De degeneraciones tóricas

Lara Bossinger

Universidad Nacional Autónoma de México, IM-Oaxaca

Seminario de Álgebra Conmutativa y Geometría Algebraica del CIMAT,
10 de septiembre 2021

Motivación

Variedades tóricas: Y una variedad proyectiva de dimensión d es *tórica* si contiene un toro denso $(k^*)^d$ cuyo propia acción se extiende a Y.

Motivación

Variedades tóricas: Y una variedad proyectiva de dimensión d es *tórica* si contiene un toro denso $(k^*)^d$ cuyo propia acción se extiende a Y.

$$\left\{\begin{matrix}\text{propiedades}\\ \text{geométricas de } Y\end{matrix}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{propiedades combinatorias del}\\ \text{politopo asociado a } Y\end{matrix}\right\}$$

Motivación

Variedades tóricas: Y una variedad proyectiva de dimensión d es *tórica* si contiene un toro denso $(k^*)^d$ cuyo propia acción se extiende a Y.

$$\left\{\begin{array}{c}\text{propiedades}\\ \text{geométricas de } Y\end{array}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{propiedades combinatorias del}\\ \text{politopo asociado a } Y\end{array}\right\}$$

Para variedades proyectivas podemos tener *degeneraciones tóricas* y esperar obtener información de la variedad tórica (e.g. la dimensión, el grado, el polinomio de Hilbert, un mapeo de momento)

Motivación

Variedades tóricas: Y una variedad proyectiva de dimensión d es *tórica* si contiene un toro denso $(k^*)^d$ cuyo propia acción se extiende a Y.

$$\left\{\begin{array}{c}\text{propiedades}\\ \text{geométricas de } Y\end{array}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{propiedades combinatorias del}\\ \text{politopo asociado a } Y\end{array}\right\}$$

Para variedades proyectivas podemos tener *degeneraciones tóricas* y esperar obtener información de la variedad tórica (e.g. la dimensión, el grado, el polinomio de Hilbert, un mapeo de momento)

Ruta

1. Definición
2. Construcciones desde
   1. valuaciones
   2. la teoría de Gröbner
3. Subálgebras tóricas y proyecciones

Degeneraciones tóricas

Definition

Sea X una variedad proyectiva. Una *degeneración tórica* de X es un morfismo plano $\xi : \mathfrak{X} \to \mathbb{A}^1$ cuyo *fibra especial* $\xi^{-1}(0)$ es una variedad tórica y con un isomorfismo sobre $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$:

Degeneraciones tóricas

Definition

Sea X una variedad proyectiva. Una *degeneración tórica* de X es un morfismo plano $\xi : \mathfrak{X} \to \mathbb{A}^1$ cuyo *fibra especial* $\xi^{-1}(0)$ es una variedad tórica y con un isomorfismo sobre $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X} \setminus \xi^{-1}(0) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\xi"'] & & X \times (\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \arrow[dl, two heads] \\ & \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} & \end{tikzcd}$$

$\mathfrak{X}$ es una *familia* de fibras, X es la *fibra genérica*.

Degeneraciones tóricas

Definition

Sea X una variedad proyectiva. Una *degeneración tórica* de X es un morfismo plano $\xi : \mathfrak{X} \to \mathbb{A}^1$ cuyo *fibra especial* $\xi^{-1}(0)$ es una variedad tórica y con un isomorfismo sobre $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X} \setminus \xi^{-1}(0) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\xi"'] & & X \times (\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \arrow[dl, two heads] \\ & \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} & \end{tikzcd}$$

$\mathfrak{X}$ es una *familia* de fibras, X es la *fibra genérica*.

Ejemplo: Una degeneración tórica *encajada* es, por ejemplo $\mathfrak{X} = V(y^2z - x^3 + txz^2) \subset \mathbb{P}^2_{x:y:z} \times \mathbb{A}^1_t$.

Degeneraciones tóricas algebraicas

Una degeneración tórica *algebraica* es equivalente a la siguiente información:

- un $k[t]$-álgebra finitamente generada con graduación positiva $\mathfrak{R}$
- un dominio entero con graduación positiva $R = \bigoplus_{i\geq 0} R_i$

Degeneraciones tóricas algebraicas

Una degeneración tórica *algebraica* es equivalente a la siguiente información:

- un $k[t]$-álgebra finitamente generada con graduación positiva $\mathfrak{R}$
- un dominio entero con graduación positiva $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$

que cumplen:

1. $\mathfrak{R}[t^{-1}] \cong R[t, t^{-1}]$ como $k[t]$-módulos y álgebras graduadas;
2. $R_0 := \mathfrak{R}/(t)$ es un álgebra de un semigrupo $k[S]$ con $S \subset \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}^d$ finitamente generado;
3. la acción de k^* en $k[t]$ se extiende a $\mathfrak{R}$ respetando la graduación y $k[t]$ actúa como $(k^*)^d$ en R_0.

