

La diversidad de las álgebras de conglomerado

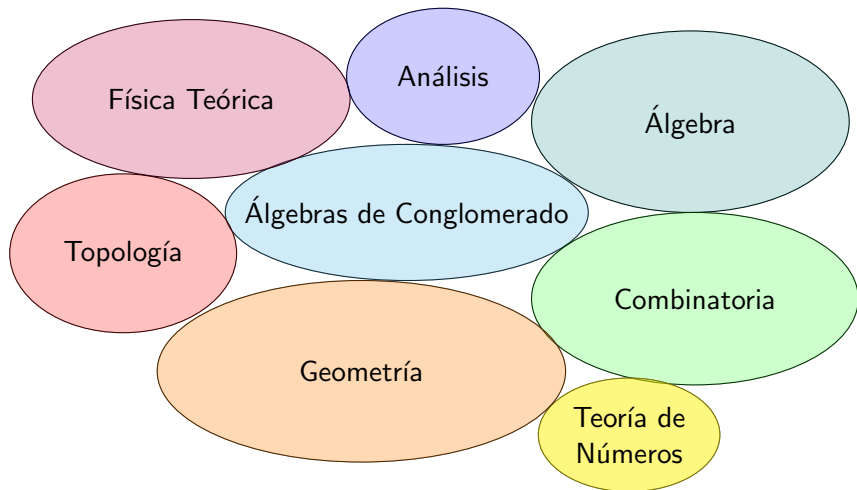
Lara Bossinger



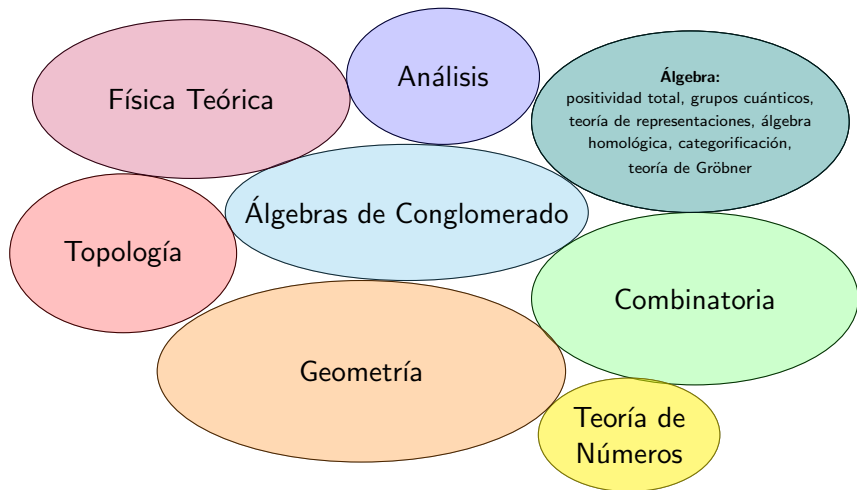
Universidad Nacional Autónoma de México, IM-Oaxaca

Coloquio CU 1 de marzo 2022

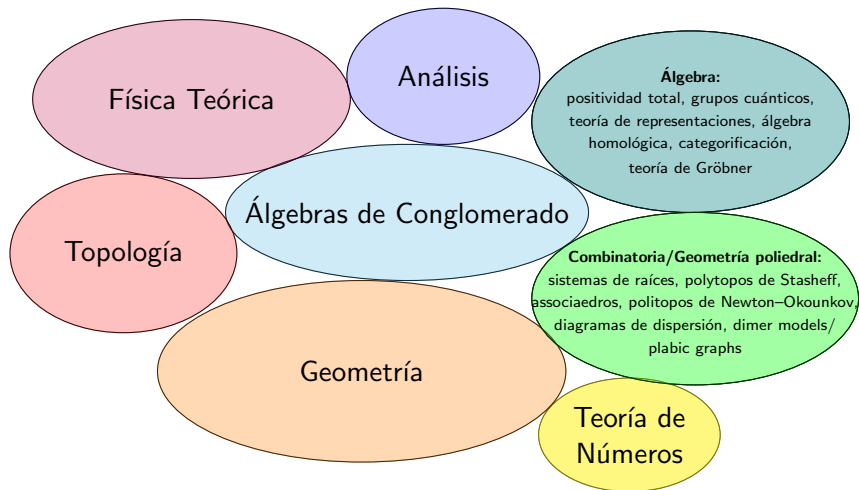
¿Donde encontramos las álgebras de conglomerado?



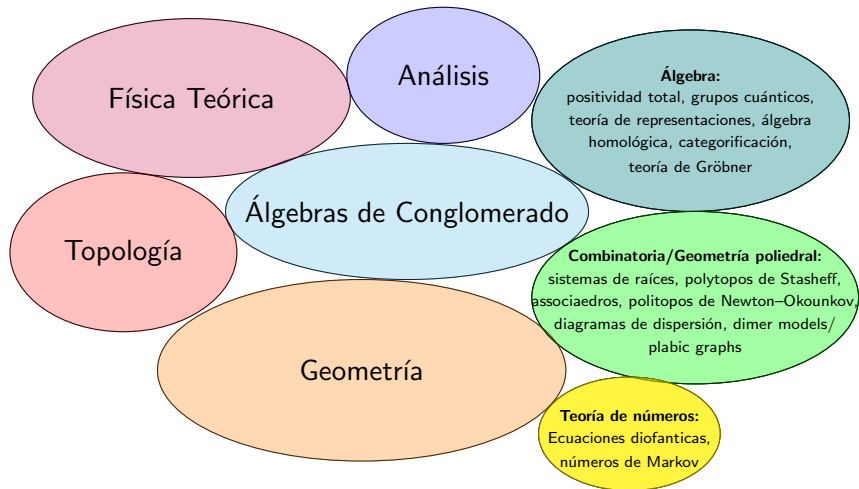
¿Donde encontramos las álgebras de conglomerado?



