{+}y{-}11 = 0\,; \quad A = (-3,1)\,,\ \ \ell\colon x{-}5y{+}2 = 0\,.$$

5.- Determinar la representación vectorial de la recta con ecuación cartesiana:

$$4x - 3y + 1 = 0\,, \qquad 4x - 3y + 1 = 0\,, \qquad x + 3y - 1 = 0 \quad \text{y} \quad 2x - 3y - \frac{1}{2} = 0\,,$$

6.- Mostrar que si $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^2$ son vectores, las siguientes condiciones son equivalentes:

a) Los puntos $\overline{0}$, $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son *colineales*, es decir existe una línea $\ell \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $\overline{0}, \overline{u}, \overline{v} \in \ell$.

b) Existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma\,\overline{u} = \overline{v}$ ó existe $\delta \in \mathbb{R}$ tal que $\delta\,\overline{v} = \overline{u}$.

c) $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son vectores *linealmente dependientes*, es decir existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha\,\overline{u} + \beta\overline{v} = \overline{0}$, donde $\alpha \neq 0$ ó $\beta \neq 0$.

y también las siguientes condiciones son equivalentes:

a') Los puntos $\overline{0}$, $\overline{u}$ y $\overline{v}$ no son colineales, es decir no existe una línea $\ell \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $\overline{0}, \overline{u}, \overline{v} \in \ell$.

b') $\overline{u} \neq \overline{0}$ y $\overline{v}$ no pertenece a la única línea que pasa por $\overline{0}$ y $\overline{u}$.

c') $\overline{v} \neq \overline{0}$ y $\overline{u}$ no pertenece a la única línea que pasa por $\overline{0}$ y $\overline{v}$.

d') $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son vectores *linealmente independientes*, es decir si $\alpha\,\overline{u} + \beta\,\overline{v} = \overline{0}$ para algunos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha = \beta = 0$.

7.- De manera análoga al Ejercicio anterior, mostrar que si $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^2\backslash\big\{\overline{0}\big\}$ son vectores no nulos las siguientes condiciones son equivalentes:

a) Los puntos $\overline{0}$, $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son colineales, es decir existe una línea $\ell \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $\overline{0}, \overline{u}, \overline{v} \in \ell$.

b) Existe $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\big\{0\big\}$ tal que $\alpha\,\overline{u} = \overline{v}$.

c) Existe $\beta \in \mathbb{R}\backslash\big\{0\big\}$ tal que $\beta\,\overline{u} = \overline{v}$.

d) $\gamma\,\overline{u} + \delta\,\overline{v} = \overline{0}$ para algunos $\gamma, \delta \in \mathbb{R}\backslash\big\{0\big\}$.

8.- Si $T, T'\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ son dos transformaciones lineales, muestra que la composición $T' \circ T$ definida como $T' \circ T(\overline{u}) = T'\big(T(\overline{u})\big)$ y la *suma* $T' + T$ definida como $T' + T(\overline{u}) = T'(\overline{u}) + T(\overline{u})$, son transformaciones lineales.

9.- Si $T_A, T_B\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ son las transformaciones lineales asociadas a las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}\,,$$

determina matrices C y D tales que $T_C = T_A \circ T_B$ y $T_D = T_A + T_B$ (ver el Ejercicio anterior).

10.- Sea $T_A\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal asociada a la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Dibuja las siguientes líneas y sus imágenes bajo T_A:

$$\ell_1 :\ y = 0 \qquad \ell_2 :\ y = 1 \qquad \ell_3 :\ x = 0 \qquad \ell_4 :\ x = 1 \qquad \ell_5 :\ x - 2y - 5 = 0\,.$$

11.- Si $T\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal, muestra que $\ker(T) = \{\overline{0}\}$ si y solamente si T es una función inyectiva.

12.- Si $0 < \alpha, \beta \neq 1$ son números reales, muestra que $\mathrm{H}_{\overline{0},\alpha} \circ \mathrm{H}_{\overline{0},\beta} = \mathrm{H}_{\overline{0},\alpha\beta} = \mathrm{H}_{\overline{0},\beta} \circ \mathrm{H}_{\overline{0},\alpha}$, donde $\mathrm{H}_{\overline{0},\alpha}$ denota a la homotecia en el origen de razón α.

Más aún, si $T\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal, verifica que $T \circ \mathrm{H}_{\overline{0},\alpha} = \mathrm{H}_{\overline{0},\alpha} \circ T$. Recíprocamente, si A es una matriz tal que $T_A \circ T = T \circ T_A$ para toda transformación lineal $T\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, muestra que $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$.

13.- Recuerda que si $f\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una función, definimos f^0 como la función identidad del plano y $f^n = f \circ f^{n-1}$ para todo número natural $n > 0$. Determina para cada $n \in \mathbb{N}$ matrices A_n y B_n tales que: $\mathrm{ROT}^n_{\overline{0},3\pi/2} = T_{A_n}$ y $\mathrm{ROT}^n_{\overline{0},5\pi/4} = T_{B_n}$.

14.- Sean $T_A, T_B, T_C, T_D\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ las reflexiones definidas en el Ejemplo (VI) de arriba. Determina matrices E_1, E_2, E_3 y E_4 tales que:

$$T_{E_1} = T_B \circ T_A\,, \qquad T_{E_2} = T_A \circ T_B\,, \qquad T_{E_3} = T_D \circ T_C \quad \text{y} \quad T_{E_4} = T_C \circ T_D\,.$$

15.- Si $T\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es la reflexión respecto de la línea de representación vectorial $t(-1,1)$ (ver el Ejemplo (VI) de arriba), determina el conjunto de los *puntos fijos de* T:

$$\mathrm{Fix}(T) = \left\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; T(x,y) = (x,y) \,\right\}$$

y las líneas $\ell \subseteq \mathbb{R}^2$ *en la traza de* T, es decir tales que $T(\ell) = \ell$.

16.- Si $\overline{u} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, muestra que $(\alpha\,\overline{u})^\perp = \alpha\,(\overline{u}^\perp)$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ y determina las coordenadas de la siguiente sucesión infinita de vectores: $\overline{u}$, $\overline{u}^\perp$, $(\overline{u}^\perp)^\perp$, $\ldots$.

17.- Si $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^2$, muestra que $\overline{0}$, $\overline{u}$ y $\overline{v}^\perp$ son colineales si y solamente si $\overline{0}$, $\overline{u}^\perp$ y $\overline{v}$ son colineales.

18.- Si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ es una matriz con coeficientes reales tales que $0 < c < a$ y $0 < b < d$, muestra que $\det(A)$ es el área del paralelogramo $(0,0)$, (a,b), (c,d) y $(a+c, b+d)$.

19.- Muestra que $\det(A\,B) = \det(A)\det(B)$ donde $A\,B$ es la matriz C del Ejercicio 6.

20.- Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ donde $(a,b) \neq (0,0)$. Si $T_A\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es la transformación lineal asociada a la matriz $A = \begin{pmatrix} a & \lambda\,a \\ b & \lambda\,b \end{pmatrix}$ (ver la Proposición 1.10):

a) Determina una ecuación cartesiana de las líneas $\mathrm{im}(T_A)$ y $\ker(T_A)$.

b) Verifica que si ℓ es una linea paralela a $\ker(T_A)$, entonces $T_A(\ell)$ consiste de un único punto y si ℓ es una linea paralela a $\mathrm{im}(T_A)$ entonces $T_A(\ell) = \mathrm{im}(T_A)$.

c) Determina el conjunto de las líneas ℓ tales que $T_A(\ell) = \ell$.

d) Determina λ tal que las lineas $\ker(T_A)$ y $\mathrm{im}(T_S)$ sean *ortogonales*, es decir tal que $\mathrm{Rot}_{\overline{0},\pi/2}\big(\ker(T_A)\big) = \mathrm{im}(T_S)$.

21.- Sean $P_1, Q_1, P_2, Q_2 \in \mathbb{R}^2$ cuatro puntos del plano tales que $\overline{0}$, P_i y Q_i no son colineales para $1 \leq i \leq 2$. Muestra que existe una única transformación lineal $T\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(P_1) = P_2$ y $T(Q_1) = Q_2$.

1.5. Producto interno, norma y distancia. Si $\overline{u} = (x_0, y_0)$ y $\overline{v} = (x_1, y_1)$ son dos vectores del plano, el *producto interno* (*euclidiano*) de $\overline{u}$ y $\overline{v}$ es por definición el número real:

$$\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle = \overline{u} \cdot \overline{v} = x_0\, x_1 + y_0\, y_1\,. \tag{6}$$

Recordemos las siguientes propiedades del producto interno (ver también §1.7):

(i) $\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle = \langle \overline{v}, \overline{u} \rangle$ para cualesquiera $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^2$.
(ii) $\langle \overline{u}, \overline{v} + \overline{w} \rangle = \langle \overline{u}, \overline{v} \rangle + \langle \overline{u}, \overline{w} \rangle$ para cualesquiera $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in \mathbb{R}^2$.
(iii) $\langle \overline{u}, \alpha\, \overline{v} \rangle = \alpha\, \langle \overline{u}, \overline{v} \rangle$ para cualesquiera $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.
(iv) $\langle \overline{u}, \overline{u} \rangle \geq 0$ para cualquier $\overline{u} \in \mathbb{R}^2$
(v) $\langle \overline{u}, \overline{u} \rangle = 0$ si y solamente si $\overline{u} = \overline{0}$.
(vi) Si $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^2$, entonces $\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle = 0$ si y solamente si $\overline{0}$, $\overline{u}$ y $\overline{v}^{\perp}$ son colineales, si y solamente si $\overline{0}$, $\overline{u}^{\perp}$ y $\overline{v}$ son colineales.

Las primeras cinco propiedades se deducen fácilmente de las propiedades de los números reales. Mostremos la última propiedad.

*Demostración de (*vi*).* Notemos primero que si $\ell\colon t\,\overline{w} + P$ es una línea del plano que pasa por $\overline{0} = (0,0)$, entonces $\ell\colon t\,\overline{w}$, es decir $t\,\overline{w}$ también es una representación vectorial de ℓ. En efecto, esto es una consecuencia de 1 del Lema 1.6, pues $P - \overline{0} = t_0\,\overline{w}$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}$ si y solamente si $\overline{0} = t_1\,\overline{w} + P$ para algún $t_1 \in \mathbb{R}$.

Por otro lado si $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^2$ son dos vectores del plano, entonces $\ell\colon t\,\overline{w}$ pasa por $\overline{u}$ y $\overline{v}^{\perp}$ si y solamente si $\overline{u} = t_0\,\overline{w}$ y $\overline{v}^{\perp} = t_1\,\overline{w}$ para algunos $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$. Sin embargo, los números reales t_0 y t_1 cumplen que $\overline{u} = t_0\,\overline{w}$ y $\overline{v}^{\perp} = t_1\,\overline{w}$ si y solamente si, cumplen que $\overline{u}^{\perp} = t_0\,\overline{w}^{\perp}$ y $\overline{v} = t_1\,\overline{w}^{\perp}$. Por lo tanto, la linea $\ell\colon t\,\overline{w}$ pasa por $\overline{u}$ y $\overline{v}^{\perp}$ si y solamente si $\ell'\colon t\,\overline{w}^{\perp}$ pasa por $\overline{u}^{\perp}$ y $\overline{v}$. Esto demuestra que $\overline{0}$, $\overline{u}$ y $\overline{v}^{\perp}$ son colineales, si y solamente si $\overline{0}$, $\overline{u}^{\perp}$ y $\overline{v}$ son colineales, para cualesquiera $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^2$.

