1.- Sea $\ell \subset \mathbb{R}^2$ una línea y $A \in \mathbb{R}^2$ un punto que no pertenece a ℓ. Determina una línea $\ell' \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\mathrm{rot}_{A,\pi} \circ \mathrm{ref}_\ell \circ \mathrm{rot}_{A,\pi} = \mathrm{ref}_{\ell'}$, y encuentra un punto $B \in \mathbb{R}^2$ con la propiedad $\mathrm{ref}_\ell \circ \mathrm{rot}_{A,\pi} \circ \mathrm{ref}_\ell = \mathrm{rot}_{B,\pi}$.

2.- Sea $\ell \subset \mathbb{R}^2$ una línea y $A \in \mathbb{R}^2$ un punto arbitrario. Muestra que si $\mathrm{ref}_\ell \circ \mathrm{rot}_{A,\pi} \circ \mathrm{ref}_\ell = \mathrm{rot}_{A,\pi}$, entonces $A \in \ell$.

3.- Muestra que si $\ell \subset \mathbb{R}^2$ es una línea y $P \in \mathbb{R}^2$ es un punto distinto del $\overline{0}$, entonces $\mathrm{tr}_P \circ \mathrm{ref}_\ell = \mathrm{ref}_\ell \circ \mathrm{tr}_P$ si y solamente si $\mathrm{tr}_P(\ell) = \ell$.

4.- Si $P \in \mathbb{R}^2$ es un punto distinto del $\overline{0}$ y $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una reflexión deslizante en la línea $\ell \subset \mathbb{R}^2$, prueba que $\mathrm{tr}_P \circ T = T \circ \mathrm{tr}_P$ si y solamente si $\mathrm{tr}_P(\ell) = \ell$.

5.- Sea $\alpha > 0$ un número real. Si $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ son tres puntos distintos (posiblemente colineales) y $A', B', C' \in \mathbb{R}^2$ satisfacen que $d(A,B) = \alpha d(A',B')$, $d(B,C) = \alpha d(B',C')$ y $d(A,C) = \alpha d(A',C')$, muestra que existe una semejanza $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$ y $\varphi(C) = C'$. ¿Cuántas semejanzas con esta propiedad existen?

Recuerda que dos líneas se dice que son *paralelas* si estas son iguales o no tienen puntos en común. Una *dilatación* del plano es una función $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que si $\ell \subset \mathbb{R}^2$ es una línea, entonces $\varphi(\ell)$ es una línea paralela a ℓ.

6.- Identifica a todas las semejanzas de $\mathbb{R}^2$ que son dilataciones.

7.- Muestra que toda dilatación es una semejanza, en particular toda semejanza es una función biyectiva.

8.- Muestra que si $A, B \in \mathbb{R}^2$ y $A', B' \in \mathbb{R}^2$ son parejas de puntos distintos tales que la línea por A y B es paralela a la línea por A' y B', entonces existe una semejanza φ de $\mathbb{R}^2$ la cual es una dilatación tal que $\varphi(A) = A'$ y $\varphi(B) = B'$. ¿Cuántas semejanzas con esta propiedad existen? ¿Cuáles de entre ellas son dilataciones?

Recuerda que un subconjunto $G \subseteq \left\{ T\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ \middle|\ T \text{ es una isometría} \right\}$ es llamado un *grupo de transformaciones euclidianas del plano* si se cumplen las propiedades :

(a) La función identidad $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ pertenece a G.

(b) Si $T \in G$ entonces $T^{-1} \in G$.

(c) Si $T, T' \in G$ entonces $T' \circ T \in G$.

9.- Identifica cuáles de los siguientes subconjuntos de isometrías del plano son grupos de transformaciones euclidianas :

(a) $G_1 = \left\{ T_1^n \circ T_2^m \,\middle|\, n, m \in \mathbb{Z} \right\}$ donde T_1 y T_2 son dos traslaciones.

(b) $G_2 = \left\{ \text{Rotaciones con centro arbitrario un ángulo } (a,b) \right\} \bigcup \left\{ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} \right\}$ donde $(a,b) \in \mathbb{S}^1 \backslash \left\{(1,0)\right\}$ es fijo.

(c) $G_3 = \left\{ \text{Rotaciones con centro } P \text{ un ángulo } (a,b) \right\} \bigcup \left\{ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} \right\}$ donde $(a,b) \in \mathbb{S}^1 \backslash \left\{(1,0)\right\}$ y $P \in \mathbb{R}^2$ son fijos.

(d) $G_4 = \left\{ \text{Rotaciones con centro } P \text{ un ángulo } (a_i, b_i) \text{ para alguna } 0 \leq i \leq k \right\} \bigcup \left\{ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} \right\}$ donde $k \geq 2$ es un número natural, $(a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k) \in \mathbb{S}^1 \backslash \left\{(1,0)\right\}$ y $P \in \mathbb{R}^2$ son fijos.

(e) $G_5 = \left\{ \text{Traslaciones} \right\} \bigcup \left\{ \text{Rotaciones con centro arbitrario un ángulo } (-1,0) \right\}$.

(f) $G_6 = \left\{ \text{Semejanzas de razón } \alpha \text{ donde } \alpha \in \mathbb{N} \backslash \{0\} \right\}$.

(g) $G_7 = \left\{ \text{Rotaciones con centro } P \text{ un ángulo arbitrario} \right\} \bigcup \left\{ \text{Reflexiones respecto de } \ell \text{ donde } P \in \ell \right\} \bigcup \left\{ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} \right\}$, donde $P \in \mathbb{R}^2$ es fijo.

(h) $G_8 = \left\{ \text{Traslaciones por } P \text{ donde } P \in \ell \right\} \bigcup \left\{ \text{Reflexiones respecto de } m \text{ donde } m \perp \ell \right\}$ donde $\ell \subseteq \mathbb{R}^2$ es una línea fija por el origen.