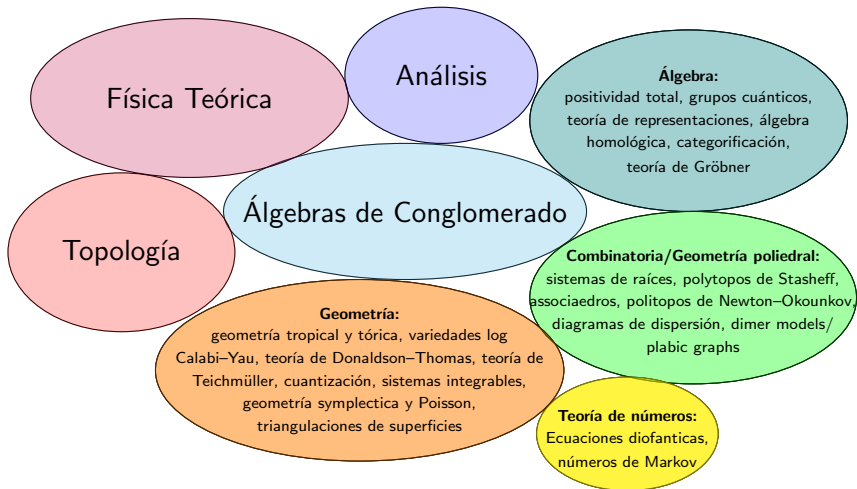
¿Donde encontramos las álgebras de conglomerado?



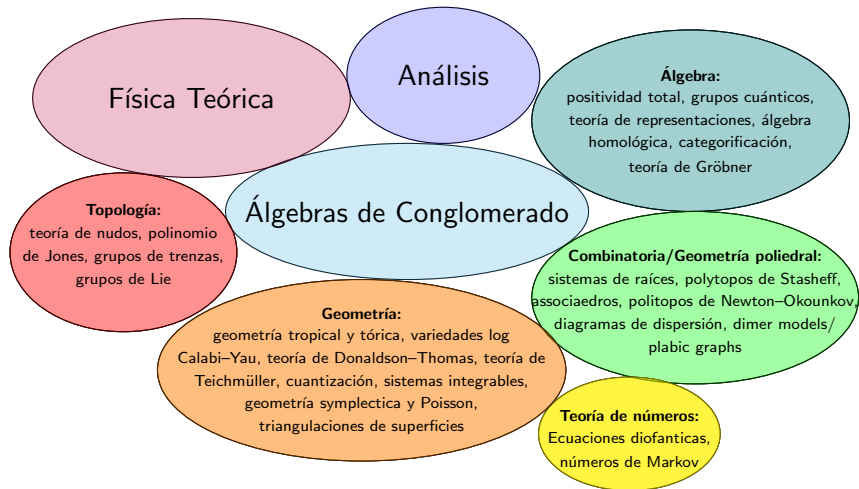
¿Donde encontramos las álgebras de conglomerado?



¿Donde encontramos las álgebras de conglomerado?



¿Donde encontramos las álgebras de conglomerado?



¿Donde encontramos las álgebras de conglomerado?

Análisis

Física teorica:

teoría de cuerdas, simetría especular, amplitudes de dispersión, teoría de campos conformes, Ansatz de Bethe en la termodinámica

Álgebra:

positividad total, grupos cuánticos, teoría de representaciones, álgebra homológica, categorificación, teoría de Gröbner

Topología:

teoría de nudos, polinomio de Jones, grupos de trenzas, grupos de Lie

Álgebras de Conglomerado

Geometría:

geometría tropical y tórica, variedades log Calabi–Yau, teoría de Donaldson–Thomas, teoría de Teichmüller, cuantización, sistemas integrables, geometría symplectica y Poisson, triangulaciones de superficies

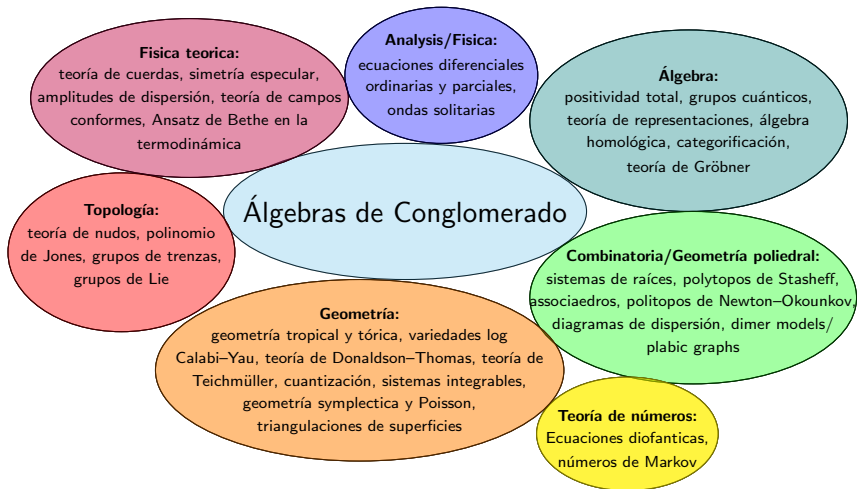
Combinatoria/Geometría poliedral:

sistemas de raíces, polytopos de Stasheff, associaedros, politopos de Newton–Okounkov, diagramas de dispersión, dimer models/plabic graphs

Teoría de números:

Ecuaciones diofánticas, números de Markov

¿Donde encontramos las álgebras de conglomerado?