Observemos también que si $\overline{u} = \overline{0} = \overline{v}$ entonces las equivalencias que queremos demostrar son inmediatas. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\overline{u} = (x_0, y_0)$ y $\overline{v} = (x_1, y_1)$ donde $x_0 \neq 0$. Tenemos entonces que $\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle = 0$ si y solamente si $x_0\, x_1 + y_0\, y_1 = 0$, si y solamente si el punto del plano $\overline{v} = (x_1, y_1)$ pertenece a la línea $\ell\colon x_0 x + y_0 y$ (nota que ℓ así definida por la ecuación cartesiana $x_0 x + y_0 y = 0$ es efectivamente una línea porque $x_0 \neq 0$).

Como $\ell\colon x_0 x + y_0 y$ es la única línea que pasa por $\overline{0}$ y $\overline{u}^{\perp} = (-y_0, x_0)$ (ver el Corolario 1.2), concluimos que $\overline{0}$, $\overline{u}^{\perp}$ y $\overline{v}$ son colineales si y solamente si $\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle = 0$. $\square$

Si $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^2$ son dos vectores del plano, decimos que $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son *ortogonales* si $\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle = 0$. Por otro lado, si $\ell, \ell' \subseteq \mathbb{R}^2$ son dos líneas del plano euclidiano, decimos que ℓ y ℓ' son *ortogonales* si existen representaciones vectoriales $\ell\colon t\,\overline{u} + P$ y $\ell'\colon s\,\overline{v} + Q$ tales que $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son vectores ortogonales. En este caso denotamos $\ell \perp \ell'$.

Notemos que la definición de lineas ortogonales es independiente de las representaciones vectoriales que elegimos. En efecto, si $\ell\colon t\,\overline{u}' + P'$ y $\ell'\colon s\,\overline{v}' + Q'$ son otras representaciones vectoriales de las líneas $\ell\colon t\,\overline{u} + P$ y $\ell'\colon s\,\overline{v} + Q$, deducimos del Lema 1.6 que existen números reales $\alpha, \beta \neq 0$ tales que $\overline{u} = \alpha\,\overline{u}'$ y $\overline{v} = \beta\,\overline{v}'$; en particular $\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle = (\alpha\beta)\,\langle \overline{u}', \overline{v}' \rangle$ donde $(\alpha\beta) \neq 0$. Por lo que $\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle = 0$ si y solamente si $\langle \overline{u}', \overline{v}' \rangle = 0$.

Mostremos:

Lema 1.11. *Si $\ell\colon t\,\overline{u}+P$ es una línea del plano euclidiano y $Q \in \mathbb{R}^2$, entonces existe una única línea por Q que es ortogonal a ℓ. Esta línea es denotada como $\ell^{\perp_Q}$. De hecho $\ell^{\perp_Q}\colon t\,\overline{u}^{\perp} + Q$.*

Demostración. Si $\ell\colon t\,\overline{u}+P$ y $Q \in \mathbb{R}^2$, entonces la línea $m\colon t\,\overline{u}^{\perp}+Q$ pasa por Q, pues $0\,\overline{u}+Q = Q$ y $m \perp \ell$ porque $\overline{u}$ y $\overline{u}^{\perp}$ son vectores ortogonales. Denotemos $\ell^{\perp_Q}\colon t\,\overline{u}^{\perp} + Q$.

Supongamos por otro lado que $m'\colon s\,\overline{w} + S$ es una línea por Q que es paralela a ℓ. Notemos para empezar que por definición $\overline{w}$ y $\overline{u}$ son vectores ortogonales. De modo que por la propiedad (VI) que mostramos arriba, se tiene que $\overline{0}$, $\overline{w}$ y $\overline{u}^{\perp}$ son colineales. En particular, como $\overline{u}^{\perp} \neq \overline{0}$ pues $\overline{u} \neq \overline{0}$, tenemos que $\overline{w} = \alpha\,\overline{u}^{\perp}$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$, donde $\alpha \neq 0$ porque $\overline{w} \neq \overline{0}$.

Por otro lado, como $Q \in m'$ existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que $Q = s_0\,\overline{w} + S = (s_0\alpha)\,\overline{u}^{\perp} + S$, ó lo que es lo mismo $S - Q = \beta\,\overline{u}^{\perp}$ donde $\beta = -s_0\alpha$. Se sigue del Lema 1.6, que $m' = \ell^{\perp_Q}$. □

1.5.1. Recordemos que si $\overline{u} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ es un vector, definimos su *norma* (*euclidiana*) como el número real:

$$\|\overline{u}\| = \sqrt{\langle \overline{u}, \overline{u} \rangle} = \sqrt{\overline{u} \cdot \overline{u}} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\,. \tag{7}$$

Recordemos las propiedades (ver también §1.7):

(I) $\|\alpha\overline{u}\| = |\alpha|\,\|\overline{u}\|$ donde $|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \text{si} \quad \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \text{si} \quad \alpha \leq 0 \end{cases}$ denota el *valor absoluto* de α, para cualesquiera $\overline{u} \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

(II) $\|\overline{u}\| \geq 0$ para cualquier $\overline{u} \in \mathbb{R}^2$

(III) $\|\overline{u}\| = 0$ si y solamente si $\overline{u} = \overline{0}$.

(IV) Si $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^2$, entonces $\|\overline{u} - \overline{v}\|^2 < \|\overline{u}\|^2 + \|\overline{v}\|^2 < \|\overline{u} + \overline{v}\|^2$ si y solamente si $\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle > 0$. De manera análoga $\|\overline{u} + \overline{v}\|^2 < \|\overline{u}\|^2 + \|\overline{v}\|^2 < \|\overline{u} - \overline{v}\|^2$ si y solamente si $\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle < 0$. Más aún, $\|\overline{u} - \overline{v}\|^2 = \|\overline{u}\|^2 + \|\overline{v}\|^2 = \|\overline{u} + \overline{v}\|^2$ si y solamente si $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son ortogonales.

Demostración de (IV)*.* Si $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^2$ son dos vectores del plano, de la definición de la norma (7) y las propiedades del producto interno deducimos que:

$$\|\overline{u}+\overline{v}\|^2 = \langle \overline{u}+\overline{v}, \overline{u}+\overline{v} \rangle = \|\overline{u}\|^2+\|\overline{v}\|^2+2\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle \quad \text{y} \quad \|\overline{u}-\overline{v}\|^2 = \langle \overline{u}-\overline{v}, \overline{u}-\overline{v} \rangle = \|\overline{u}\|^2+\|\overline{v}\|^2-2\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle\,,$$

por lo que:

$$\|\overline{u}+\overline{v}\|^2-\|\overline{u}\|^2-\|\overline{v}\|^2=2\langle\overline{u},\overline{v}\rangle \quad \text{y} \quad \|\overline{u}\|^2+\|\overline{v}\|^2-\|\overline{u}-\overline{v}\|^2=2\langle\overline{u},\overline{v}\rangle \tag{8}$$

de donde (IV) □

Notemos que por (8), si $\overline{u},\overline{v}\in\mathbb{R}^2$ se tiene que:

$$\langle\overline{u},\overline{v}\rangle=\frac{\|\overline{u}+\overline{v}\|^2-\|\overline{u}\|^2-\|\overline{v}\|^2}{2}=\frac{\|\overline{u}\|^2+\|\overline{v}\|^2-\|\overline{u}-\overline{v}\|^2}{2}\,. \tag{9}$$

En particular, si conocemos el valor de la norma de cualquier vector, podemos recuperar el valor del producto interno entre cualesquiera dos vectores del plano (ver también la igualdad (11) de abajo).

1.5.2. Si $P=(x_0,y_0)$ y $Q=(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$ son dos puntos del plano, definimos la *distancia* (*euclidiana*) de P a Q como el número real:

$$d(P,Q)=\|Q-P\|=\sqrt{\langle Q-P,Q-P\rangle}=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}\,. \tag{10}$$

Recordemos las propiedades:

(I) $d(P,Q)=d(Q,P)$ para cualesquiera $P,Q\in\mathbb{R}^2$.
(II) Si $P\in\mathbb{R}^2$ y $\alpha\in\mathbb{R}$ entonces $d(\alpha P,\alpha Q)=|\alpha|\,d(P,Q)$.
(III) $d(P,Q)\geq 0$ para cualesquiera $P,Q\in\mathbb{R}^2$.
(IV) $d(P,Q)=0$ si y solamente si $P=Q$.
(V) Si $P,Q,R\in\mathbb{R}^2$, entonces $R=\frac{P+Q}{2}$ si y solamente si $d(P,R)=\frac{d(P,Q)}{2}=d(R,Q)$. Llamamos a $R=\frac{P+Q}{2}$ *el punto medio de* P *y* Q.

Demostración de (V)*.* Notemos por un lado que si $R=\frac{P+Q}{2}$, entonces:

$$d(P,R)=\|R-P\|=\left\|\frac{P+Q}{2}-P\right\|=\left\|\frac{Q-P}{2}\right\|=\frac{1}{2}\|Q-P\|=\frac{d(P,Q)}{2}$$

$$\text{y} \qquad d(R,Q)=\|Q-R\|=\left\|Q-\frac{P+Q}{2}\right\|=\left\|\frac{Q-P}{2}\right\|=\frac{1}{2}\|Q-P\|=\frac{d(P,Q)}{2}\,.$$

Supongamos por otro lado que $\alpha=d(P,R)=\frac{d(P,Q)}{2}=d(R,Q)$. Notemos que si denotamos $S=R-P$ y $T=Q-R$, entonces $S+T=Q-P$ por lo que:

$$\begin{aligned} d(P,Q)^2+d(T,S)^2 &= \|Q-P\|^2+\|S-T\|^2 \\ &= \langle Q-P,Q-P\rangle+\langle S-T,S-T\rangle \\ &= \langle S+T,S+T\rangle+\langle S-T,S-T\rangle \\ &= 2\langle S,S\rangle+2\langle T,T\rangle \\ &= 2\|R-P\|^2+2\|Q-R\|^2 \\ &= 2d(P,R)^2+2d(R,Q)^2=4\alpha^2\,. \end{aligned}$$

Como $d(P,Q)^2=4\alpha^2$ se deduce que $d(T,S)^2=0$, es decir $R-P=S=T=Q-R$. Por lo tanto, $R=\frac{P+Q}{2}$. □

Si $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^2$, observemos que por la definición (10) y la igualdad (9) se tiene que:

$$\|\overline{u}\| = d(\overline{0}, \overline{u})$$

y también:
(11)

$$\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle = \frac{\big(d(\overline{0}, \overline{u}+\overline{v})\big)^2 - \big(d(\overline{0}, \overline{u})\big)^2 - \big(d(\overline{0}, \overline{v})\big)^2}{2} = \frac{\big(d(\overline{0}, \overline{u})\big)^2 + \big(d(\overline{0}, \overline{v})\big)^2 - \big(d(\overline{0}, \overline{u}-\overline{v})\big)^2}{2}\,.$$

En particular, si conocemos el valor en todos los elementos de su dominio de una de las siguientes tres funciones:

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle} \mathbb{R}\ , \qquad \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\|\,\cdot\,\|} \mathbb{R} \qquad \text{ó} \qquad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \xrightarrow{d(\,\cdot\,,\,\cdot\,)} \mathbb{R}$$

podemos recuperar la regla de asignación de las otras dos.