Degeneraciones tóricas algebraicas

Una degeneración tórica *algebraica* es equivalente a la siguiente información:

- un $k[t]$-álgebra finitamente generada con graduación positiva $\mathfrak{R}$
- un dominio entero con graduación positiva $R = \bigoplus_{i\geq 0} R_i$

que cumplen:

1. $\mathfrak{R}[t^{-1}] \cong R[t, t^{-1}]$ como $k[t]$-módulos y álgebras graduadas;
2. $R_0 := \mathfrak{R}/(t)$ es un álgebra de un semigrupo $k[S]$ con $S \subset \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}^d$ finitamente generado;
3. la acción de k^* en $k[t]$ se extiende a $\mathfrak{R}$ respetando la graduación y $k[t]$ actúa como $(k^*)^d$ en R_0.

Theorem (Kaveh–Manon–Murata arxiv 2017)

En este caso existe una valuación $\nu : R \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}^d$ con imagen S tal que $R_0 = k[S]$ y $\mathfrak{R}$ es el álgebra de Rees de ν.

Degeneraciones tóricas desde valuaciones

$R = \bigoplus_{i\geq 0} R_i$ una k-álgebra graduada y dominio entero.
Un mapeo $\nu : R \setminus \{0\} \to (\mathbb{Z}^d, <)$ es una *valuación (Krull)* si para $f, g \in R \setminus \{0\}$ y $c \in k$

$$\nu(fg) = \nu(f) + \nu(g), \quad \nu(cf) = \nu(f), \quad \nu(f+g) \geq \min{}_{<}\{\nu(f), \nu(g)\}$$

[1] $\Leftrightarrow R_\nu/\mathfrak{m}_\nu = k$, e.g. si ν es de *rango completo*, i.e. $\operatorname{rank}(S) = \dim(R)$ usando la desigualdad de Abhyankar

Degeneraciones tóricas desde valuaciones

$R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ una k-álgebra graduada y dominio entero.
Un mapeo $\nu : R \setminus \{0\} \to (\mathbb{Z}^d, <)$ es una *valuación (Krull)* si para $f, g \in R \setminus \{0\}$ y $c \in k$

$$\nu(fg) = \nu(f) + \nu(g), \quad \nu(cf) = \nu(f), \quad \nu(f+g) \geq \min{}_{<}\{\nu(f), \nu(g)\}$$

$\rightsquigarrow S := \mathrm{im}(\nu)$ es un semigrupo.

[1] $\Leftrightarrow R_\nu/\mathfrak{m}_\nu = k$, e.g. si ν es de *rango completo*, i.e. $\mathrm{rank}(S) = \dim(R)$ usando la desigualdad de Abhyankar

Degeneraciones tóricas desde valuaciones

$R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ una k-álgebra graduada y dominio entero.
Un mapeo $\nu : R \setminus \{0\} \to (\mathbb{Z}^d, <)$ es una *valuación (Krull)* si para $f, g \in R \setminus \{0\}$ y $c \in k$

$$\nu(fg) = \nu(f) + \nu(g), \quad \nu(cf) = \nu(f), \quad \nu(f+g) \geq \min{}_{<}\{\nu(f), \nu(g)\}$$

$\rightsquigarrow$ $S := \mathrm{im}(\nu)$ es un semigrupo.

$\rightsquigarrow$ ν induce una filtración en R, para $m \in \mathbb{Z}^d$

$$F_m := \{f \in R : \nu(f) \leq m\} \quad \text{and} \quad F_{<m} := \{f \in R : \nu(f) < m\}.$$

[1] $\Leftrightarrow R_\nu/\mathfrak{m}_\nu = k$, e.g. si ν es de *rango completo*, i.e. $\mathrm{rank}(S) = \dim(R)$ usando la desigualdad de Abhyankar

Degeneraciones tóricas desde valuaciones

$R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ una k-álgebra graduada y dominio entero.
Un mapeo $\nu : R \setminus \{0\} \to (\mathbb{Z}^d, <)$ es una *valuación (Krull)* si para $f, g \in R \setminus \{0\}$ y $c \in k$

$$\nu(fg) = \nu(f) + \nu(g), \quad \nu(cf) = \nu(f), \quad \nu(f+g) \geq \min{}_<\{\nu(f), \nu(g)\}$$

$\rightsquigarrow$ $S := \mathrm{im}(\nu)$ es un semigrupo.

$\rightsquigarrow$ ν induce una filtración en R, para $m \in \mathbb{Z}^d$

$$F_m := \{f \in R : \nu(f) \leq m\} \quad \text{and} \quad F_{<m} := \{f \in R : \nu(f) < m\}.$$

Proposición: Si $\dim(F_m/F_{<m}) \leq 1$ para $m \in \mathbb{Z}^d$ [1] entonces

$$\mathrm{gr}_\nu(R) \cong k[S].$$

[1] $\Leftrightarrow R_\nu/\mathfrak{m}_\nu = k$, e.g. si ν es de *rango completo*, i.e. $\mathrm{rank}(S) = \dim(R)$ usando la desigualdad de Abhyankar

Degeneraciones tóricas desde valuaciones

Theorem (Dave Anderson 2013)

Sea $\nu : R \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^d$ *una valuación Krull de rango completo con* S *finitamente generado.*