Historia

- Dos rusos Sergei Fomin y Andrei Zelevinsky definieron las álgebras de conglomerado en 2001



©<http://www.math.lsa.umich.edu/~fomin>



©<https://opc.mfo.de>

- Observaron la *estructura de conglomerado* en la teoría de positividad total de matrices, en grupos cuánticos y sus bases canónicas.
- ahora tienen su propia clasificación 13F60
- y hay más que 1,755 artículos y desde 2003 había más que 139 eventos sobre el álgebra de conglomerado

El origen del álgebra de conglomerao: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

El origen del álgebra de conglomerao: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$\Delta_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

El origen del álgebra de conglomerao: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$\Delta_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calculamos

El origen del álgebra de conglomerao: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$\Delta_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calculamos

$$\Delta_{12} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

El origen del álgebra de conglomerao: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$\Delta_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calculamos

$$\Delta_{12} = 2, \quad \Delta_{13} = \det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

El origen del álgebra de conglomerao: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$\Delta_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calculamos

$$\Delta_{12} = 2, \quad \Delta_{13} = 1, \quad \Delta_{14} = \det \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

El origen del álgebra de conglomerao: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$\Delta_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calculamos

$$\Delta_{12} = 2, \quad \Delta_{13} = 1, \quad \Delta_{14} = 1, \quad \Delta_{23} = \det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 6$$

El origen del álgebra de conglomerao: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$\Delta_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calculamos

$$\Delta_{12} = 2, \quad \Delta_{13} = 1, \quad \Delta_{14} = 1, \quad \Delta_{23} = 6, \quad \Delta_{24} = \det \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 10$$

El origen del álgebra de conglomerao: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$\Delta_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calculamos

$$\Delta_{12} = 2, \quad \Delta_{13} = 1, \quad \Delta_{14} = 1, \quad \Delta_{23} = 6, \quad \Delta_{24} = 10, \quad \Delta_{34} = \det \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

El origen del álgebra de conglomerao: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$\Delta_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calculamos

$$\Delta_{12} = 2, \quad \Delta_{13} = 1, \quad \Delta_{14} = 1, \quad \Delta_{23} = 6, \quad \Delta_{24} = 10, \quad \Delta_{34} = 2.$$

Observamos: $\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{14}\Delta_{23} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 6 = 10 = \Delta_{13}\Delta_{24}$.

El origen del álgebra de conglomerao: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$\Delta_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calculamos

$$\Delta_{12} = 2, \quad \Delta_{13} = 1, \quad \Delta_{14} = 1, \quad \Delta_{23} = 6, \quad \Delta_{24} = 10, \quad \Delta_{34} = 2.$$

Observamos: $\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{14}\Delta_{23} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 6 = 10 = \Delta_{13}\Delta_{24}$.

Ejercicio: Cada $M \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ cumple $\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{14}\Delta_{23} = \Delta_{13}\Delta_{24}$.

El origen del álgebra de conglomerao: la positividad total

Sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$\Delta_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calculamos

$$\Delta_{12} = 2, \quad \Delta_{13} = 1, \quad \Delta_{14} = 1, \quad \Delta_{23} = 6, \quad \Delta_{24} = 10, \quad \Delta_{34} = 2.$$

Observamos: $\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{14}\Delta_{23} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 6 = 10 = \Delta_{13}\Delta_{24}$.

Ejercicio: Cada $M \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ cumple $\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{14}\Delta_{23} = \Delta_{13}\Delta_{24}$.

Pregunta: ¿Como podemos verificar *eficientemente* si M es totalmente positiva o no?

El origen del algebra de conglomerado: positividad total

Observación: $M \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ es totalmente positivo si y solo si $\Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{14}, \Delta_{23}, \Delta_{34} > 0$. Pues, en este caso también

$$\Delta_{24} = \frac{\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{14}\Delta_{23}}{\Delta_{13}} > 0.$$

El origen del algebra de conglomerado: positividad total

Observación: $M \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ es totalmente positivo si y solo si $\Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{14}, \Delta_{23}, \Delta_{34} > 0$. Pues, en este caso también

$$\Delta_{24} = \frac{\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{14}\Delta_{23}}{\Delta_{13}} > 0.$$

El conjunto $\{\Delta_{13}, \Delta_{12}, \Delta_{14}, \Delta_{23}, \Delta_{34}\}$ se llama un *test de positividad*.

Pregunta: ¿Como podemos encontrar los tests de positividad?

El origen del algebra de conglomerao: positividad total

Observación: $M \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ es totalmente positivo si y solo si $\Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{14}, \Delta_{23}, \Delta_{34} > 0$. Pues, en este caso también

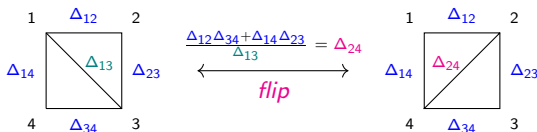
$$\Delta_{24} = \frac{\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{14}\Delta_{23}}{\Delta_{13}} > 0.$$

El conjunto $\{\Delta_{13}, \Delta_{12}, \Delta_{14}, \Delta_{23}, \Delta_{34}\}$ se llama un *test de positividad*.

Pregunta: ¿Como podemos encontrar los tests de positividad?

Para $\mathbb{R}^{2 \times 4}$ tenemos otro test de positividad: $\{\Delta_{24}, \Delta_{12}, \Delta_{14}, \Delta_{23}, \Delta_{34}\}$.

Los dos se pueden visualizar usando las triangulaciones del cuadrado:



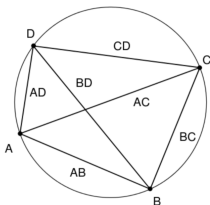
Ptolomeo y test de positividad

¿Les parece conocida?

Ptolomeo y test de positividad

¿Les parece conocida?