1.6. Transformaciones ortogonales. Una *transformación ortogonal* (del plano euclidiano) es por definición una transformación lineal $T\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que respeta el producto escalar (euclidiano), es decir tal que:

$$\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle = \big\langle T(\overline{u}), T(\overline{v}) \big\rangle \quad \text{para} \quad \text{cualesquiera} \quad \overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^2\,.$$

La siguiente afirmación clasifica a todas las transformaciones ortogonales del plano euclidiano:

Proposición 1.12. *Si $T\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal tal que $T = T_A$ donde $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) *T es una transformación ortogonal.*

b) *T respeta la norma (euclidiana), es decir:*

$$\|\overline{u}\| = \big\|T(\overline{u})\big\| \quad \textit{para} \quad \textit{cualesquier} \quad \overline{u} \in \mathbb{R}^2\,.$$

c) *T respeta la distancia (euclidiana), es decir se cumple que:*

$$d(P,Q) = d\big(T(P), T(Q)\big) \quad \textit{para} \quad \textit{cualesquiera} \quad P, Q \in \mathbb{R}^2\,.$$

d) *Los vectores $T(1,0) = (a,b)$ y $T(0,1) = (c,d)$ son unitarios y ortogonales, es decir:*

$$a^2 + b^2 = 1\,, \quad c^2 + d^2 = 1 \quad \textit{y} \quad ab - bc = 0\,.$$

e) $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ *ó* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ *para algún $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $a^2 + b^2 = 1$.*

Demostración. a) $\Rightarrow$ b) : Si T es una transformación ortogonal, para todo $\overline{u} \in \mathbb{R}^2$ se tiene que:

$$\|\overline{u}\| = \sqrt{\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle} = \sqrt{\big\langle T(\overline{u}), T(\overline{u}) \big\rangle} = \big\|T(\overline{u})\big\|\,.$$

b) $\Rightarrow$ c) : Si suponemos b), para cualesquiera $P, Q \in \mathbb{R}^2$ se tiene que:

$$d(P,Q) = \|Q - P\| = \big\|T(Q-P)\big\| = \big\|T(Q) - T(P)\big\| = d\big(T(P), T(Q)\big)\,,$$

porque T es lineal.

c) $\Rightarrow$ a) : Como T es una transformación lineal, deducimos de c) y de (11) que para $\overline{u},\overline{v}\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\langle\overline{u},\overline{v}\rangle &= \frac{d(\overline{0},\overline{u}+\overline{v})^2-d(\overline{0},\overline{u})^2-d(\overline{0},\overline{v})^2}{2}\\
&= \frac{d\big(T(\overline{0}),T(\overline{u}+\overline{v})\big)^2-d\big(T(\overline{0}),T(\overline{u})\big)^2-d\big(T(\overline{0}),T(\overline{v})\big)^2}{2}\\
&= \frac{d\big(\overline{0},T(\overline{u})+T(\overline{v})\big)^2-d\big(\overline{0},T(\overline{u})\big)^2-d\big(\overline{0},T(\overline{v})\big)^2}{2}\\
&= \big\langle T(\overline{u}),T(\overline{v})\big\rangle\,;
\end{aligned}$$

es decir T es una transformación ortogonal.

d) $\Leftrightarrow$ a) : Notemos que d) es equivalente a:

$$\begin{aligned}
&\big\langle(1,0),(1,0)\big\rangle=1=\big\langle T(1,0),T(1,0)\big\rangle\,,\\
&\big\langle(0,1),(0,1)\big\rangle=1=\big\langle T(0,1),T(0,1)\big\rangle\\
\text{y}\qquad&\big\langle(1,0),(0,1)\big\rangle=0=\big\langle T(1,0),T(1,0)\big\rangle\,.
\end{aligned}$$

En particular d) se cumple para toda transformación ortogonal, es decir a) $\Rightarrow$ d).

Por otro lado si $\overline{u}=(x,y)=x(1,0)+y(0,1)$, $\overline{v}=(z,w)=z(1,0)+w(0,1)$ son dos puntos cualesquiera del plano, tenemos entonces que d) implica que:

$$\begin{aligned}
\big\langle\overline{u},\overline{v}\big\rangle &= \big\langle x(1,0)+y(0,1),z(1,0)+w(0,1)\big\rangle\\
&= xz\big\langle(1,0),(1,0)\big\rangle+(xw+yz)\big\langle(1,0),(0,1)\big\rangle+yw\big\langle(1,0),(1,0)\big\rangle\\
&= xz\big\langle T(1,0),T(1,0)\big\rangle+(xw+yz)\big\langle T(1,0),T(0,1)\big\rangle+yw\big\langle T(1,0),T(1,0)\big\rangle\\
&= \big\langle xT(1,0)+yT(0,1),zT(1,0)+wT(0,1)\big\rangle\\
&= \big\langle T(x,y),T(z,w)\big\rangle\\
&= \big\langle T(\overline{u}),T(\overline{v})\big\rangle\,;
\end{aligned}$$

es decir T es una transformación ortogonal. Por lo tanto d) $\Rightarrow$ a).

d) $\Leftrightarrow$ e) : Es fácil verificar que e) $\Rightarrow$ d). Supongamos d), es decir $T=T_A$ para alguna matriz $A=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$ donde $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$ y $ac+bd=0$.

Si $a\neq0$, tenemos que $c=-\frac{bd}{a}$ y $c^2+d^2=1$, de donde $\frac{b^2d^2}{a^2}+d^2=1$, es decir $b^2d^2+a^2d^2=a^2$. Como además $a^2+b^2=1$, es decir $a^2d^2+b^2d^2=d^2$; se concluye que $d^2=a^2$, es decir $d=\pm a$.

Por otro lado, deducimos también de $c=-\frac{bd}{a}$ que si $d=a$ entonces $c=-b$ y que si $d=-a$ entonces $c=b$. Por lo tanto $A=\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}$ ó $A=\begin{pmatrix}a&b\\b&-a\end{pmatrix}$ para algún $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tal que $a^2+b^2=1$.

No es difícil ver que si $a=0$, entonces:

$$A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\text{ ó }A=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}.$$

□

1.6.1. Rotaciones en el origen. Una *rotación en el origen* (del plano euclidiano) es una transformación lineal $T_A\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ asociada a una matriz de la forma $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ para algún $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $a^2 + b^2 = 1$ y $(a,b) \neq (1,0)$.

Recuerda que si $F\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una función del plano y $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ es un punto, decimos que P *es un punto fijo de* F si $F(P) = P$. Denotamos como $\mathbf{Fix}(F)$ al conjunto de los puntos fijos de una función F del plano.

Mostremos:

Lema 1.13. *Si* $F\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *es una rotación en el origen, entonces* $\overline{0} = (0,0)$ *es el único punto fijo de* F*, es decir* $\mathbf{Fix}(F) = \{\overline{0}\}$.

Demostración. Por definición $F = T_A$ es la transformación lineal asociada a una matriz de la forma $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ para algún $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $a^2 + b^2 = 1$ y $(a,b) \neq (1,0)$. Supongamos que $T_A(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$ para algún $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, es decir supongamos que:

$$\begin{aligned} (a-1)x_0 - by_0 &= 0 \\ bx_0 + (a-1)y_0 &= 0\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Notemos que $a \neq 1$, pues si $a = 1$ deducimos de $a^2 + b^2 = 1$ que $b = 0$. Por lo tanto $a - 1 \neq 0$ y entonces de la primer ecuación de (12) obtenemos que $x_0 = \left(\frac{b}{a-1}\right) y_0$. Sustituyendo en la segunda ecuación de (12) tenemos que $\left(\frac{b^2}{a-1}\right) y_0 + (a-1)y_0 = 0$, es decir $b^2 y_0 + (a-1)^2 y_0 = 0$, o bien $(b^2 + a^2 - 2a + 1)\, y_0 = 0$. Pero $a^2 + b^2 = 1$, por lo que tenemos $2\,(1-a)\, y_0 = 0$. Nuevamente, como $a \neq 1$ deducimos que $y_0 = 0$ y entonces $x_0 = \left(\frac{b}{a-1}\right) y_0 = 0$.

Por lo tanto $\mathbf{Fix}(T_A) = \{\overline{0}\}$. □

1.6.2. Reflexiones respecto a líneas por el origen. Una *reflexión respecto a una línea por el origen* (del plano euclidiano) es una transformación lineal $T_A\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ asociada a una matriz de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ para algún $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $a^2 + b^2 = 1$.

Determinemos el conjunto de los puntos fijos de estas transformaciones ortogonales:

Lema 1.14. *Si* $F\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *es una reflexión respecto a una línea por el origen, entonces el conjunto* $\mathbf{Fix}(F)$ *de los puntos fijos de* F *es una línea por el origen.*

Más precisamente, si $F = T_A$ *es la transformación lineal asociada a la matriz* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ *donde* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *cumple* $a^2 + b^2 = 1$*; entonces:*

$$\mathbf{Fix}(T_A) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{matrix} (a-1)x + by = 0 \\ bx - (a+1)y = 0 \end{matrix} \right\} \tag{13}$$

es una línea por el origen del plano euclidiano.

En particular:

- *Si* $(a,b)=(1,0)$ *entonces* $\mathbf{Fix}(T_A)$ *es el eje* x*.*
- *Si* $(a,b)=(-1,0)$ *entonces* $\mathbf{Fix}(T_A)$ *es el eje* y*.*
- *Si* $(a,b)\neq(1,0),(-1,0)$ *entonces* $t\left(\frac{a+1}{2},\frac{b}{2}\right)$ *es una representación vectorial de* $\mathbf{Fix}(T_A)$*. Dicho de otro modo,* $\mathbf{Fix}(T_A)$ *es la línea por el origen del plano y por el punto medio* $\left(\frac{a+1}{2},\frac{b}{2}\right)=\frac{(a,b)+(1,0)}{2}$ *de* (a,b) *y* $(1,0)$*.*

Demostración. Por definición $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ es tal que $a^2+b^2=1$. Supongamos que $T_A(x_0,y_0)=(x_0,y_0)$ para algún $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, es decir supongamos que:

$$\begin{aligned}(a-1)x_0+by_0&=0\\ bx_0-(a+1)y_0&=0\,.\end{aligned}\tag{14}$$

Caso $(a,b)=(1,0)$: En este caso la primer ecuación del sistema (14) es la ecuación $0=0$, mientras que la segunda ecuación es $-2y_0=0$. En particular:

$$\mathbf{Fix}(T_A)=\left\{\ (x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ -2y_0=0\ \right\}$$

es el eje x, es decir $\mathbf{Fix}(T_A)$ es la línea de representación vectorial $t\,(1,0)$.

Caso $(a,b)=(-1,0)$: Ahora $0=0$ es la segunda ecuación del sistema (14), y $-2x_0=0$ es la primer ecuación. Entonces:

$$\mathbf{Fix}(T_A)=\left\{\ (x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ -2x_0=0\ \right\}$$

es el eje y, es decir $\mathbf{Fix}(T_A)$ es la línea de representación vectorial $t\,(0,1)$.

Caso $(a,b)\neq(1,0),(-1,0)$: Notemos que en este caso $a-1\neq0$ y $b\neq0$. En efecto, como $a^2+b^2=1$ se sigue que si $a=1$ entonces $b=0$, y si $b=0$ entonces $a=\pm1$.

Multiplicando por el número real no cero $\frac{b}{a-1}$ a la primer ecuación de (14), deducimos que el sistema de ecuaciones (14) es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}bx_0+\left(\frac{b^2}{a-1}\right)y_0&=0\\ bx_0-(a+1)y_0&=0\,.\end{aligned}\tag{15}$$

Más aún, como $\left(\frac{b^2}{a-1}\right)+(a+1)=\frac{b^2+(a+1)(a-1)}{a-1}=\frac{b^2+a^2-1}{a-1}=0$, es decir como $\left(\frac{b^2}{a-1}\right)=-(a+1)$; se concluye que:

$$\mathbf{Fix}(T_A)=\left\{\ (x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ bx_0-(a+1)y_0=0\ \right\}\,,$$

donde $b\neq0$.