Degeneraciones tóricas desde valuaciones

Theorem (Dave Anderson 2013)

Sea $\nu : R \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^d$ *una valuación Krull de rango completo con* S *finitamente generado.*

Entonces existe una degeneración tórica de $X = Proj(R)$ *con fibra especial* $X_0 = Proj(k[S])$ *definido del álgebra de Rees de* ν*:*

$$\mathfrak{R} = \bigoplus_{i \geq 0} t^i F_{\leq i},$$

donde $F_{\leq i} = \bigcup_{\pi(m) \leq i} F_m$ *para una proyección adecuada* $\pi : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z}$*.*

Degeneraciones tóricas desde valuaciones

Theorem (Dave Anderson 2013)

Sea $\nu : R \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^d$ una valuación Krull de rango completo con S finitamente generado.

Entonces existe una degeneración tórica de $X = Proj(R)$ con fibra especial $X_0 = Proj(k[S])$ definido del álgebra de Rees de ν:

$$\mathfrak{R} = \bigoplus{}_{i \geq 0} t^i F_{\leq i},$$

donde $F_{\leq i} = \bigcup_{\pi(m) \leq i} F_m$ para una proyección adecuada $\pi : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z}$.

$\mathfrak{R}$ es un $k[t]$-álgebra plana con

$$\mathfrak{R}/(t-1)\mathfrak{R} = R \quad \text{y} \quad \mathfrak{R}/t\mathfrak{R} = \mathrm{gr}_\nu(R).$$

Politopos de Newton–Okounkov

X_0 es tórica y proyectiva $\Rightarrow$ existe un politopo que define la normalización $\bar{X}_0$, es el *politopo de Newton–Okounkov* de ν:

$$\Delta(R, \nu) := \mathrm{conv}\left(\bigcup_{i>0} \left\{ \frac{\nu(f)}{i} : f \in R_i \right\}\right) \subset \mathbb{R}^d.$$

Politopos de Newton–Okounkov

X_0 es tórica y proyectiva $\Rightarrow$ existe un politopo que define la normalización $\bar{X}_0$, es el *politopo de Newton–Okounkov* de ν:

$$\Delta(R,\nu) := \operatorname{conv}\left(\bigcup_{i>0}\left\{\frac{\nu(f)}{i} : f \in R_i\right\}\right) \subset \mathbb{R}^d.$$

Theorem (Kaveh–Khovanskii 2012, Lazarsfeld–Mustata 2009)

El número de puntos enteros en $\Delta(R,\nu)$ es n y el volumen (normalizado) de $\Delta(R,\nu)$ es el grado de $X \subset \mathbb{P}^{n-1}$.

Preguntas

1. Si $X_0 = \bar{X}_0$ tenemos un mapeo de momento

$$\mu : X_0 \to \Delta(R, \nu)$$

que codifica la topología de X_0 (e.g. X_0 tiene una estratificación en órbitas que corresponden a las caras de $\Delta(R, \nu)$).

Preguntas

1. Si $X_0 = \bar{X}_0$ tenemos un mapeo de momento
$$\mu : X_0 \to \Delta(R, \nu)$$
que codifica la topología de X_0 (e.g. X_0 tiene una estratificación en órbitas que corresponden a las caras de $\Delta(R, \nu)$).
¿Existe un mapeo de momento para la variedad X?
2. $\Delta(R, \nu)$ da ecuaciones para $X_0 \subset \mathbb{P}^{n-1}$.

Preguntas

1. Si $X_0 = \bar{X}_0$ tenemos un mapeo de momento

$$\mu : X_0 \to \Delta(R, \nu)$$

que codifica la topología de X_0 (e.g. X_0 tiene una estratificación en órbitas que corresponden a las caras de $\Delta(R, \nu)$).

¿Existe un mapeo de momento para la variedad X?

2. $\Delta(R, \nu)$ da ecuaciones para $X_0 \subset \mathbb{P}^{n-1}$.

¿Podemos obtener ecuaciones para X y $\mathfrak{X}$ de $\Delta(R, \nu)$?

Preguntas

1. Si $X_0 = \bar{X}_0$ tenemos un mapeo de momento
$$\mu : X_0 \to \Delta(R,\nu)$$
que codifica la topología de X_0 (e.g. X_0 tiene una estratificación en órbitas que corresponden a las caras de $\Delta(R,\nu)$).
¿Existe un mapeo de momento para la variedad X?
2. $\Delta(R,\nu)$ da ecuaciones para $X_0 \subset \mathbb{P}^{n-1}$.
¿Podemos obtener ecuaciones para X y $\mathfrak{X}$ de $\Delta(R,\nu)$?

Vamos a utilizar la *teoría de Gröbner*.

Degeneraciones de Gröbner

Sea $k = \bar{k}$ con $\mathrm{char}(k) = 0$ y $R = k[x_1, \ldots, x_n]/I$ con I homogeneo.

Degeneraciones de Gröbner

Sea $k = \bar{k}$ con $\mathrm{char}(k) = 0$ y $R = k[x_1, \dots, x_n]/I$ con I homogeneo.

