Definición 1. Una *geometría euclidiana plana* es una pareja $\mathcal{G} = (X, \mathcal{L})$ formada por un conjunto X y una colección $\mathcal{L}$ de subconjuntos de X, cuyos elementos son llamados respectivamente los *puntos* y las *líneas* de $\mathcal{G}$, tales que:

P0' Existen al menos tres puntos que no están contenidos en una misma línea.
P1 Dados cualesquiera dos puntos distintos existe una única línea que los contiene.
P2^{eu} Por un punto fuera de una línea ℓ pasa una única línea que no corta ℓ.

Ejercicio 1. Muestra que si ℓ y ℓ' son dos líneas distintas de $\mathcal{G}$ tales que $\ell \cap \ell' \neq \emptyset$ entonces $\ell \cap \ell'$ consiste de un único punto de $\mathcal{G}$.

Recuerda que si $\ell, \ell' \in \mathcal{L}$ son dos líneas de $\mathcal{G}$ decimos que ℓ y ℓ' son *paralelas* si $\ell = \ell'$ o $\ell \cap \ell' = \emptyset$.

Ejercicio 2. Muestra que la relación de paralelismo es una relación de equivalencia en el conjunto $\mathcal{L}$ de las líneas de $\mathcal{G}$.

El conjunto de las clases de equivalencia es llamado el conjunto de las *direcciones* de $\mathcal{G}$. Una dirección de $\mathcal{G}$ es entonces un subconjunto de $\mathcal{L}$ de la forma:

$$[\ell_0] = \left\{ \ell \in \mathcal{L} \,\middle|\, \ell \text{ es paralela a } \ell_0 \right\}$$

para alguna línea ℓ_0 de $\mathcal{G}$.

Ejercicio 3. Si $\mathcal{G}$ es una geometría euclidiana plana y P es un punto de $\mathcal{G}$ determina una función biyectiva entre el conjunto de las direcciones de $\mathcal{G}$ y el conjunto de las líneas que pasan por P.

Definición 2. Si $\mathcal{G}$ es una geometría euclidiana plana una *dilatación* de $\mathcal{G}$ es una función $f\colon\ X \longrightarrow X$ tal que para toda línea ℓ de $\mathcal{G}$, el subconjunto $f(\ell)$ de X también es una línea de $\mathcal{G}$ la cual es paralela a ℓ.

Proposición 3. La función identidad es una dilatación y la composición de dilataciones es nuevamente una dilatación. Más aún, toda dilatación es una función biyectiva y su función inversa es una dilatación. Dicho de otro modo, el conjunto de las dilataciones de $\mathcal{G}$ es un grupo bajo composición de funciones.

Si f es una dilatación de $\mathcal{G}$ decimos que $P \in X$ es un *punto fijo* de f si $f(P) = P$ y que $\ell \in \mathcal{L}$ es una *línea invariante* de f si $f(\ell) = \ell$. El conjunto de los puntos fijos de una dilatación f es denotado $\mathbf{Fix}(f)$ y el conjunto de las líneas invariantes $\mathbf{Tr}(f)$. Llamamos a $\mathbf{Tr}(f)$ la *traza de f*.

Ejercicio 4. Si f es una dilatación de una geometría euclidiana plana $\mathcal{G}$ muestra lo siguiente:

a) Si $P \in X$ es un punto fijo de f y ℓ es una línea de $\mathcal{G}$ tal que $P \in \ell$ entonces ℓ es una línea invariante de $\mathcal{G}$.
b) Si ℓ y ℓ' son dos líneas invariantes de f tales que $\ell \cap \ell' = \{A\}$, entonces A es un punto fijo de f.
c) Si $P \in X$ no es un punto fijo de f, la única línea por P y $f(P)$ es una línea invariante de f.

Proposición 4. Sea f una dilatación de una geometría euclidiana plana $\mathcal{G}$, entonces:

a) f tiene al menos dos puntos fijos distintos si y solamente si f es la función identidad.
b) $\mathbf{Fix}(f) = \{A\}$ si y solamente si $\mathbf{Tr}(f) = \left\{ \ell \in \mathcal{L} \,\middle|\, A \in \ell \right\}$.
c) $\mathbf{Fix}(f) = \emptyset$ si y solamente si $\mathbf{Tr}(f) = \left\{ \ell \in \mathcal{L} \,\middle|\, \ell \text{ es paralela a } \ell_0 \right\} = [\ell_0]$ para alguna línea ℓ_0 de $\mathcal{G}$, es decir si la traza de f es una dirección de $\mathcal{G}$.

Decimos que una dilatación f distinta de la identidad es una *traslación* si $\mathbf{Fix}(f) = \emptyset$, y que es una *homotecia con signo* (*de centro* A) si $\mathbf{Fix}(f) = \{A\}$.

Proposición 5. Sean f y g dos traslaciones de una geometría euclidiana plana $\mathcal{G}$. Si existe un punto P de $\mathcal{G}$ tal que $f(P) = g(P)$ entonces $f = g$.

Ejercicio 5. Si $\mathcal{G}$ es una geometría euclidiana plana, muestra que los siguientes subconjuntos de dilataciones son cerrados bajo composición de funciones y tomar función inversa, es decir que son subgrupos del grupo de las dilataciones de $\mathcal{G}$:

a) $\left\{ f \text{ dilatación} \,\middle|\, A \in \mathbf{Fix}(f) \right\}$ donde A es un punto de $\mathcal{G}$ dado.
b) $\left\{ f \text{ traslación} \right\} \sqcup \left\{ \mathrm{id}_X \right\}$.
c) $\left\{ f \text{ dilatación} \,\middle|\, [\ell_0] \subseteq \mathbf{Fix}(f) \right\}$ donde ℓ_0 es un línea de $\mathcal{G}$ dada.

Ejercicio 6. Si f es una traslación y φ es una dilatación de una geometría euclidiana plana $\mathcal{G}$, entonces la dilatación $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es una traslación y $\mathbf{Tr}(f) = \mathbf{Tr}(\varphi \circ f \circ \varphi^{-1})$.