Notemos finalmente que la linea $\mathbf{Fix}(T_A)$ de ecuación cartesiana $bx_0-(a+1)y_0=0$, tiene como representación vectorial $t\,(a+1,b)$. □

Si $F\colon\ \mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ es una función del plano y $m\subseteq\mathbb{R}^2$ es una línea, decimos que m *es una línea en la traza de* F si $F(m)=m$, es decir si para todo punto $P\in m$ se tiene que $F(P)\in m$ y para todo punto $Q\in m$ existe $P\in m$ tal que $F(P)=Q$.

Lema 1.15. *Si $F\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una reflexión respecto a una línea por el origen y $m \subseteq \mathbb{R}^2$ es una línea cualquiera, entonces m es una línea en la traza de F si y solamente si m es ortogonal a la línea $\mathbf{Fix}(F)$ de los puntos fijos de F.*

Más aún, si $m\colon t\,\overline{u} + P$ es una línea ortogonal a $\mathbf{Fix}(F)$ donde $P \in \mathbf{Fix}(F)$, entonces $F(t\,\overline{u} + P) = -t\,\overline{u} + P$.

1.7. La desigualdad del triángulo. Si $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^2 \backslash \{\overline{0}\}$, observemos que el número real $\frac{\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle}{\|\overline{u}\|\,\|\overline{v}\|}$ es invariante bajo múltiplos escalares del mismo signo de $\overline{u}$ y $\overline{v}$:

$$\frac{\langle \alpha\,\overline{u}, \beta\,\overline{v}\rangle}{\|\alpha\,\overline{u}\|\,\|\beta\,\overline{v}\|} = \frac{\alpha\,\beta\,\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle}{|\alpha|\,|\beta|\,\|\overline{u}\|\,\|\overline{v}\|} = \frac{\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle}{\|\overline{u}\|\,\|\overline{v}\|} \qquad \text{si} \quad \alpha, \beta > 0 \quad \text{ó} \quad \text{si} \quad \alpha, \beta < 0\,.$$

Dicho número $\frac{\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle}{\|\overline{u}\|\,\|\overline{v}\|}$ depende entonces solamente de los segmentos de líneas $\alpha\,\overline{u}$ y $\beta\,\overline{v}$ donde $\alpha, \beta > 0$, ó de los segmentos de líneas $\alpha\,\overline{u}$ y $\beta\,\overline{v}$ donde $\alpha, \beta < 0$.

Mostremos:

Lema 1.16. *Si $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^2 \backslash \{\overline{0}\}$ son dos vectores no nulos del plano, entonces:*

$$-1 \leq \frac{\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle}{\|\overline{u}\|\|\overline{v}\|} \leq 1\,. \tag{16}$$

En este caso se tiene:

a) $\frac{\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle}{\|\overline{u}\|\|\overline{v}\|} = 1$ *si y solamente si* $\|\overline{u}\|\,\overline{v} = \|\overline{v}\|\,\overline{u}$.
b) $\frac{\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle}{\|\overline{u}\|\|\overline{v}\|} = -1$ *si y solamente si* $\|\overline{u}\|\,\overline{v} = -\|\overline{v}\|\,\overline{u}$.
c) $\frac{\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle}{\|\overline{u}\|\|\overline{v}\|} = 0$ *si y solamente si* $\overline{u}$ *y* $\overline{v}$ *son ortogonales.*

Dicho de otro modo, si $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^2$ son cualesquiera dos vectores del plano, entonces:

$$\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle^2 \leq \langle \overline{u}, \overline{u}\rangle\,\langle \overline{v}, \overline{v}\rangle\,, \tag{17}$$

mientras que $\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle^2 = \langle \overline{u}, \overline{u}\rangle\,\langle \overline{v}, \overline{v}\rangle$ si y solamente si $\overline{0}$, $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son colineales.

Demostración. Sean $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^2 \backslash \{\overline{0}\}$. Se sigue de las propiedades que señalamos abajo de la definición (6) del producto interno, que $\langle \overline{u}, \overline{u}\rangle^2 > 0$ por lo que $\frac{\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle}{\langle \overline{u}, \overline{u}\rangle}$ es un número real, y también que:

$$0 \leq \left\langle \overline{v} - \frac{\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle}{\langle \overline{u}, \overline{u}\rangle}\overline{u}\,,\ \overline{v} - \frac{\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle}{\langle \overline{u}, \overline{u}\rangle}\overline{u} \right\rangle = \langle \overline{v}, \overline{v}\rangle - 2\frac{\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle^2}{\langle \overline{u}, \overline{u}\rangle} + \frac{\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle^2}{\langle \overline{u}, \overline{u}\rangle} = \langle \overline{v}, \overline{v}\rangle - \frac{\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle^2}{\langle \overline{u}, \overline{u}\rangle}\,. \tag{18}$$

De donde obtenemos que:

$$0 \leq \left(\frac{\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle}{\|\overline{u}\|\,\|\overline{v}\|}\right)^2 = \left(\frac{\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle}{\sqrt{\langle \overline{u}, \overline{u}\rangle}\,\sqrt{\langle \overline{v}, \overline{v}\rangle}}\right)^2 = \frac{\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle^2}{\langle \overline{u}, \overline{u}\rangle\,\langle \overline{v}, \overline{v}\rangle} \leq 1\,;$$

lo que implica las desigualdades de (16).

Notemos por otro lado que si $\|\overline{u}\|\,\overline{v} = \|\overline{v}\|\,\overline{u}$, como $\overline{u} \neq \overline{0}$ tenemos que $\|\overline{u}\| \neq 0$ y entonces:

$$\frac{\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle}{\|\overline{u}\|\|\overline{v}\|} = \frac{\left\langle \overline{u}, \frac{\|\overline{v}\|}{\|\overline{u}\|}\,\overline{u}\right\rangle}{\|\overline{u}\|\left\|\frac{\|\overline{v}\|}{\|\overline{u}\|}\,\overline{u}\right\|} = \frac{\frac{\|\overline{v}\|}{\|\overline{u}\|}\langle \overline{u}, \overline{u}\rangle}{\frac{\|\overline{v}\|}{\|\overline{u}\|}\|\overline{u}\|^2} = \frac{\frac{\|\overline{v}\|}{\|\overline{u}\|}\|\overline{u}\|^2}{\frac{\|\overline{v}\|}{\|\overline{u}\|}\|\overline{u}\|^2} = 1\,;$$

mientras que si $\|\overline{u}\|\,\overline{v} = -\|\overline{v}\|\,\overline{u}$ entonces:

$$\frac{\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle}{\|\overline{u}\|\|\overline{v}\|} = \frac{\left\langle \overline{u}, -\frac{\|\overline{v}\|}{\|\overline{u}\|}\,\overline{u}\right\rangle}{\|\overline{u}\|\left\|-\frac{\|\overline{v}\|}{\|\overline{u}\|}\,\overline{u}\right\|} = \frac{-\frac{\|\overline{v}\|}{\|\overline{u}\|}\langle \overline{u}, \overline{u}\rangle}{\frac{\|\overline{v}\|}{\|\overline{u}\|}\|\overline{u}\|^2} = \frac{-\frac{\|\overline{v}\|}{\|\overline{u}\|}\|\overline{u}\|^2}{\frac{\|\overline{v}\|}{\|\overline{u}\|}\|\overline{u}\|^2} = -1\,.$$

Recíprocamente, si $\frac{\langle \overline{u},\overline{v}\rangle}{\|\overline{u}\|\|\overline{v}\|} = \pm 1$ entonces $\frac{\langle \overline{u},\overline{v}\rangle^2}{\|\overline{u}\|^2\|\overline{v}\|^2} = 1$, por lo que $\frac{\langle \overline{u},\overline{v}\rangle^2}{\langle \overline{u},\overline{u}\rangle} = \langle \overline{v}, \overline{v}\rangle$. Por lo tanto se sigue de (18) que $\overline{v} = \frac{\langle \overline{u},\overline{v}\rangle}{\langle \overline{u},\overline{u}\rangle}\overline{u}$ es decir $\|\overline{u}\|^2\,\overline{v} = \langle \overline{u}, \overline{v}\rangle\,\overline{u}$. Concluimos que si $\frac{\langle \overline{u},\overline{v}\rangle}{\|\overline{u}\|\|\overline{v}\|} = 1$ es decir si $\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle = \|\overline{u}\|\,\|\overline{v}\|$, entonces $\|\overline{u}\|\,\overline{v} = \|\overline{v}\|\,\overline{u}$. Mientras que si $\frac{\langle \overline{u},\overline{v}\rangle}{\|\overline{u}\|\|\overline{v}\|} = -1$ es decir si $\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle = -\|\overline{u}\|\,\|\overline{v}\|$, entonces $\|\overline{u}\|\,\overline{v} = -\|\overline{v}\|\,\overline{u}$.

Observemos por otro lado que el inciso c) es inmediato, pues $\frac{\langle \overline{u},\overline{v}\rangle}{\|\overline{u}\|\|\overline{v}\|} = 0$ si y solamente si $\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle = 0$, si y solamente si $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son vectores ortogonales (por definición).

Finalmente, notemos que si $\overline{u} = \overline{0}$ ó $\overline{v} = \overline{0}$ se tiene que $\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle^2 = 0 = \langle \overline{u}, \overline{u}\rangle\,\langle \overline{v}, \overline{v}\rangle$. Mientras que si $\overline{u} \neq \overline{0} \neq \overline{v}$ sabemos que $\frac{\langle \overline{u},\overline{v}\rangle^2}{\langle \overline{u},\overline{u}\rangle\,\langle \overline{v},\overline{v}\rangle} \leq 1$. De donde (17).

Mostremos que $\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle^2 = \langle \overline{u}, \overline{u}\rangle\,\langle \overline{v}, \overline{v}\rangle$ si y solamente si $\overline{0}$, $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son colineales.

Caso $\overline{u} \neq \overline{0} \neq \overline{v}$: Si $\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle^2 = \langle \overline{u}, \overline{u}\rangle\,\langle \overline{v}, \overline{v}\rangle$ sabemos de los incisos a) y b) que $\|\overline{u}\|\,\overline{v} = \|\overline{v}\|\,\overline{u}$ ó $\|\overline{u}\|\,\overline{v} = -\|\overline{v}\|\,\overline{u}$ donde $\overline{u} \neq 0$, por lo tanto $\overline{v} = \frac{\|\overline{v}\|}{\|\overline{u}\|}\,\overline{u}$ ó $\overline{v} = -\frac{\|\overline{v}\|}{\|\overline{u}\|}\,\overline{u}$, es decir la línea por $\overline{0}$ y $\overline{u}$ pasa por $\overline{v}$.

Caso $\overline{u} = \overline{0}$ *ó* $\overline{v} = \overline{0}$: En este caso $\overline{0}$, $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son a lo más dos puntos distintos, en particular ellos son colineales. □

El Lema 1.16 implica la *desigualdad del triángulo* para la distancia euclidiana, así como la relación entre las líneas (euclidianas) y la distancia (euclidiana) en el plano:

Corolario 1.17. *Si $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$ son tres puntos del plano, entonces:*

$$d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)\,.$$

Más aún, si $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$ son distintos, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $d(P, R) = d(P, Q) + d(Q, R)$.
(ii) $Q = \alpha\,(R - P) + P$ *para algún* $0 < \alpha < 1$.
(iii) $R = \beta\,(Q - P) + P$ *para algún* $1 < \beta$.
(iv) $P = \gamma\,(R - Q) + Q$ *para algún* $\gamma < 0$.