Para $w \in \mathbb{R}^n$ tenemos el *ideal inicial* $\mathrm{in}_w(I) := (\mathrm{in}_w(f) : f \in I)$ y una familia plana

$$\xi_w : \mathfrak{X} \to \mathbb{A}^1$$

con fibra genérica $X = \mathrm{Proj}(R)$ and fibra especial $\mathrm{Proj}(R_w) = X_0$ donde $R_w := k[x_1, \dots, x_n]/\mathrm{in}_w(I)$.

Degeneraciones de Gröbner

Sea $k = \bar{k}$ con $\mathrm{char}(k) = 0$ y $R = k[x_1, \dots, x_n]/I$ con I homogeneo.

Para $w \in \mathbb{R}^n$ tenemos el *ideal inicial* $\mathrm{in}_w(I) := (\mathrm{in}_w(f) : f \in I)$ y una familia plana

$$\xi_w : \mathfrak{X} \to \mathbb{A}^1$$

con fibra genérica $X = \mathrm{Proj}(R)$ and fibra especial $\mathrm{Proj}(R_w) = X_0$ donde $R_w := k[x_1, \dots, x_n]/\mathrm{in}_w(I)$.

Example

Para $I = (y^2z - x^3 + xz^2) \in k[x, y, z]$ y $w = (2, 3, 0) \in \mathbb{R}^3$ tenemos

$$\mathrm{in}_{(2,3,0)}(y^2z - x^3 + xz^2) = x^3 - y^2z$$

que define la familia plana

$$\mathfrak{X} = \mathrm{Proj}\left(k[t][x, y, z]/(yz^2 - x^3 + txz^2)\right)$$

El abanico de Gröbner y la tropicalización de un ideal

Definition

El *abanico de Gröbner* $\mathrm{GF}(I)$ de un ideal homogeneo I of I es $\mathbb{R}^n$ con conos abiertos definidos por

$$v, w \in C^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{in}_v(I) = \mathrm{in}_w(I)$$

El abanico de Gröbner y la tropicalización de un ideal

Definition

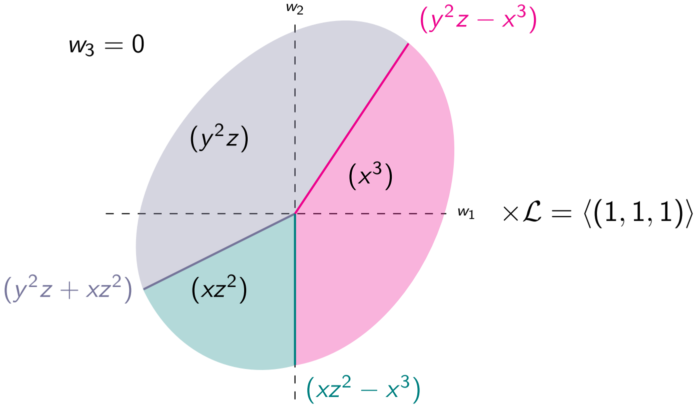
El *abanico de Gröbner* $\mathrm{GF}(I)$ de un ideal homogeneo I of I es $\mathbb{R}^n$ con conos abiertos definidos por

$$v, w \in C^{\circ} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{in}_v(I) = \mathrm{in}_w(I)$$

La *tropicalización* $\mathcal{T}(I)$ de I es el sub-abanico cerrado de $\mathrm{GF}(I)$ de esos $w \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathrm{in}_w(I)$ no contiene monomios.

Ejemplo

Sea $I = (y^2z - x^3 + xz^2) \subset \mathbb{C}[x,y,z]$. Entonces, $GF(I)$ es $\mathbb{R}^3$ con la estructura de abanico abajo y $\mathcal{T}(I)$ es su 1-esqueleto:



Teorema de la correspondencia

Theorem (L.B.'20, K.Kaveh–C.Manon '19)

Sea R un dominio con graduación positiva, $\nu : R \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^d$ una valuación de rango completo con S finitamente generado.

Teorema de la correspondencia

Theorem (L.B.'20, K.Kaveh–C.Manon '19)

Sea R un dominio con graduación positiva, $\nu : R \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^d$ una valuación de rango completo con S finitamente generado. Entonces existe un isomorfismo de álgebras graduadas

$$k[x_1, \dots, x_n]/I \cong R$$

tal que la variedad tórica de Anderson $Proj(k[S])$ es isomorfa a la variedad tórica de una degeneración de Gröbner para algún $w \in \mathcal{T}(I) \subset \mathbb{R}^n$:

$$Proj(k[S]) \cong Proj(R_w).$$

Idea de la Prueba

Sea $b_1, \dots, b_n \in R$ tal que $\langle \nu(b_1), \dots, \nu(b_n) \rangle = S \rightsquigarrow$ *base de Khovanskii*

Idea de la Prueba

Sea $b_1, \dots, b_n \in R$ tal que $\langle \nu(b_1), \dots, \nu(b_n) \rangle = S \rightsquigarrow$ *base de Khovanskii*

$$\pi : k[x_1, \dots, x_n] \to R, \quad x_i \mapsto b_i$$

$I := \ker(\pi)$ y $R \cong k[x_1, \dots, x_n]/I$.