La relación de Ptolomeo: $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}$



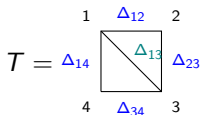
Consecuencia: $\left\{ \begin{array}{l} \text{test de positividad} \\ \text{eficiente} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1-1} \left\{ \begin{array}{l} \text{triangulación} \\ \text{del } n\text{-ágono} \end{array} \right\}.$

\Rightarrow *una* triangulación contiene la información de *todos* test de positividad usando los *flips*.

El álgebra de conglomerado \mathcal{A}_T

\rightsquigarrow Esta información la usamos para definir un *álgebra de conglomerado* \mathcal{A}_T asociada a una triangulación T

\mathcal{A}_T es el subálgebra de $\mathbb{Q}(\Delta_{13}, \Delta_{12}, \Delta_{14}, \Delta_{23}, \Delta_{34})$ generado de todas los menores obtenidos de T con flips

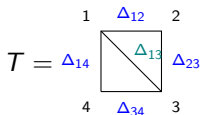


$$\mathcal{A}_T = \left\langle \Delta_{13}, \Delta_{12}, \Delta_{14}, \Delta_{23}, \Delta_{34}, \frac{\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{14}\Delta_{23}}{\Delta_{13}} = \Delta_{24} \right\rangle$$

El álgebra de conglomerado \mathcal{A}_T

↪ Esta información la usamos para definir un *álgebra de conglomerado* \mathcal{A}_T asociada a una triangulación T

\mathcal{A}_T es el subálgebra de $\mathbb{Q}(\Delta_{13}, \Delta_{12}, \Delta_{14}, \Delta_{23}, \Delta_{34})$ generado de todas los menores obtenidos de T con flips



$$\mathcal{A}_T = \left\langle \Delta_{13}, \Delta_{12}, \Delta_{14}, \Delta_{23}, \Delta_{34}, \frac{\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{14}\Delta_{23}}{\Delta_{13}} = \Delta_{24} \right\rangle$$

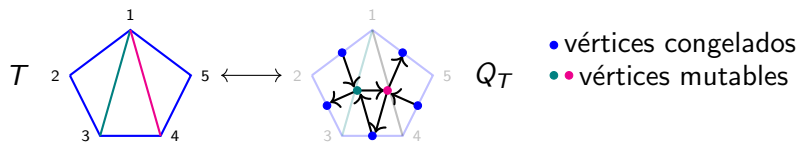
Nota: \mathcal{A}_T es el anillo de coordenadas de la *Grassmanniana* $\text{Gr}_2(4)$.

$$\text{Gr}_k(n) := \{V \subset \mathbb{K}^n : \dim_{\mathbb{K}}(V) = k\}.$$

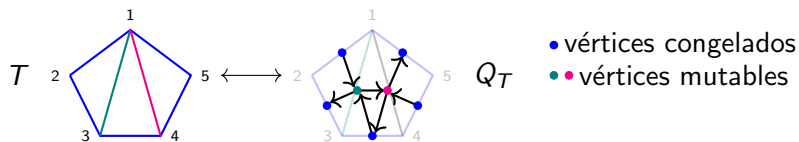
Teorema (Scott 2006)

El anillo de coordenadas de la Grassmanniana $\text{Gr}_k(n)$ en su encaje de Plücker es un álgebra de conglomerado.

Carcaj y mutación de carcaj



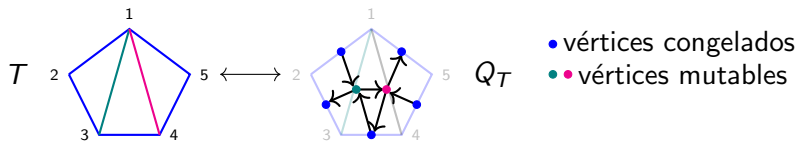
Carcaj y mutación de carcaj



Definición (Mutación de carcaj)

Q carcaj sin 1 y 2-ciclos. La mutación $\mu_k(Q)$ de Q en k mutable es:
 $\forall i \rightarrow k \rightarrow j$ agrega $i \rightarrow j$, invierte cada flecha en k , y elimina 2-ciclos.

Carcaj y mutación de carcaj



Definición (Mutación de carcaj)

Q carcaj sin 1 y 2-ciclos. La mutación $\mu_k(Q)$ de Q en k mutable es:
 $\forall i \rightarrow k \rightarrow j$ agrega $i \rightarrow j$, invierte cada flecha en k , y elimina 2-ciclos.

$$\Delta_{ik}\Delta_{jl} = \Delta_{ij}\Delta_{kl} + \Delta_{il}\Delta_{jk} \quad \longleftrightarrow \quad x'_k x_k = \prod_{i \rightarrow k \in Q} x_i + \prod_{k \rightarrow j \in Q} x_j.$$

Definición (Mutación de semillas)

Dado una semilla $s = (\mathbf{x}, Q)$ y un vertex mutable k de Q , la **mutación en la dirección k** $\mu_k(s)$ es el par $(\mu_k(\mathbf{x}), \mu_k(Q))$, donde $\mu_k(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \setminus \{x_k\} \cup \{x'_k\}$.