Demostración. Si $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$, usando la desigualdad $\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle \leq \|\overline{u}\| \, \|\overline{v}\|$ del Lema 1.16, tenemos que:

$$\begin{aligned} d(P,R)^2 = \big\| \, R-P \, \big\|^2 &= \big\| \, (R-Q)+(Q-P) \, \big\|^2 \\ &= \Big\langle (R-Q)+(Q-P), (R-Q)+(Q-P) \Big\rangle \\ &= \big\| \, R-Q \, \big\|^2 + 2\langle R-Q, Q-P \rangle + \big\| \, Q-P \, \big\|^2 \\ &\leq \big\| \, R-Q \, \big\|^2 + 2\big\| \, R-Q \, \big\| \big\| \, Q-P \, \big\| + \big\| \, Q-P \, \big\|^2 \\ &= \big\| \, Q-P \, \big\|^2 + 2\big\| \, Q-P \, \big\| \big\| \, R-Q \, \big\| + \big\| \, R-Q \, \big\|^2 \\ &= \big(\big\| \, Q-P \, \big\| + \big\| \, R-Q \, \big\| \big)^2 \\ &= \big(d(P,Q) + d(Q,R) \big)^2 \end{aligned}$$

Como $d(P,R), d(P,Q), d(Q,R) \geq 0$ y mostramos $d(P,R)^2 \leq \big(d(P,Q)+d(Q,R)\big)^2$, se deduce que $d(P,R) \leq d(P,Q) + d(Q,R)$

(I) $\Rightarrow$ (II): Supongamos que $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$ son distintos, en particular $R-Q, Q-P \in \mathbb{R}^2 \backslash \{\overline{0}\}$. Notemos que si $d(P,R) = d(P,Q)+d(Q,R)$ entonces por lo que hicimos arriba $\langle R-Q, Q-P \rangle = \big\| \, R-Q \, \big\| \big\| \, Q-P \, \big\|$. Se sigue del Lema 1.16 se tiene que $(Q-P) = \frac{\|Q-P\|}{\|R-Q\|}(R-Q)$ por lo que:

$$\left(1 + \frac{\|Q-P\|}{\|R-Q\|} \right) Q = \frac{\|Q-P\|}{\|R-Q\|} \, R + P \, .$$

Deducimos entonces que:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\|Q-P\|}{\|R-Q\|} \right) Q &= \frac{\|Q-P\|}{\|R-Q\|} \, (R-P) + \frac{\|Q-P\|}{\|R-Q\|} \, P + P \\ &= \frac{\|Q-P\|}{\|R-Q\|} \, (R-P) + \left(1 + \frac{\|Q-P\|}{\|R-Q\|} \right) \, P \, . \end{aligned}$$

Por lo que $Q = \alpha \, (R-P) + P$ donde $\alpha = \frac{\beta}{(1+\beta)}$ y $\beta = \frac{\|Q-P\|}{\|R-Q\|} > 0$. En particular, tenemos que $0 < \beta < 1 + \beta$ y entonces $0 < \frac{\beta}{(1+\beta)} = \alpha < 1$.

(II) $\Rightarrow$ (III): Si $Q = \alpha \, (R-P) + P$ para algún $0 < \alpha < 1$, entonces $\frac{1}{\alpha} \, (Q-P) + P = R$ donde $1 < \frac{1}{\alpha}$ pues $0 < \alpha < 1$.

(III) $\Rightarrow$ (IV): Supongamos que $R = \beta \, (Q-P) + P$ para algún $\beta > 1$. Entonces $R = \beta \, Q - \beta \, P + P$, por lo que $(1-\beta) \, P = R - \beta \, Q$. Se sigue que $P = \frac{1}{(1-\beta)} R - \frac{\beta}{(1-\beta)} \, Q$. Sumando el cero $0 = -\frac{(1-\beta)}{(1-\beta)} Q + Q$ del lado derecho, obtenemos:

$$P = \frac{1}{(1-\beta)} R - \frac{\beta}{(1-\beta)} \, Q - \frac{(1-\beta)}{(1-\beta)} Q + Q = \frac{1}{(1-\beta)} \big(R - Q \big) + Q$$

donde $\frac{1}{(1-\beta)} < 0$ pues $1 < \beta$.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Supongamos por último que $P = \gamma\,(R-Q)+Q$ para algún $\gamma < 0$. Podemos calcular entonces:

$$\begin{aligned}
d(P,R) &= \big\|\, R-P \,\big\| = \big\|\, R-\gamma\,(R-Q)-Q \,\big\| = \big\|\,(1-\gamma)\,(R-Q)\,\big\| = (1-\gamma)\,\big\|\, R-Q \,\big\| \\
d(P,Q) &= \big\|\, Q-P \,\big\| = \big\|\, Q-\gamma\,(R-Q)-Q \,\big\| = \big\|\, -\gamma\,(R-Q)\,\big\| = (-\gamma)\,\big\|\, R-Q \,\big\| \\
d(Q,R) &= \big\|\, R-Q \,\big\|
\end{aligned}$$

donde $1-\gamma > 1 > 0$ y $-\gamma > 0$. Por lo tanto:

$$d(P,Q)+d(Q,R) = (-\gamma)\,\big\|\, R-Q \,\big\| + \big\|\, R-Q \,\big\| = (1-\gamma)\,\big\|\, R-Q \,\big\| = d(P,R)\,.$$

$\square$

Corolario 1.18. *Si $\overline{u},\overline{v} \in \mathbb{R}^2\backslash\{\overline{0}\}$ son dos vectores del plano, entonces:*

$$\big|\|\overline{u}\| - \|\overline{v}\|\big| \le \|\overline{u} \pm \overline{v}\| \le \|\overline{u}\| + \|\overline{v}\|\,. \tag{19}$$

Más aún, se tiene que

a) $\|\overline{u}+\overline{v}\| = \|\overline{u}\| + \|\overline{v}\|$ *si y solamente si* $\|\overline{u}-\overline{v}\| = \big|\|\overline{u}\| - \|\overline{v}\|\big|$, *si y solamente si existe un número real $\alpha > 0$ tal que $\overline{v} = \alpha\,\overline{u}$.*

b) $\|\overline{u}+\overline{v}\| = \big|\|\overline{u}\| - \|\overline{v}\|\big|$ *si y solamente si* $\|\overline{u}-\overline{v}\| = \|\overline{u}\| + \|\overline{v}\|$, *si y solamente si existe un número real $\alpha < 0$ tal que $\overline{v} = \alpha\,\overline{u}$.*

1.8. Isometrías. Una *isometría* (del plano euclidiano) es una función $F\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que respeta la distancia (euclidiana del plano), es decir:

$$d\big(T(P),T(Q)\big) = d(P,Q) \quad \text{para} \quad \text{cualesquiera} \quad P,Q \in \mathbb{R}^2\,.$$

Ejemplos:

1.- Si $S \in \mathbb{R}^2$ definimos la *traslación por S* como la función $\mathrm{tr}_S\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por la regla $tr_S(P) = P+S$. Notemos que si $P,Q \in \mathbb{R}^2$ son dos puntos, entonces:

$$d\big(\mathrm{tr}_S(P),\mathrm{tr}_S(Q)\big) = d(P+S,Q+S) = \|(Q+S)-(P+S)\| = \|Q-P\| = d(P,Q)\,;$$

es decir la traslación por S es una isometría del plano, para toda $S \in \mathbb{R}^2$.

2.- Sea $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $a^2+b^2 = 1$. Si $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, la rotación en el origen T_A es una isometría por la implicación e) $\Rightarrow$ c) de la Proposición 1.12. Por la misma razón, la reflexión T_B donde $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, es una isometría del plano euclidiano.

3.- Notemos que si $F,G\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ son dos isometrías, entonces la función composición $F\circ G$ también es una isometría del plano euclidiano. En efecto, si $P,Q \in \mathbb{R}^2$ son dos puntos:

$$d\Big(F\big(G(P)\big),F\big(G(Q)\big)\Big) = d\big(G(P),G(Q)\big) = d(P,Q)\,.$$

Queremos mostrar que las isometrías en el Ejemplo 2) de arriba, son de hecho las únicas isometría del plano euclidiano que dejan fijo al origen; es decir, las únicas funciones del plano euclidiano que respetan la distancia y dejan fijo al origen son la función identidad, las rotaciones en el origen y las reflexiones respecto de una línea por el origen. Esto tendrá como consecuencia (ver el Corolario 1.20) que con los tres ejemplos de arriba se pueden construir a todas las isometrías del plano.

Más precisamente:

Proposición 1.19. *Si* $F\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *es una isometría del plano euclidiana, los siguientes enunciados son equivalentes:*

a) $F(\overline{0}) = \overline{0}$.

b) F *es una función lineal.*

c) F *es una transformación ortogonal (es decir* F *es la función identidad ó una rotación en el origen ó una reflexión respecto a una línea por el origen).*

Demostración. c) $\Rightarrow$ a): Como una transformación ortogonal es necesariamente una transformación lineal, si $F\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una transformación ortogonal se tiene que $F(\overline{0}) = \overline{0}$.

b) $\Rightarrow$ c) es la implicación c) $\Rightarrow$ a) de la Proposición 1.12, que una transformación lineal que respeta la distancia también respeta el producto punto.

Mostremos a) $\Rightarrow$ b). Sea $F\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una isometría tal que $F(\overline{0}) = \overline{0}$. Notemos primero que F es un función inyectiva. En efecto, si $F(P) = F(Q)$ entonces $0 = d\big(F(P), F(Q)\big) = d(P,Q)$, de donde $P = Q$. Observemos también que:

$$\|\overline{w}\| = d(\overline{0}, \overline{w}) = d\big(F(\overline{0}), F(\overline{w})\big) = d\big(\overline{0}, F(\overline{w})\big) = \|F(\overline{w})\|\,,$$

por lo que F además de preservar la distancia, preserva la norma.

Mostremos ahora que si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\overline{u} \in \mathbb{R}^2$ entonces $F(\alpha\,\overline{u}) = \alpha\, F(\overline{u})$. En efecto: Si $\overline{u} = \overline{0}$, tenemos que:

$$F(\alpha\,\overline{u}) = F(\overline{0}) = \overline{0} = \alpha\,\overline{0} = \alpha\, F(\overline{0}) = \alpha\, F(\overline{u})\,;$$

si $\alpha = 0$, entonces:

$$F(\alpha\,\overline{u}) = F(\overline{0}) = \overline{0} = 0\, F(\overline{u}) = \alpha\, F(\overline{u})\,;$$

y si $\alpha = 1$, se tiene que:

$$F(\alpha\,\overline{u}) = F(\overline{u}) = \alpha\, F(\overline{u})\,.$$

Mostremos que $F(\alpha\,\overline{u}) = \alpha\, F(\overline{u})$ si $\overline{u} \neq \overline{0}$ y $\alpha \neq 0, 1$. Para ello consideremos los siguientes tres puntos del plano $\overline{0}$, $\overline{u}$ y $\alpha\,\overline{u}$, los cuales son por hipótesis distintos. Como se tiene que $\alpha\,\overline{u} = \alpha\,\big(\overline{u} - \overline{0}\big) + \overline{0}$, veamos las consecuencias que obtenemos del Corolario 1.17:

Si $0 < \alpha < 1$: En este caso $d(\overline{0}, \overline{u}) = d(\overline{0}, \alpha\,\overline{u}) + d(\alpha\,\overline{u}, \overline{u})$. Como F es una isometría y $F(\overline{0}) = \overline{0}$, deducimos que:

$$d\big(\overline{0}, F(\overline{u})\big) = d\big(\overline{0}, F(\alpha\,\overline{u})\big) + d\big(F(\alpha\,\overline{u}), F(\overline{u})\big)\,;$$

de donde $F(\alpha\,\overline{u}) = t\,\big(F(\overline{u}) - \overline{0}\big) + \overline{0} = t\, F(\overline{u})$ para alguna $0 < t < 1$, al aplicar nuevamente el Corolario 1.17.