Idea de la Prueba

Sea $b_1, \dots, b_n \in R$ tal que $\langle \nu(b_1), \dots, \nu(b_n) \rangle = S \rightsquigarrow$ *base de Khovanskii*

$$\pi : k[x_1, \dots, x_n] \to R, \quad x_i \mapsto b_i$$

$I := \ker(\pi)$ y $R \cong k[x_1, \dots, x_n]/I$. Para $M_\nu := (\nu(b_i)_j)_{ij} \in \mathbb{Z}^{d \times n}$ y $f = \sum \mathrm{x}^a c_a \in k[x_1, \dots, x_n]$

$$\mathrm{in}_{M_\nu}(f) := \sum_{b:\ M_\nu b = \min_{<_{lex}} \{M_\nu a : c_a \neq 0\}} \mathrm{x}^b c_b.$$

Idea de la Prueba

Sea $b_1, \dots, b_n \in R$ tal que $\langle \nu(b_1), \dots, \nu(b_n) \rangle = S \rightsquigarrow$ *base de Khovanskii*

$$\pi : k[x_1, \dots, x_n] \to R, \quad x_i \mapsto b_i$$

$I := \ker(\pi)$ y $R \cong k[x_1, \dots, x_n]/I$. Para $M_\nu := (\nu(b_i)_j)_{ij} \in \mathbb{Z}^{d \times n}$ y $f = \sum \mathrm{x}^a c_a \in k[x_1, \dots, x_n]$

$$\mathrm{in}_{M_\nu}(f) := \sum_{b:\ M_\nu b = \min_{<_{lex}} \{M_\nu a : c_a \neq 0\}} \mathrm{x}^b c_b.$$

Proposición: $k[S] \cong k[x_1, \dots, x_n]/\mathrm{in}_{M_\nu}(I)$

Idea de la Prueba

Sea $b_1, \ldots, b_n \in R$ tal que $\langle \nu(b_1), \ldots, \nu(b_n) \rangle = S \rightsquigarrow$ *base de Khovanskii*

$$\pi : k[x_1, \ldots, x_n] \to R, \quad x_i \mapsto b_i$$

$I := \ker(\pi)$ y $R \cong k[x_1, \ldots, x_n]/I$. Para $M_\nu := (\nu(b_i)_j)_{ij} \in \mathbb{Z}^{d \times n}$ y $f = \sum \mathrm{x}^a c_a \in k[x_1, \ldots, x_n]$

$$\mathrm{in}_{M_\nu}(f) := \sum_{b:\ M_\nu b = \min_{<_{lex}} \{M_\nu a : c_a \neq 0\}} \mathrm{x}^b c_b.$$

Proposición: $k[S] \cong k[x_1, \ldots, x_n]/\mathrm{in}_{M_\nu}(I)$

Para cada $G \subset I$ con $\mathrm{in}_{M_\nu}(I) = (\mathrm{in}_{M_\nu}(g) : g \in G)$ existe $\mathrm{pr} : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z}$ tal que para cada $g = \sum \mathrm{x}^{a_i} c_i \in G$:

$$M_\nu a_i <_{lex} M_\nu a_j \quad \Rightarrow \quad \mathrm{pr}(M_\nu a_i) < \mathrm{pr}(M_\nu a_j).$$

Lema: Sea $w = \mathrm{pr}(M) \in \mathbb{Z}^n$, entonces $w \in \mathcal{T}(I)$ y $k[S] \cong k[x_1, \ldots, x_n]/\mathrm{in}_w(I) = R_w$.

Proyecciones en degeneraciones tóricas

Example

Para la curva elíptica $X = V(y^2z - x^3 + xz^2)$ una degeneración tórica es

$$\mathfrak{X} = V(y^2z - x^3 + txz^2) \subset \mathbb{P}^2_{x:y:z} \times \mathbb{A}^1_t$$

con fibra especial $X_0 = V(y^2z - x^3)$.

Proyecciones en degeneraciones tóricas

Example

Para la curva elíptica $X = V(y^2z - x^3 + xz^2)$ una degeneración tórica es

$$\mathfrak{X} = V(y^2z - x^3 + txz^2) \subset \mathbb{P}^2_{x:y:z} \times \mathbb{A}^1_t$$

con fibra especial $X_0 = V(y^2z - x^3)$. Tenemos

$$\begin{array}{ccccc} X & \twoheadrightarrow & \mathbb{P}^1 & \twoheadrightarrow & X_0 \\ [x:y:z] & \mapsto & [y:z] & \mapsto & [y^2z : y^3 : z^3] \end{array}$$

Proyecciones en degeneraciones tóricas

Example

Para la curva elíptica $X = V(y^2z - x^3 + xz^2)$ una degeneración tórica es

$$\mathfrak{X} = V(y^2z - x^3 + txz^2) \subset \mathbb{P}^2_{x:y:z} \times \mathbb{A}^1_t$$

con fibra especial $X_0 = V(y^2z - x^3)$. Tenemos

$$\begin{array}{ccccc} X & \twoheadrightarrow & \mathbb{P}^1 & \twoheadrightarrow & X_0 \\ [x:y:z] & \mapsto & [y:z] & \mapsto & [y^2z : y^3 : z^3] \end{array}$$

Sea $R = k[x,y,z]/(y^2z - x^3 + xz^2)$ y $R_0 = k[x,y,z]/(y^2z - x^3)$. Para

$$\nu : R \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^2 \quad \bar{x} \mapsto (1,1), \bar{y} \mapsto (1,0), \bar{z} \mapsto (1,3)$$

tenemos $R_0 \cong k[S]$ con base χ^s para $s \in \langle \binom{1}{1}, \binom{1}{0}, \binom{1}{3} \rangle$.