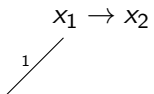
Ejemplo: mutación de semillas

$$x'_k x_k = \prod_{i \rightarrow k \in Q} x_i + \prod_{k \rightarrow j \in Q} x_j$$

$$x_1 \rightarrow x_2$$

Ejemplo: mutación de semillas

$$x'_k x_k = \prod_{i \rightarrow k \in Q} x_i + \prod_{k \rightarrow j \in Q} x_j$$

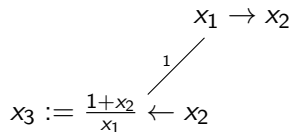


Ejemplo: mutación de semillas

$$x'_k x_k = \prod_{i \rightarrow k \in Q} x_i + \prod_{k \rightarrow j \in Q} x_j$$

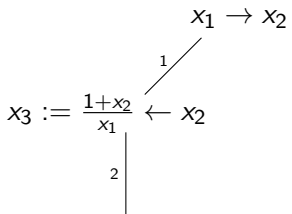
$$x_3 := \frac{1+x_2}{x_1} \leftarrow x_2$$

$x_1 \rightarrow x_2$



Ejemplo: mutación de semillas

$$x'_k x_k = \prod_{i \rightarrow k \in Q} x_i + \prod_{k \rightarrow j \in Q} x_j$$



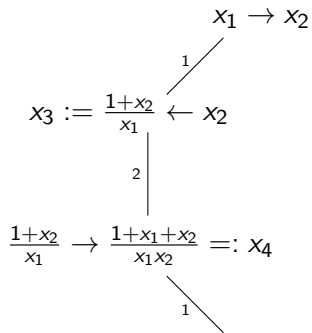
Ejemplo: mutación de semillas

$$x'_k x_k = \prod_{i \rightarrow k \in Q} x_i + \prod_{k \rightarrow j \in Q} x_j$$

$$\begin{array}{c} x_1 \rightarrow x_2 \\ \quad \swarrow 1 \\ x_3 := \frac{1+x_2}{x_1} \leftarrow x_2 \\ \quad \downarrow 2 \\ \frac{1+x_2}{x_1} \rightarrow \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2} =: x_4 \end{array}$$

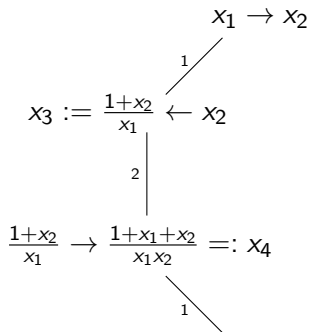
Ejemplo: mutación de semillas

$$x'_k x_k = \prod_{i \rightarrow k \in Q} x_i + \prod_{k \rightarrow j \in Q} x_j$$



Ejemplo: mutación de semillas

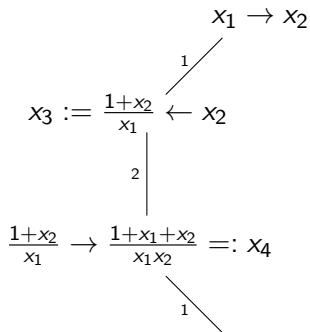
$$x'_k x_k = \prod_{i \rightarrow k \in Q} x_i + \prod_{k \rightarrow j \in Q} x_j$$



$$\left(1 + \frac{1 + x_1 + x_2}{x_1 x_2} \right) \div \frac{1 + x_2}{x_1}$$

Ejemplo: mutación de semillas

$$x'_k x_k = \prod_{i \rightarrow k \in Q} x_i + \prod_{k \rightarrow j \in Q} x_j$$



$$\left(1 + \frac{1 + x_1 + x_2}{x_1 x_2}\right) \div \frac{1 + x_2}{x_1} = \frac{x_1 x_2 + 1 + x_1 + x_2}{x_2(1 + x_2)}$$

Ejemplo: mutación de semillas

$$x'_k x_k = \prod_{i \rightarrow k \in Q} x_i + \prod_{k \rightarrow j \in Q} x_j$$

$$\begin{array}{c} x_1 \rightarrow x_2 \\ \swarrow 1 \\ x_3 := \frac{1+x_2}{x_1} \leftarrow x_2 \\ \downarrow 2 \\ \frac{1+x_2}{x_1} \rightarrow \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2} =: x_4 \\ \searrow 1 \end{array}$$

la magia de conglomerado!

$$\left(1 + \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2}\right) \div \frac{1+x_2}{x_1} = \frac{x_1 x_2 + 1 + x_1 + x_2}{x_2(1+x_2)} = \frac{1+x_1}{x_2}$$

Ejemplo: mutación de semillas

$$x'_k x_k = \prod_{i \rightarrow k \in Q} x_i + \prod_{k \rightarrow j \in Q} x_j$$

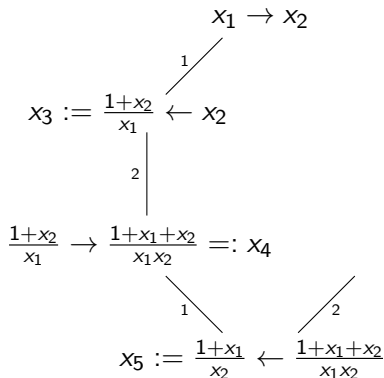
$$\begin{array}{c} x_1 \rightarrow x_2 \\ \swarrow 1 \\ x_3 := \frac{1+x_2}{x_1} \leftarrow x_2 \\ \downarrow 2 \\ \frac{1+x_2}{x_1} \rightarrow \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2} =: x_4 \\ \searrow 1 \\ x_5 := \frac{1+x_1}{x_2} \leftarrow \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2} \end{array}$$

la magia de conglomerado!

$$\left(1 + \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2}\right) \div \frac{1+x_2}{x_1} = \frac{x_1 x_2 + 1 + x_1 + x_2}{x_2(1+x_2)} = \frac{1+x_1}{x_2}$$

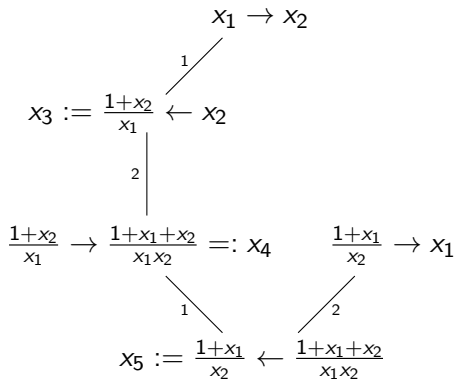
Ejemplo: mutación de semillas

$$x'_k x_k = \prod_{i \rightarrow k \in Q} x_i + \prod_{k \rightarrow j \in Q} x_j$$