Por otro lado notemos que:

$$|\alpha|\,\|\overline{u}\| = \|\alpha\,\overline{u}\| = \|F(\alpha\,\overline{u})\| = \|t\,F(\overline{u})\| = |t|\,\|F(\overline{u})\| = |t|\,\|\overline{u}\|\,; \tag{20}$$

por lo que $|\alpha| = |t|$ pues $\overline{u} \neq \overline{0}$. Como se tiene que $0 < \alpha, t$, entonces $\alpha = t$, es decir $F(\alpha\,\overline{u}) = t\,F(\overline{u}) = \alpha\,F(\overline{u})$.

Si $\alpha > 1$: Entonces $d(\overline{0}, \alpha\,\overline{u}) = d(\overline{0}, \overline{u}) + d(\overline{u}, \alpha\,\overline{u})$, por lo que:

$$d\big(\overline{0}, F(\alpha\,\overline{u})\big) = d\big(\overline{0}, F(\overline{u})\big) + d\big(F(\overline{u}), F(\alpha\,\overline{u})\big)$$

y entonces $F(\alpha\,\overline{u}) = t\left(F(\overline{u}) - \overline{0}\right) + \overline{0} = t\,F(\overline{u})$ para alguna $1 < t$.

Se sigue de (20) que $\alpha = |\alpha| = |t| = t$, por lo que $F(\alpha\,\overline{u}) = t\,F(\overline{u}) = \alpha\,F(\overline{u})$.

Si $\alpha < 0$: Tenemos $d(\alpha\,\overline{u}, \overline{u}) = d(\alpha\,\overline{u}, \overline{0}) + d(\overline{0}, \overline{u})$ y entonces:

$$d\big(F(\alpha\,\overline{u}), F(\overline{u})\big) = d\big(F(\alpha\,\overline{u}), \overline{0}\big) + d\big(\overline{0}, F(\overline{u})\big)\,.$$

Se sigue que $F(\alpha\,\overline{u}) = t\left(F(\overline{u}) - \overline{0}\right) + \overline{0} = t\,F(\overline{u})$ para alguna $0 > t$. Esta vez de (20) deducimos que $-\alpha = |\alpha| = |t| = -t$, es decir $\alpha = t$, de modo que $F(\alpha\,\overline{u}) = t\,F(\overline{u}) = \alpha\,F(\overline{u})$.

.....

..... □

Deducimos:

Corolario 1.20. *Sea* $F\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *una isometría del plano euclidiano. Entonces* $F = \mathrm{tr}_{F(\overline{0})} \circ T_A$, *donde* T_A *es una transformación ortogonal.*

En particular, si F *es una isometría del plano euclidiano entonces* F *es de una y solamente una de las siguientes formas:*

1) $F = \mathrm{tr}_S$ *donde* $S \in \mathbb{R}^2$, *es decir* F *es una traslación.*
2) $F = \mathrm{tr}_S \circ T_A$ *donde* $S \in \mathbb{R}^2$ *y* $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ *para algún* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $a^2 + b^2 = 1$ *y* $(a,b) \neq (1,0)$.
3) $F = \mathrm{tr}_S \circ T_A$ *donde* $S \in \mathbb{R}^2$ *y* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ *para algún* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $a^2 + b^2 = 1$.

Demostración. Si $F\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una isometría del plano euclidiano, consideremos la traslación $\mathrm{tr}_{-F(\overline{0})}$. Entonces la función composición $G = \mathrm{tr}_{-F(\overline{0})} \circ F$ es una isometría tal que $G(\overline{0}) = \mathrm{tr}_{-F(\overline{0})} \circ F(\overline{0}) = F(\overline{0}) - F(\overline{0}) = \overline{0}$. Se sigue de la Proposición 1.19 que $\mathrm{tr}_{-F(\overline{0})} \circ F = G = T_A$ es una transformación ortogonal, entonce:

$$F = \left(\mathrm{tr}_{F(\overline{0})} \circ \mathrm{tr}_{-F(\overline{0})}\right) \circ F = \mathrm{tr}_{F(\overline{0})} \circ \left(\mathrm{tr}_{-F(\overline{0})} \circ F\right) = \mathrm{tr}_{F(\overline{0})} \circ T_A\,.$$

□

El Corolario 1.20 tiene la siguiente consecuencia simple:

Corolario 1.21. *Toda isometría es una función biyectiva y su función inversa también es una isometría.*

Demostración. De las Proposiciones 1.9 y 1.12 se sigue que si T_A es una transformación ortogonal del plano euclidiano, entonces T_A es una función biyectiva y su función inversa $T_{A^{-1}}$ también es una transformación ortogonal (ver los Ejercicios 28 y 33). Además si tr_S es una traslación donde $S \in \mathbb{R}^2$, entonces tr_S también es una función biyectiva cuya inversa es la traslación tr_{-S}.

Por otro lado, sabemos que la composición de funciones biyectivas es biyectiva, por lo que $\mathrm{tr}_{F(\overline{0})} \circ T_A$ es una función biyectiva tal que $\big(\mathrm{tr}_{F(\overline{0})} \circ T_A\big)^{-1} = T_{A^{-1}} \circ \mathrm{tr}_{-F(\overline{0})}$. En particular, toda isometría es biyectiva y su inversa también es una isometría. □

1.8.1. Rotaciones. La siguiente afirmación determina a las isometrías en 2) del Corolario 1.20:

Lema 1.22. *Si $S \in \mathbb{R}^2$ y $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ para algún $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $a^2+b^2 = 1$ y $(a,b) \neq (1,0)$, entonces existe un único punto $R \in \mathbb{R}^2$ tal que:*

$$\mathrm{tr}_S \circ T_A \;=\; \mathrm{tr}_R \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-R}\,.$$

En este caso, $\mathbf{Fix}\big(\mathrm{tr}_S \circ T_A\big) = \big\{R\big\}$.

Demostración. Sea $S = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ para algún $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $a^2+b^2 = 1$ y $(a,b) \neq (1,0)$. Buscamos los puntos $R \in \mathbb{R}^2$ tales que:

$$T_A(P) + S = \mathrm{tr}_S \circ T_A(P) = \mathrm{tr}_R \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-R}(P) = T_A(P) - T_A(R) + R$$

para todo $P \in \mathbb{R}^2$; es decir tales que $S = R - T_A(R) = T_B(R)$ donde $B = \mathrm{I} - A = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ -b & 1-a \end{pmatrix}$.

Notemos por otro lado que como $(a,b) \neq (1,0)$ se tiene que $a \neq 1$, pues $a = 1$ y $a^2+b^2 = 1$ implican $b = 0$. Por lo tanto :

$$\det(B) = \det(\mathrm{I} - A) = (1-a)^2 + b^2 = 1 - 2a + a^2 + b^2 = 2(1-a) \neq 0\,;$$

y entonces de la Proposición 1.9, deducimos que T_B es una función invertible. En particular existe un único punto $R \in \mathbb{R}^2$ tal que $T_B(R) = S$, es decir tal que $\mathrm{tr}_S \circ T_A \;=\; \mathrm{tr}_R \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-R}$.

Observemos que se puede determinar a R de manera más explícita. En efecto, por la Proposición 1.9 la inversa de la transformación lineal T_B es la transformación lineal T_C donde $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-b}{2(1-a)} \\ \frac{b}{2(1-a)} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Nota que $C = B^{-1} = \frac{1}{\det(\mathrm{I}-A)}\left(\mathrm{I} - A^{-1}\right)$ donde $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Por lo tanto, $R \in \mathbb{R}^2$ cumple que $\mathrm{tr}_S \circ T_A \;=\; \mathrm{tr}_{-R} \circ T_A \circ \mathrm{tr}_R$ si y solamente $R = T_C(S)$, es decir si y solamente si $R = \frac{1}{\det(\mathrm{I}-A)}\Big(S - T_{A^{-1}}(S)\Big)$.

Notemos finalmente que si $P \in \mathbb{R}^2$, entonces $\big(\mathrm{tr}_R \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-R}\big)(P) = P$ si y solamente si $T_A(P-R)+R = P$, si y solamente si $T_A(P-R) = P-R$, si y solamente si $P - R \in \mathbf{Fix}(T_A) = \big\{\overline{0}\big\}$ (ver el Lema 1.13), si y solamente si $P = R$. Por lo tanto $\mathbf{Fix}\big(\mathrm{tr}_S \circ T_A\big) = \big\{R\big\}$. □

Por definición, una *rotación* (del plano euclidiano) es una isometría del plano euclidiano $F\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de la forma $F = \mathrm{tr}_R \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-R}$ donde $R \in \mathbb{R}^2$ y $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ para algún $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $a^2 + b^2 = 1$ y $(a,b) \neq (1,0)$.

1.8.2. Reflexiones. El siguiente enunciado determina una forma equivalente de escribir a una parte de las isometrías en 3) del Corolario 1.20:

Lema 1.23. *Si $S \in \mathbb{R}^2$ y $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ para algún $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $a^2 + b^2 = 1$, entonces $S \in \mathbf{Fix}(T_A)^{\perp_{\overline{0}}}$ si y solamente si:*

$$\mathrm{tr}_S \circ T_A \;=\; \mathrm{tr}_R \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-R}$$

para algún punto $R \in \mathbb{R}^2$.

Más aún:

a) *$R, R' \in \mathbb{R}^2$ son tal que:*

$$\mathrm{tr}_R \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-R} \;=\; \mathrm{tr}_{R'} \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-R'}\,,$$

si y solamente si $R - R' \in \mathbf{Fix}(T_A)$.

b) $\mathbf{Fix}\big(\mathrm{tr}_R \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-R}\big) = \mathrm{tr}_R\big(\mathbf{Fix}(T_A)\big)$.

c) $\mathrm{tr}_S \circ T_A \;=\; \mathrm{tr}_{\frac{S}{2}} \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-\frac{S}{2}}$*, en particular* $\mathbf{Fix}\big(\mathrm{tr}_S \circ T_A\big) = \mathrm{tr}_{\frac{S}{2}}\big(\mathbf{Fix}(T_A)\big)$.

En particular R es único si pedimos que $R \in \mathbf{Fix}(T_A)^{\perp_{\overline{0}}}$.

Demostración. Sea $S \in \mathbb{R}^2$ y $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ para algún $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $a^2 + b^2 = 1$. Queremos saber cuándo existe $R \in \mathbb{R}^2$ tal que:

$$T_A(P) + S = \mathrm{tr}_S \circ T_A(P) = \mathrm{tr}_R \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-R}(P) = T_A(P) + R - T_A(R)\,,$$

para todo $P \in \mathbb{R}^2$; es decir tal que $S = R - T_A(R) = T_B(R)$ donde $B = \mathrm{I} - A = \begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -b & 1+a \end{pmatrix}$.

Notemos por otro lado que:

$$\det(B) = \det(\mathrm{I} - A) = (1-a)(1+a) - b^2 = 1 - a^2 - b^2 = 0\,.$$

Se sigue de la Proposición 1.10 que existe $R \in \mathbb{R}^2$ tal que $T_B(R) = S$, si y solamente si S pertenece a la imagen de T_B, si y solamente si S pertenece a la línea que pasa por los puntos $\overline{0}$, $(1-a, -b)$ y $(-b, 1+a)$ (las columnas de B). Por lo tanto, existe $R \in \mathbb{R}^2$ tal que $T_B(R) = S$, si y solamente si S pertenece a la línea:

$$m = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{matrix} bx + (1-a)y = 0 \\ (1+a)x + by = 0 \end{matrix} \right\}.$$

Por otro lado, recordemos de (13) del Lema 1.14 que:

$$\mathbf{Fix}(T_A) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{matrix} (a-1)x + by = 0 \\ bx - (a+1)y = 0 \end{matrix} \right\},$$

en particular $\mathbf{Fix}(T_A)$ es la única línea que pasa por los puntos $\overline{0}$, $(b, 1-a) = (1-a, -b)^{\perp}$ y $\big(-(1+a), -b\big) = (-b, 1+a)^{\perp}$, es decir $m = \mathbf{Fix}(T_A)^{\perp_{\overline{0}}}$.