Proyecciones en degeneraciones tóricas

Example

Para la curva elíptica $X = V(y^2z - x^3 + xz^2)$ una degeneración tórica es

$$\mathfrak{X} = V(y^2z - x^3 + txz^2) \subset \mathbb{P}^2_{x:y:z} \times \mathbb{A}^1_t$$

con fibra especial $X_0 = V(y^2z - x^3)$. Tenemos

$$\begin{array}{ccccc} X & \twoheadrightarrow & \mathbb{P}^1 & \twoheadrightarrow & X_0 \\ [x:y:z] & \mapsto & [y:z] & \mapsto & [y^2z : y^3 : z^3] \end{array}$$

Sea $R = k[x,y,z]/(y^2z - x^3 + xz^2)$ y $R_0 = k[x,y,z]/(y^2z - x^3)$. Para

$$\nu : R \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^2 \quad \bar{x} \mapsto (1,1), \bar{y} \mapsto (1,0), \bar{z} \mapsto (1,3)$$

tenemos $R_0 \cong k[S]$ con base χ^s para $s \in \langle \binom{1}{1}, \binom{1}{0}, \binom{1}{3} \rangle$.

Y $\varphi^* : k[S] \hookrightarrow R$ es un *encaje graduado* que manda la *base de $k[S]$* a *monomios linealmente independientes* y^az^b en R.

La proyección desde el semigrupo

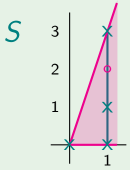
Example

Tenemos $k[S] = k\left[\chi^s : s \in \langle \binom{1}{1}, \binom{1}{0}, \binom{1}{3} \rangle_{\geq 0}\right]$ con $\deg \chi^{(a,b)} = a$. Pero en R $\deg(y^a z^b) = a + b \rightsquigarrow$ hay que adaptar la graduación de S:

La proyección desde el semigrupo

Example

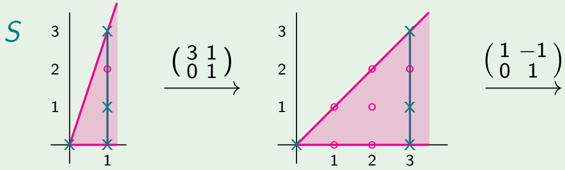
Tenemos $k[S] = k\left[\chi^s : s \in \langle \binom{1}{1}, \binom{1}{0}, \binom{1}{3} \rangle_{\geq 0}\right]$ con $\deg \chi^{(a,b)} = a$. Pero en R $\deg(y^a z^b) = a + b \rightsquigarrow$ hay que adaptar la graduación de S:



$\xrightarrow{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

Example

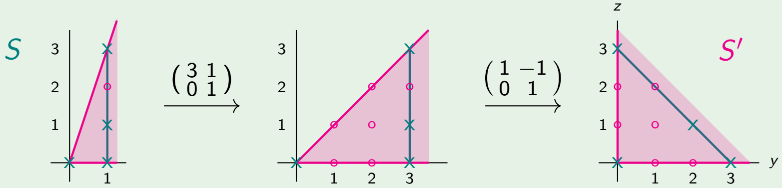
Tenemos $k[S] = k\left[\chi^s : s \in \langle \binom{1}{1}, \binom{1}{0}, \binom{1}{3} \rangle_{\geq 0}\right]$ con $\deg \chi^{(a,b)} = a$. Pero en R $\deg(y^a z^b) = a + b \rightsquigarrow$ hay que adaptar la graduación de S:



La proyección desde el semigrupo

Example

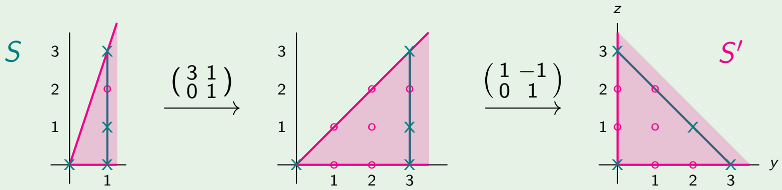
Tenemos $k[S] = k\left[\chi^s : s \in \langle \binom{1}{1}, \binom{1}{0}, \binom{1}{3} \rangle_{\geq 0}\right]$ con $\deg \chi^{(a,b)} = a$. Pero en R $\deg(y^a z^b) = a + b \rightsquigarrow$ hay que adaptar la graduación de S:



La proyección desde el semigrupo

Example

Tenemos $k[S] = k\left[\chi^s : s \in \langle \binom{1}{1}, \binom{1}{0}, \binom{1}{3} \rangle_{\geq 0}\right]$ con $\deg \chi^{(a,b)} = a$. Pero en R $\deg(y^a z^b) = a + b \rightsquigarrow$ hay que adaptar la graduación de S:



Recuerda: $y^a z^b \in R$ son linealmente independientes, entonces

$$k[S] \hookrightarrow R \quad \text{con} \quad (1,0) \mapsto y^3, \quad (1,1) \mapsto y^2 z \quad \& \quad (1,3) \mapsto z^3.$$

es un encaje y el pullback de $X \twoheadrightarrow X_0$ con $[x : y : z] \mapsto [y^2 z : y^3 : z^3]$.

Subálgebras tóricas y ordenes monomiales

Para $\nu : R \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^d$ una valuación de rango completo con semigroup S finitamente generado queremos un encaje graduado:

$$k[S] \hookrightarrow R$$

como *subálgebra tórica*.

Subálgebras tóricas y ordenes monomiales

Para $\nu : R \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^d$ una valuación de rango completo con semigroup S finitamente generado queremos un encaje graduado:

$$k[S] \hookrightarrow R$$

como *subálgebra tórica*.

Idea: Manda la base S de $k[S]$ a elementos de una base de R.

Subálgebras tóricas y ordenes monomiales

Para $\nu : R \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^d$ una valuación de rango completo con semigroup S finitamente generado queremos un encaje graduado:

$$k[S] \hookrightarrow R$$

como *subálgebra tórica*.

Idea: Manda la base S de $k[S]$ a elementos de una base de R.

$\rightsquigarrow$ Podemos usas las *bases de monomios estándar*. Definimos

Subálgebras tóricas y ordenes monomiales

Para $\nu : R \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^d$ una valuación de rango completo con semigroup S finitamente generado queremos un encaje graduado:

$$k[S] \hookrightarrow R$$

como *subálgebra tórica*.

Idea: Manda la base S de $k[S]$ a elementos de una base de R.

$\rightsquigarrow$ Podemos usas las *bases de monomios estándar*. Definimos

Un *orden monomial* en $k[x_1, \ldots, x_n]$ es un orden total en el conjunto de monomios de $k[x_1, \ldots, x_n]$ tal que

$$1 < \mathrm{x}^a \quad \text{y} \quad \mathrm{x}^a < \mathrm{x}^b \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x}^{a+c} < \mathrm{x}^{b+c} \quad \forall a, b, c \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}.$$

Bases de monomios estándar

Sea $<$ un orden monomial en $k[x_1, \ldots, x_n]$.

Definition

Para un ideal $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ su *ideal inicial ideal con respecto a $<$* es

$$\mathrm{in}_<(I) := (\mathrm{in}_<(f) : f \in F)$$

donde $in_<(f)$ es el termino maximal de f con respecto a $<$.

Bases de monomios estándar

Sea $<$ un orden monomial en $k[x_1, \ldots, x_n]$.

Definition

Para un ideal $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ su *ideal inicial ideal con respecto a $<$* es

$$\mathrm{in}_<(I) := (\mathrm{in}_<(f) : f \in F)$$

donde $in_<(f)$ es el termino maximal de f con respecto a $<$.

Observa que $\mathrm{in}_<(I)$ es un ideal monomial. Define una *base de monomios estándar* de R

$$\mathbb{B}_< := \{\bar{\mathrm{x}}^m \in R : \mathrm{x}^m \notin \mathrm{in}_<(I)\}.$$

Bases de monomios estándar

Sea $<$ un orden monomial en $k[x_1, \ldots, x_n]$.

Definition

Para un ideal $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ su *ideal inicial ideal con respecto a* $<$ es

$$\mathrm{in}_<(I) := (\mathrm{in}_<(f) : f \in F)$$

donde $in_<(f)$ es el termino maximal de f con respecto a $<$.

Observa que $\mathrm{in}_<(I)$ es un ideal monomial. Define una *base de monomios estándar* de R

$$\mathbb{B}_< := \{\bar{\mathrm{x}}^m \in R : \mathrm{x}^m \notin \mathrm{in}_<(I)\}.$$

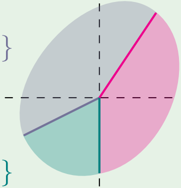
Cada cono maximal en el abanico de Gröbner $\mathrm{GF}(I)$ corresponde a un ideal inicial monomial $\mathrm{in}_<(I)$.

Bases de monomios estándar para la curva elíptica

Example

Para $I = (x^3 - xz^2 - y^2z) \subset k[x, y, z]$ el abanico de Gröbner tiene 3 conos maximales:

$\mathbb{B}_{(y^2z)} = \{x^a y^b z^c : b < 2 \text{ o } c < 1\}$



$\mathbb{B}_{(x^3)} = \{x^a y^b z^c : a < 3\}$

$\mathbb{B}_{(xz^2)} = \{x^a y^b z^c : a < 1 \text{ o } c < 2\}$

que corresponden a tres bases de monomios estándar para $R = k[x, y, z]/I$.