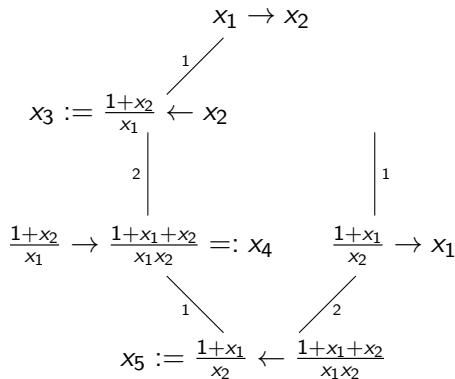
Ejemplo: mutación de semillas

$$x'_k x_k = \prod_{i \rightarrow k \in Q} x_i + \prod_{k \rightarrow j \in Q} x_j$$



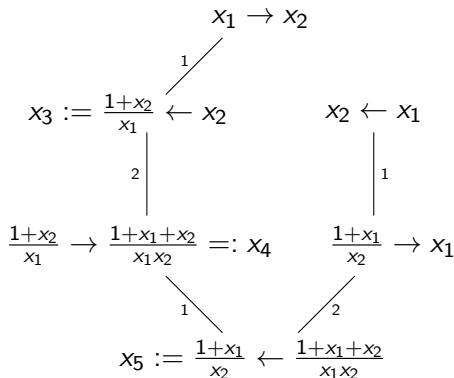
Ejemplo: mutación de semillas

$$x'_k x_k = \prod_{i \rightarrow k \in Q} x_i + \prod_{k \rightarrow j \in Q} x_j$$



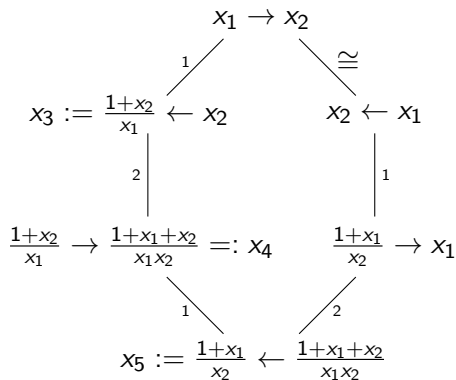
Ejemplo: mutación de semillas

$$x'_k x_k = \prod_{i \rightarrow k \in Q} x_i + \prod_{k \rightarrow j \in Q} x_j$$



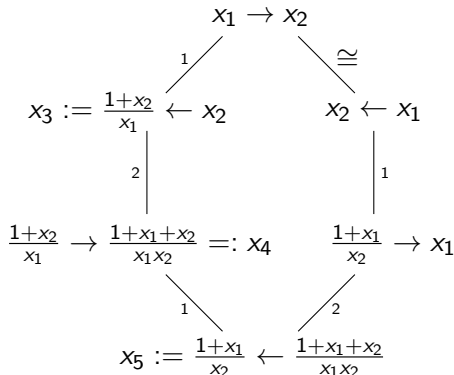
Ejemplo: mutación de semillas

$$x'_k x_k = \prod_{i \rightarrow k \in Q} x_i + \prod_{k \rightarrow j \in Q} x_j$$



Ejemplo: mutación de semillas

$$x'_k x_k = \prod_{i \rightarrow k \in Q} x_i + \prod_{k \rightarrow j \in Q} x_j$$



Definimos el *álgebra de conglomerado*:

$$\mathcal{A}_Q := \left\langle x_1, x_2, \frac{1+x_2}{x_1}, \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2}, \frac{1+x_1}{x_2} \right\rangle \subset \mathbb{Q}(x_1, x_2)$$

Fenómeno de Laurent (Fomin–Zelevinsky 2001)

Todas las variables de conglomerado con polinomios de Laurent en las variables de conglomerado de la semilla inicial con coeficientes enteros. Más precisamente, están contenidos en $\mathbb{Z}[x_1^{\pm}, \dots, x_n^{\pm}, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}]$.

Fenómeno de Laurent (Fomin–Zelevinsky 2001)

Todas las variables de conglomerado con polinomios de Laurent en las variables de conglomerado de la semilla inicial con coeficientes enteros. Más precisamente, están contenidos en $\mathbb{Z}[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}]$.

Conjetura de Positividad (Fomin–Zelevinsky 2001)

Todas las variables de conglomerado están contenidos en $\mathbb{N}[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}]$.

Fenómeno de Laurent (Fomin–Zelevinsky 2001)

Todas las variables de conglomerado con polinomios de Laurent en las variables de conglomerado de la semilla inicial con coeficientes enteros. Más precisamente, están contenidos en $\mathbb{Z}[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}]$.

Conjetura de Positividad (Fomin–Zelevinsky 2001)

Todas las variables de conglomerado están contenidos en $\mathbb{N}[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}]$.

Teorema de Positividad (Gross–Hacking–Keel–Kontsevich 2014)

La conjetura de positividad es verdadera.

Gross–Hacking–Keel–Kontsevich ven las álgebras de conglomerado como anillos de funciones en variedades log Calabi–Yau (*variedades de conglomerado*) y usan herramientas de la geometría biracional y la simetría especular (mirror symmetry).