Por lo tanto, existe $R \in \mathbb{R}^2$ tal que $\mathrm{tr}_S \circ T_A = \mathrm{tr}_R \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-R}$ si y solamente si $S \in \mathbf{Fix}(T_A)^{\perp_{\overline{0}}}$.

Mostremos a). Para ello supongamos primero que $\mathrm{tr}_R \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-R} = \mathrm{tr}_{R'} \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-R'}$ donde $R, R' \in \mathbb{R}^2$. Tenemos en particular que:

$$T_A(-R) + R = \mathrm{tr}_R \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-R}(\overline{0}) = \mathrm{tr}_{R'} \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-R'}(\overline{0}) = T_A(-R') + R',$$

y como T_A es una transformación lineal, concluimos que $R - R' = T_A(R - R')$, es decir $R - R' \in \mathbf{Fix}(T_A)$.

Recíprocamente notemos que si $R - R' \in \mathbf{Fix}(T_A)$ es decir si $R - R' = T_A(R - R')$, se tiene para todo punto $P \in \mathbb{R}^2$ que:

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_R \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-R}(P) &= T_A(P - R) + R = T_A\big((P - R') - (R - R')\big) + R\\ &= T_A(P - R') - T_A(R - R') + R = T_A(P - R') - R + R' + R\\ &= T_A(P - R') + R' = \mathrm{tr}_{R'} \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-R'}(P)\end{aligned}$$

Mostremos b). Notemos para ello que si $P \in \mathbb{R}^2$, entonces $\mathrm{tr}_R \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-R}(P) = P$ si y solamente si $T_A(P - R) = P - R$, si y solamente si $P - R \in \mathbf{Fix}(T_A)$.

Por otro lado tenemos que si $P \in \mathbb{R}^2$, entonces $P \in \mathrm{tr}_R\big(\mathbf{Fix}(T_A)\big)$ si y solamente si $P = \mathrm{tr}_R(Q) = Q + R$ para algún punto $Q \in \mathbf{Fix}(T_A)$, si y solamente si $P - R = Q$ para algún punto $Q \in \mathbf{Fix}(T_A)$, si y solamente si $P - R \in \mathbf{Fix}(T_A)$.

Por lo tanto $\mathbf{Fix}(\mathrm{tr}_S \circ T_A) = \mathrm{tr}_R\big(\mathbf{Fix}(T_A)\big)$.

Mostremos finalmente c). Notemos que $T_A(P) = -P$ si $P = (1-a, -b)$ ó $P = (-b, 1+a)$ (esto se sigue de un simple cálculo, usando $a^2 + b^2 = 1$). Por otro lado, vimos en esta prueba más arriba que $\mathbf{Fix}(T_A)^{\perp_{\overline{0}}}$ es la línea que pasa por los puntos $\overline{0}$, $(1-a, -b)$ y $(-b, 1+a)$. Como T_A es una función lineal, se sigue que $T_A(P) = -P$ para todo $P \in \mathbf{Fix}(T_A)^{\perp_{\overline{0}}}$. En particular $T_A(-\frac{S}{2}) = \frac{S}{2}$ pues por hipótesis $S \in \mathbf{Fix}(T_A)^{\perp_{\overline{0}}}$.

Concluimos que para todo $Q \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_{\frac{S}{2}} \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-\frac{S}{2}}(Q) &= T_A\left(Q - \frac{S}{2}\right) + \frac{S}{2} = T_A(Q) + T_A\left(-\frac{S}{2}\right) + \frac{S}{2}\\ &= T_A(Q) + \frac{S}{2} + \frac{S}{2} = T_A(Q) + S = \mathrm{tr}_S \circ T_A(Q).\end{aligned}$$

$\square$

Una *reflexión* (del plano euclidiano) es una isometría del plano euclidiano $F\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de la forma $F = \mathrm{tr}_R \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-R}$ donde $R \in \mathbb{R}^2$ y $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ para algún $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $a^2 + b^2 = 1$.

1.8.3. Reflexiones deslizantes. Determinemos finalmente a la parte de las isometrías en 3) del Corolario 1.20 que no son reflexiones:

Lema 1.24. *Si* $S \in \mathbb{R}^2$ *y* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ *para algún* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $a^2 + b^2 = 1$, *entonces* $S \notin \mathbf{Fix}(T_A)^{\perp_{\overline{0}}}$ *si y solamente si:*

$$\mathrm{tr}_S \circ T_A \; = \; \mathrm{tr}_Q \circ \big(\mathrm{tr}_R \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-R}\big) \; = \; \big(\mathrm{tr}_R \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-R}\big) \circ \mathrm{tr}_Q \, ,$$

para únicos $R \in \mathbf{Fix}(T_A)^{\perp_{\overline{0}}}$ *y* $Q \in \mathbf{Fix}(T_A) \backslash \{\overline{0}\}$.

Demostración. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ una matriz tal que $a^2 + b^2 = 1$. Mostremos primero que si $S \in \mathbb{R}^2$ es un punto arbitrario del plano, entonces existen únicos $Q \in \mathbf{Fix}(T_A)$ y $Q' \in \mathbf{Fix}(T_A)^{\perp_{\overline{0}}}$ tales que $S = Q + Q'$.

Mostremos la existencia. Notemos que si $S \in \mathbf{Fix}(T_A)$ entonces $S = Q + Q'$ donde $Q = S$ y $Q' = \overline{0}$, mientras que si $S \in \mathbf{Fix}(T_A)^{\perp_{\overline{0}}}$ entonces $S = Q + Q'$ donde $Q = \overline{0}$ y $Q' = S$. Supongamos por otro lado que $S \notin \big(\mathbf{Fix}(T_A) \cup \mathbf{Fix}(T_A)^{\perp_{\overline{0}}}\big)$. Consideremos ℓ la línea paralela a $\mathbf{Fix}(T_A)$ por S y ℓ' la línea paralela a $\mathbf{Fix}(T_A)^{\perp_{\overline{0}}}$ por S. Notemos que las líneas ℓ' y $\mathbf{Fix}(T_A)$ no son paralelas, pues paralelismo es una relación de equivalencia; en particular $\ell' \cap \mathbf{Fix}(T_A)$ consiste de un único punto. Digamos $\{Q\} = \ell' \cap \mathbf{Fix}(T_A)$. Del mismo modo $\ell \cap \mathbf{Fix}(T_A)^{\perp_{\overline{0}}} = \{Q'\}$.

Deducimos de la interpretación geométrica de la suma de vectores que $\ell \cap \ell' = \{Q + Q'\}$. Pero tenemos que $S \in \ell \cap \ell'$. Por lo tanto $S = Q + Q'$ para algunos $Q \in \mathbf{Fix}(T_A)$ y $Q' \in \mathbf{Fix}(T_A)^{\perp_{\overline{0}}}$.

Para mostrar la unicidad notemos que si $Q_1 + Q_1' = Q_2 + Q_2'$ donde $Q_1, Q_2 \in \mathbf{Fix}(T_A)$ y $Q_1', Q_2' \in \mathbf{Fix}(T_A)^{\perp_{\overline{0}}}$, entonces $Q_1 - Q_2 = Q_2' - Q_1'$ es un punto en la intersección de dos líneas ortogonales $\mathbf{Fix}(T_A) \cap \mathbf{Fix}(T_A)^{\perp_{\overline{0}}} = \{\overline{0}\}$, es decir $Q_1 - Q_2 = \overline{0} = Q_2' - Q_1'$; por lo que $Q_1 = Q_2$ y $Q_1' = Q_2'$.

Supongamos ahora que $S \notin \mathbf{Fix}(T_A)^{\perp_{\overline{0}}}$. Entonces $S = Q + Q'$ donde $Q \in \mathbf{Fix}(T_A) \backslash \{\overline{0}\}$ y $Q' \in \mathbf{Fix}(T_A)^{\perp_{\overline{0}}}$ Notemos $Q \neq 0$ porque si $Q = 0$ entonces $S = Q' \in \mathbf{Fix}(T_A)^{\perp_{\overline{0}}}$. Se sigue entonces del Corolario 1.23 que:

$$\mathrm{tr}_S \circ T_A = \mathrm{tr}_{Q+Q'} \circ T_A = \mathrm{tr}_Q \circ \mathrm{tr}_{Q'} \circ T_A = \mathrm{tr}_Q \circ \left(\mathrm{tr}_{\frac{Q'}{2}} \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-\frac{Q'}{2}}\right)$$

Por otro lado, como $Q \in \mathbf{Fix}(T_A) \backslash \{\overline{0}\}$, se tiene en particular que $T_A(Q) = Q$. Entonces para todo punto $P \in \mathbb{R}^2$ se tiene que:

$$T_A \circ \mathrm{tr}_Q(P) = T_A(P + Q) = T_A(P) + T_A(Q) = T_A(P) + Q = \mathrm{tr}_Q \circ T_A(P) \, .$$

Deducimos que:

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{tr}_{\frac{Q'}{2}} \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-\frac{Q'}{2}}\right) \circ \mathrm{tr}_Q &= \mathrm{tr}_{\frac{Q'}{2}} \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-\frac{Q'}{2}+Q} = \mathrm{tr}_{\frac{Q'}{2}} \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{Q-\frac{Q'}{2}} = \mathrm{tr}_{\frac{Q'}{2}} \circ \big(T_A \circ \mathrm{tr}_Q\big) \circ \mathrm{tr}_{\frac{Q'}{2}} \\
&= \mathrm{tr}_{\frac{Q'}{2}} \circ \big(\mathrm{tr}_Q \circ T_A\big) \circ \mathrm{tr}_{\frac{Q'}{2}} = \mathrm{tr}_{\frac{Q'}{2}+Q} \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{\frac{Q'}{2}} = \mathrm{tr}_{Q+\frac{Q'}{2}} \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{\frac{Q'}{2}} \\
&= \mathrm{tr}_Q \circ \left(\mathrm{tr}_{\frac{Q'}{2}} \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-\frac{Q'}{2}}\right)
\end{aligned}$$

Recíprocamente supongamos que $\mathrm{tr}_S \circ T_A = \mathrm{tr}_Q \circ \big(\mathrm{tr}_R \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-R}\big)$ para algunos $R \in \mathbf{Fix}(T_A)^{\perp_{\overline{0}}}$ y $Q \in \mathbf{Fix}(T_A)\backslash\{\overline{0}\}$. Se sigue entonces que:

$$S = \mathrm{tr}_S \circ T_A(\overline{0}) = \mathrm{tr}_Q \circ \big(\mathrm{tr}_R \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-R}\big)(\overline{0}) = 2R + Q\,,$$

pues $R \in \mathbf{Fix}(T_A)^{\perp_{\overline{0}}}$ y entonces $T_A(-R) = R$. En particular si $S \in \mathbf{Fix}(T_A)^{\perp_{\overline{0}}}$ entonces $Q = S - 2R \in \mathbf{Fix}(T_A)^{\perp_{\overline{0}}}$. Como $Q \in \mathbf{Fix}(T_A)$ y $Q \neq \overline{0}$, esto es una contradicción. Por lo tanto $S \notin \mathbf{Fix}(T_A)^{\perp_{\overline{0}}}$. □

Una *reflexión deslizante* (del plano euclidiano) es una isometría $F\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de la forma $F = \mathrm{tr}_Q \circ \big(\mathrm{tr}_R \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-R}\big)$ donde $R \in \mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ para algún $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $a^2 + b^2 = 1$ y $Q \in \mathbf{Fix}(T_A)\backslash\{\overline{0}\}$.