Idea de la construcción

Sea $R = k[x_1, \ldots, x_n]/I$ y $k[S] = k[x_1, \ldots, x_n]/\mathrm{in}_w(I)$.

Objetivo: $\varphi^* : k[S] \hookrightarrow R$ graduado

1. Toma $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_d}\}$ álgebraicamente independiente en $k[S]$ (si no existe $\rightsquigarrow$ Veronese);
2. Lema: Existe un cono maximal $C_< \in GF(I)$ con $w \in C_<$ tal que

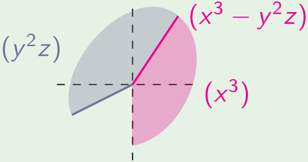
$$x_{i_1}^{a_1} \cdots x_{i_d}^{a_d} \in \mathbb{B}_< \quad \text{para todas} \quad a_j \geq 0$$

   Entonces, $S \ni s = (s_1, \ldots, s_d) \mapsto x_{i_1}^{s_1} \cdots x_{i_d}^{s_d} \in R$ manda una base de $k[S]$ a elementos de una base de $R \Rightarrow$ es un encaje;
3. Ajusta la graduación de S (como en el ejemplo) y aplica el Lema.

Paso 2: Lema

Example

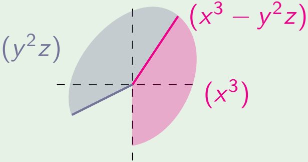
Para w con $\text{in}_\tau(y^2z - x^3 + xz^2) = (y^2z - x^3)$ existen dos conos maximales en $GF(I)$ con $w \in C$:



Paso 2: Lema

Example

Para w con $\text{in}_\tau(y^2z - x^3 + xz^2) = (y^2z - x^3)$ existen dos conos maximales en $GF(I)$ con $w \in C$:

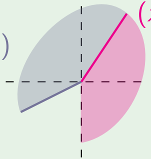


Sea $R_0 = k[x, y, z]/(x^3 - yz^2)$. Para cada conjunto de variables algebraciamente independientes existe una base de monomios estándar:

Paso 2: Lema

Example

Para w con $\mathrm{in}_\tau(y^2z - x^3 + xz^2) = (y^2z - x^3)$ existen dos conos maximales en $GF(I)$ con $w \in C$:



Sea $R_0 = k[x,y,z]/(x^3 - yz^2)$. Para cada conjunto de variables algebraciamente independientes existe una base de monomios estándar:

$$\begin{array}{lcll} \{x,y\} & \rightsquigarrow & x^a y^b \in \mathbb{B}_{(y^2z)} & \text{as } c < 1, \\ \{x,z\} & \rightsquigarrow & x^a z^c \in \mathbb{B}_{(y^2z)} & \text{as } b < 2, \\ \{y,z\} & \rightsquigarrow & y^b z^c \in \mathbb{B}_{(x^3)} & \text{as } a < 3. \end{array}$$

Un mapeo de momento para X

El mapeo $\varphi : X \to X_0$ con $\varphi^* : k[S] \hookrightarrow R$ nos da un *"mapeo de momento"* como composición

$$X \xrightarrow{\varphi} X_0 \xrightarrow{\mu} \Delta(R, \nu)$$

Un mapeo de momento para X

El mapeo $\varphi : X \to X_0$ con $\varphi^* : k[S] \hookrightarrow R$ nos da un *"mapeo de momento"* como composición

$$X \xrightarrow{\varphi} X_0 \xrightarrow{\mu} \Delta(R, \nu)$$

Hasta el momento sabemos que es sobreyectivo si

- X una curva,
- la normalización $\bar{X}_0 = \mathbb{P}^d$,
- los T-puntos fijos de X_0 corresponden a secuencias regulares en R.

Referencias

A Dave Anderson. Okounkov bodies and toric degenerations. Math. Ann. 356, No. 3, 1183-1202 (2013).

B Lara Bossinger. Full-Rank Valuations and Toric Initial Ideals. *Int. Math. Res. Not.* rnaa071 (2020)

BM Lara Bossinger, Takuya Murata. Toric degenerations admitting projections (working title) *in preparation 2021*

KK Kiumars Kaveh and A.G. Khovanskii. Newton-Okounkov bodies, semigroups of integral points, graded algebras and intersection theory. Ann. Math. (2) 176, No. 2, 925-978 (2012).

KM Kiumars Kaveh and Christopher Manon. Khovanskii bases, higher rank valuations, and tropical geometry. *SIAM J.Appl. Algebra Geom.*, 3(2):292–336 (2019)

KMM Kiumars Kaveh, Christopher Manon and Takuya Murata. On degenerations of projective varieties to complexity-one T-varieties *arXiv:1708.02698 [math.AG]*

LM Robert Lazarsfeld and Mircea Mustaţă. Convex bodies associated to linear series. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 42, No. 5, 783-835 (2009).

M Takuya Murata. Toric degenerations of projective varieties with an application to equivariant Hilbert functions. *PhD Thesis University of Pittsburgh* (2020)