Clasificación de tipo finito (Fomin–Zelevinsky 2003)

El álgebra de conglomerado \mathcal{A}_Q es de *tipo finito* (el conjunto de semillas es finito)

Clasificación de tipo finito (Fomin–Zelevinsky 2003)

El álgebra de conglomerado \mathcal{A}_Q es de *tipo finito* (el conjunto de semillas es finito) si y solo si (la parte mutable de) Q es equivalente bajo mutación a una orientación de un diagrama de Dynkin de tipo ADE:

$$A_n : \quad \bullet \text{ --- } \bullet \text{ --- } \dots \text{ --- } \bullet$$

$$D_n : \quad \bullet \text{ --- } \bullet \text{ --- } \dots \text{ --- } \bullet \begin{array}{l} \diagup \bullet \\ \diagdown \bullet \end{array}$$

$$E_6 : \quad \begin{array}{cccccc} & & \bullet & & & \\ & & | & & & \\ \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet \end{array}$$

$$E_7 : \quad \begin{array}{ccccccc} & & \bullet & & & & \\ & & | & & & & \\ \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet \end{array}$$

$$E_8 : \quad \begin{array}{cccccccc} & & \bullet & & & & & \\ & & | & & & & & \\ \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet \end{array}$$

Ejemplos de estructuras de conglomerado

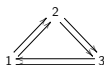
① Los triples de Markov

- ▶ son triples de enteros (a, b, c) que satisfacen $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$,

Ejemplos de estructuras de conglomerado

1 Los triples de Markov

- ▶ son triples de enteros (a, b, c) que satisfacen $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$,
- ▶ sea $Q =$

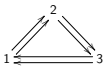


y $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$,

Ejemplos de estructuras de conglomerado

1 Los triples de Markov

▶ son triples de enteros (a, b, c) que satisfacen $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$,

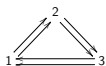
▶ sea $Q =$  y $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$,

▶ $(\mathbf{x}', Q) \sim (\mathbf{x}, Q)$ entonces $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ es un triple de Markov.

Ejemplos de estructuras de conglomerado

1 Los triples de Markov

- ▶ son triples de enteros (a, b, c) que satisfacen $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$,
- ▶ sea $Q =$



- ▶ $(\mathbf{x}', Q) \sim (\mathbf{x}, Q)$ entonces $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ es un triple de Markov.

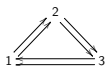
2 El polinomio de Jones:

nudo o enlace de 2 puentes L \rightsquigarrow fracción continua \rightsquigarrow grafo serpiente \rightsquigarrow variable de conglomerado x_L

Ejemplos de estructuras de conglomerado

1 Los triples de Markov

- ▶ son triples de enteros (a, b, c) que satisfacen $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$,
- ▶ sea $Q =$



y $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$,

- ▶ $(\mathbf{x}', Q) \sim (\mathbf{x}, Q)$ entonces $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ es un triple de Markov.

2 El polinomio de Jones:

nudo o enlace de 2 puentes L \rightsquigarrow fracción continua \rightsquigarrow grafo serpiente \rightsquigarrow variable de conglomerado x_L

[Lee-Schiffler] El polinomio de Jones de L (hasta la normalización por el término principal) es igual al polinomio de Laurent de x_L (hasta una especialización de coeficientes).

Ejemplos de estructuras de conglomerado

1 Los triples de Markov

- ▶ son triples de enteros (a, b, c) que satisfacen $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$,
- ▶ sea $Q =$



y $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$,

- ▶ $(\mathbf{x}', Q) \sim (\mathbf{x}, Q)$ entonces $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ es un triple de Markov.

2 El polinomio de Jones:

nudo o enlace de 2 puentes L \rightsquigarrow fracción continua \rightsquigarrow grafo serpiente \rightsquigarrow variable de conglomerado x_L

[Lee-Schiffler] El polinomio de Jones de L (hasta la normalización por el término principal) es igual al polinomio de Laurent de x_L (hasta una especialización de coeficientes).

3 La ecuación de KP...

La ecuación de KP

La *ecuación de Kadomtsev y Petviashvili (KP)* es una ecuación diferencial parcial para describir el movimiento de onda no lineal. Para $u = u(x, y, t)$

$$(-4u_t + u_{xxx} + 6uu_x)_x + 3u_{yy} = 0$$

La ecuación de KP

La *ecuación de Kadomtsev y Petviashvili (KP)* es una ecuación diferencial parcial para describir el movimiento de onda no lineal. Para $u = u(x, y, t)$

$$(-4u_t + u_{xxx} + 6uu_x)_x + 3u_{yy} = 0$$

Generaliza la ecuación Korteweg-de Vries (KdV) que es unidimensional (para $u = u(x, t)$ es $u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0$).

La ecuación de KP

La *ecuación de Kadomtsev y Petviashvili (KP)* es una ecuación diferencial parcial para describir el movimiento de onda no lineal. Para $u = u(x, y, t)$

$$(-4u_t + u_{xxx} + 6uu_x)_x + 3u_{yy} = 0$$

Generaliza la ecuación Korteweg-de Vries (KdV) que es unidimensional (para $u = u(x, t)$ es $u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0$).

Una clase de soluciones muy curiosa es la de *ondas solitarias*. Son ondas que viajan preservando su forma y su energía.

Ondas solitarias en agua de poca profundidad



De Mark J. Ablowitz en Nuevo Vallarta, Nayarit, México,
<https://sites.google.com/site/ablowitz/line-solitons>

Ondas solitarias en agua de poca profundidad



De Mark J. Ablowitz en Nuevo Vallarta, Nayarit, México,
<https://sites.google.com/site/ablowitz/line-solitons>

El cuento dice que fueron observados por primera vez de John Scott Russel en un canal de agua de poca profundidad en 1834 en Escocia y los describió en [Rus].

Soluciones de ondas solitarias

Un *dato de un solitón* es una matriz $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ de rango completo y $\kappa_1 < \kappa_2 < \cdots < \kappa_n$ en \mathbb{R} .