Corolario 1.25. *Si $F\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una isometría del plano euclidiano, entonces F pertenece a una y solamente una de las siguientes familias:*

(I) *F es una traslación, es decir $F = \mathrm{tr}_S$ para algún punto $S \in \mathbb{R}^2$.*

(II) *F es una rotación, es decir $F = \mathrm{tr}_R \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-R}$ donde $R \in \mathbb{R}^2$ y $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ para algún $(a,b) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(1,0)\}$ tal que $a^2 + b^2 = 1$.*

(III) *F es una reflexión, es decir $F = \mathrm{tr}_R \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-R}$ donde $R \in \mathbb{R}^2$ y $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ para algún $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $a^2 + b^2 = 1$.*

(IV) *F es una reflexión deslizante, es decir $F = \mathrm{tr}_Q \circ \big(\mathrm{tr}_R \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-R}\big)$ donde $R \in \mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ para algún $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $a^2 + b^2 = 1$ y $Q \in \mathbf{Fix}(T_A)\backslash\{\overline{0}\}$.*

Demostración. Este enunciado es una consecuencia del Corolario 1.20 y de los Lemas 1.22, 1.23 y 1.24 □

1.9. Ejercicios.

22.- Sean $\ell, \ell', m \subseteq \mathbb{R}^2$ líneas del plano euclidiano tales que $\ell \perp \ell'$ y $\ell \parallel m$. Muestra que $\ell' \perp m$ y $\ell \cap \ell' = \{P\}$ para algún $P \in \mathbb{R}^2$.

23.- Sean $\ell, \ell' \subseteq \mathbb{R}^2$ líneas de ecuación cartesiana $ax + by + c = 0$ y $a'x + b'y + c' = 0$ respectivamente. Muestra que $\ell \perp \ell'$ (ver el párrafo anterior al Lema 1.11) si y solamente si existe un número real $\alpha \neq 0$ tal que $a' = \alpha b$ y $b' = -\alpha a$.

24.- Sean $\overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^2$ tales que $\overline{0}$, $\overline{u}$ y $\overline{v}$ no son colineales. Denota como ℓ a la línea por $\overline{0}$ y $\overline{u}$, como m a la línea por $\overline{v}$ ortogonal a ℓ (ver el Lema 1.11) y como $\overline{w}$ al punto del plano tal que $\ell \cap m = \{\overline{w}\}$ (ver Ejercicio anterior). Muestra que $\|\overline{w}\| = \left|\frac{\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle}{\|\overline{u}\|}\right|$.

25.- Si $T_A\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una rotación en el origen, muestra que para todo $\overline{u} \in \mathbb{R}^2$ se tiene que $\frac{\left\langle \overline{u}, T_A(\overline{u})\right\rangle}{\|\overline{u}\| \|T_A(\overline{u})\|} = a$.

26.- Sean $T_A, T_B\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dos rotaciones en el origen. Mostrar:

a) $\mathrm{tr}_R \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-R} = \mathrm{tr}_Q \circ T_B \circ \mathrm{tr}_{-Q}$ si y solamente si $R = Q$ y $A = B$.

b) Verifica que $\mathrm{tr}_S \circ T_A = T_A \circ \mathrm{tr}_R$ si y solamente si $T_A(R) = S$.

27.- Determina las coordenadas del único punto $R \in \mathbb{R}^2$ tal que $\mathrm{tr}_S \circ T_A = \mathrm{tr}_R \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-R}$ (ver el Lema 1.22), donde $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $S = (\alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$.

28.- Si $F\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una rotación, determina la función inversa de F y muestra que F^{-1} es una rotación (recuerda la Proposición 1.9).

Si $F, G\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ son dos rotaciones, muestra que la isometría $F \circ G$ es una traslación ó una rotación.

29.- Determina una ecuación cartesiana y una representación vectorial de la línea de los puntos fijos de la reflexión $\mathrm{tr}_{(1,2)} \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{(-1,-2)}$ donde $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

30.- Determina las coordenadas del único punto $R \in \mathbf{Fix}(T_A)^{\perp_{\overline{0}}}$ tal que $\mathrm{tr}_S \circ T_A = \mathrm{tr}_R \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-R}$ (ver el Lema 1.22), donde $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $S = (\alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$.

31.- Sea $F\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una reflexión respecto a una línea por el origen.

a) Muestra que $\mathrm{tr}_S \circ F = F \circ \mathrm{tr}_R$ si y solamente si $F(R) = (S)$.

b) Si $P \in \mathbb{R}^2$ no es punto fijo de F muestra que la línea que pasa por P y $F(P)$ a la que denotamos ℓ_P es ortogonal a la línea $\mathrm{Fix}(F)$ de los puntos fijos de F.

c) Denotemos como R_P al punto de intersección de las líneas ℓ_P y $\mathrm{Fix}(T)$. Muestra que $d(P, R_P) = d\big(R_P, T(P)\big)$.

32.- Sea ℓ la línea de $\mathbb{R}^2$ de ecuación cartesiana $\alpha x + \beta y = 0$ donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ cumplen que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

a) Determina la ecuación cartesiana de $\ell^{\perp_{\overline{0}}}$ la línea por el origen ortogonal a ℓ.

b) Encuentra representaciones vectoriales de ℓ y $\ell^{\perp_{\overline{0}}}$.

c) Si $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ es un punto cualquiera, determina una ecuación cartesiana y una representación vectorial de la línea $\ell^{\perp_P}$ que pasa por P y es ortogonal a ℓ.

d) Determina las coordenadas del punto de intersección $R_P = (x_0', y_0')$ de $\ell^{\perp_P}$ y ℓ.

e) Si $Q_P = R_P - (P - R_P) = 2R_P - P$, muestra que $Q_P \in \ell^{\perp_P}$ y $d(P, R_P) = d(R_P, Q_P)$.

f) Muestra que la función $F\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $F(P) = Q_P = 2R_P - P$ es una reflexión respecto a una línea por el origen. Determina la línea $\mathbf{Fix}(F)$.

33.- Si $F\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una reflexión, muestra que $F \circ F = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$, es decir F es ella misma su función inversa.

Si $F, G\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ son dos reflexiones, muestra que la composición $F \circ G$ es una traslación ó una rotación.

34.- Sea $F\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una reflexión y $S \in \mathbb{R}^2$. Muestra que $\mathrm{tr}_S \circ F = F \circ \mathrm{tr}_S$ si y solamente si $\mathrm{tr}_S\big(\mathbf{Fix}(F)\big) = \mathbf{Fix}(F)$.

35.- Sean $F, G\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ las isometrías $F = \mathrm{tr}_R \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{-R}$ y $G = \mathrm{tr}_Q \circ T_B \circ \mathrm{tr}_{-Q}$, donde $R, Q \in \mathbb{R}^2$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ cumple $a^2 + b^2 = 1$.

a) Determina $S \in \mathbb{R}^2$ y $C = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & -a' \end{pmatrix}$ tales que $G \circ F \circ G^{-1} = \mathrm{tr}_S \circ T_C \circ \mathrm{tr}_{-S}$.

b) Encuentra $S' \in \mathbb{R}^2$ tal que $F \circ G \circ F^{-1} = \mathrm{tr}_{S'} \circ T_B \circ \mathrm{tr}_{-S'}$.

c) Muestras que $G \circ F \circ G^{-1} = F$ si y solamente si $Q \in \mathbf{Fix}(F)$.

36.- Sea $F\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una rotación con $\mathbf{Fix}(F) = \{R\}$. Si $G\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una reflexión tal que $R \in \mathbf{Fix}(G)$, muestra que existen únicas reflexiones $H_1\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $H_2\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tales que $H_1 \circ G = F = G \circ H_2$.

37.- Sea $F\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una traslación. Si $G\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una reflexión, muestra que existen únicas reflexiones $H_1\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $H_2\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tales que $H_1 \circ G = F = G \circ H_2$.

38.- Sea $F\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una reflexión respecto a una línea por el origen, $\overline{u} \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Muestra que $F(\overline{u}) = \alpha\, \overline{u}$ si y solamente si $\overline{u} \in \mathbf{Fix}(F)$ ó $\overline{u} \in \mathbf{Fix}(F)^{\perp_{\overline{0}}}$. Más aún, muestra que si $\overline{u} \in \mathbf{Fix}(F)^{\perp_{\overline{0}}}$ entonces $F(\overline{u}) = -\overline{u}$ (no se puede usar el Lema 1.15, solamente el Lema 1.14).

39.- Si $F, G\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ son dos reflexiones respecto a líneas por el origen, muestra que $F = G$ si y solamente si $\mathbf{Fix}(F) = \mathbf{Fix}(G)$ (ver el Lema 1.14). Muestra lo mismo para reflexiones arbitrarias del plano (ver los incisos del Lema 1.23).

40.- Si $m \subseteq \mathbb{R}^2$ es una línea cualquiera del plano, muestra que existe una única reflexión $F\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $m = \mathbf{Fix}(F)$ (ver los Ejercicios 32 y 39).

41.- Escribe las reflexiones respecto de las líneas ℓ y ℓ' en la forma $\mathrm{tr}_{(x_0,y_0)} \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{(-x_0,-y_0)}$ donde $\ell\colon x - \sqrt{3}y + \sqrt{3} = 0$ y $\ell'\colon x - 4 = 0$.

42.- Considera la isometría $F = \mathrm{tr}_{(2,2)} \circ \big(\mathrm{tr}_{(1,2)} \circ T_A \circ \mathrm{tr}_{(-1,-2)}\big)$ donde $T_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$. Haz un esbozo de los conjuntos Ω, $F(\Omega)$ y $F \circ F(\Omega)$, donde $\Omega = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; y \geq 0,\ \ x \geq y \text{ y } y + x \geq 2 \Big\}$.

43.- Si $F\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una isometría tal que:

$$F(0,0) = (0,0),\ F(1,0) = (1,0) \text{ y } F(0,1) = (0,1)\,,$$

muestra que $F = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.

44.- Sea $F\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una isometría del plano euclidiano.

a) Muestra que existe una traslación $\mathrm{tr}_S\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\mathrm{tr}_S \circ F(\overline{0}) = \overline{0}$.

b) Verifica que existe una rotación en el origen $T_A\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:

$$T_A \circ \mathrm{tr}_S \circ F(1,0) = (1,0)\,,$$

donde S es como en a).

c) Demuestra que $T_A \circ \mathrm{tr}_S \circ F(0,1) = (0,1)$ ó $T_A \circ \mathrm{tr}_S \circ F(0,1) = (0,-1)$, donde S y A son como en a) y b) respectivamente.

d) Concluye que $F = \mathrm{tr}_{-S} \circ T_{A^{-1}}$ ó $F = \mathrm{tr}_{-S} \circ T_{A^{-1}} \circ T_B$ donde $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, S es como en a) y A es como en b).

1.10. Semejanza. Una *semejanza* (del plano euclidiano) es una función $F\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con la propiedad que existe un número real $\alpha > 0$ tal que:

$$d\big(T(P), T(Q)\big) = \alpha\, d(P,Q) \quad \text{para} \quad \text{cualesquiera} \quad P, Q \in \mathbb{R}^2\,.$$

Al número real $\alpha > 0$ en la definición de arriba lo llamamos *la razón de F*.

Corolario 1.26. *Si $F\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una semejanza de razón $\alpha \neq 1$, entonces ....*