Soluciones de ondas solitarias

Un *dato de un solitón* es una matriz $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ de rango completo y $\kappa_1 < \kappa_2 < \dots < \kappa_n$ en \mathbb{R} . La *función* τ asociada es

$$\tau_A(x, y, t) = \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \Delta_I(A) \prod_{j < k} (\kappa_{ij} - \kappa_{ik}) e^{\Theta_I(x, y, t)},$$

con $\Delta_I(A)$ la determinante de la submatriz de A con columnas en I y $\Theta_I(x, y, t) = \sum_{i \in I} \kappa_i x + \kappa_i^2 y + \kappa_i^3 t$.

Soluciones de ondas solitarias

Un *dato de un solitón* es una matriz $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ de rango completo y $\kappa_1 < \kappa_2 < \dots < \kappa_n$ en \mathbb{R} . La *función* τ asociada es

$$\tau_A(x, y, t) = \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \Delta_I(A) \prod_{j < k} (\kappa_{ij} - \kappa_{ik}) e^{\Theta_I(x, y, t)},$$

con $\Delta_I(A)$ la determinante de la submatriz de A con columnas en I y $\Theta_I(x, y, t) = \sum_{i \in I} \kappa_i x + \kappa_i^2 y + \kappa_i^3 t$. Cada dato de un solitón da una *solución de solitón* que es la función

$$u(x, y, t) = 2\partial_x^2 \ln(\tau_A).$$

Soluciones de ondas solitarias

Un *dato de un solitón* es una matriz $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ de rango completo y $\kappa_1 < \kappa_2 < \dots < \kappa_n$ en \mathbb{R} . La *función* τ asociada es

$$\tau_A(x, y, t) = \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \Delta_I(A) \prod_{j < k} (\kappa_{ij} - \kappa_{ik}) e^{\Theta_I(x, y, t)},$$

con $\Delta_I(A)$ la determinante de la submatriz de A con columnas en I y $\Theta_I(x, y, t) = \sum_{i \in I} \kappa_i x + \kappa_i^2 y + \kappa_i^3 t$. Cada dato de un solitón da una *solución de solitón* que es la función

$$u(x, y, t) = 2\partial_x^2 \ln(\tau_A).$$

La solución es *regular* si $\Delta_I(A) \geq 0$ para cada $I \in \binom{[n]}{k}$. En este caso A corresponde a un elemento en la Grassmanniana totalmente no negativa.

La gráfica de un solitón

Substituimos $x \rightarrow \frac{x}{\epsilon}$, $y \rightarrow \frac{y}{\epsilon}$ y $t \rightarrow \frac{t}{\epsilon}$ para un $\epsilon > 0$ muy pequeño.

La gráfica de un solitón

Substituimos $x \rightarrow \frac{x}{\epsilon}$, $y \rightarrow \frac{y}{\epsilon}$ y $t \rightarrow \frac{t}{\epsilon}$ para un $\epsilon > 0$ muy pequeño. El *limite tropical* es

$$f_A(x, y, t) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon \ln(\tau_A)) = \max_{I \in \binom{[n]}{k}} (\Theta_I(x, y, t)).$$

La gráfica de un solitón

Substituimos $x \rightarrow \frac{x}{\epsilon}$, $y \rightarrow \frac{y}{\epsilon}$ y $t \rightarrow \frac{t}{\epsilon}$ para un $\epsilon > 0$ muy pequeño. El *limite tropical* es

$$f_A(x, y, t) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon \ln(\tau_A)) = \max_{I \in \binom{[n]}{k}} (\Theta_I(x, y, t)).$$

Las *líneas de nivel* del solitón son capturadas en el conjunto

$$\mathcal{C}_t(A) = \{\text{locos en el plano de } xy \text{ donde } f_A \text{ no es lineal}\}.$$

La gráfica de un solitón

Substituimos $x \rightarrow \frac{x}{\epsilon}$, $y \rightarrow \frac{y}{\epsilon}$ y $t \rightarrow \frac{t}{\epsilon}$ para un $\epsilon > 0$ muy pequeño. El *limite tropical* es

$$f_A(x, y, t) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon \ln(\tau_A)) = \max_{I \in \binom{[n]}{k}} (\Theta_I(x, y, t)).$$

Las *líneas de nivel* del solitón son capturadas en el conjunto

$$\mathcal{C}_t(A) = \{\text{locos en el plano de } xy \text{ donde } f_A \text{ no es lineal}\}.$$

La *gráfica del solitón* es $\mathcal{C}_t(A)$ encajada en un disco, olvidando su estructura métrica pero preservando su estructura topológica.

La gráfica de un solitón

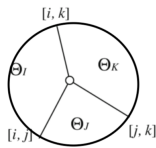
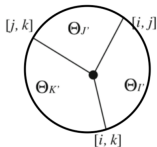
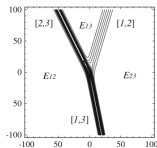
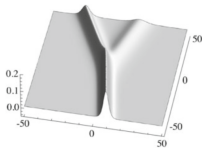
Substituimos $x \rightarrow \frac{x}{\epsilon}, y \rightarrow \frac{y}{\epsilon}$ y $t \rightarrow \frac{t}{\epsilon}$ para un $\epsilon > 0$ muy pequeño. El *limite tropical* es

$$f_A(x, y, t) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon \ln(\tau_A)) = \max_{I \in \binom{[n]}{k}} (\Theta_I(x, y, t)).$$

Las *líneas de nivel* del solitón son capturadas en el conjunto

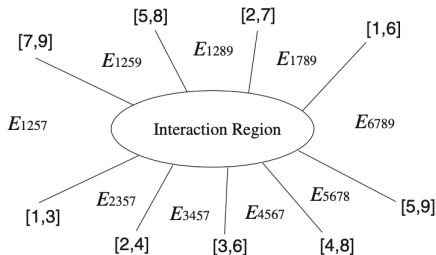
$$\mathcal{C}_t(A) = \{\text{locos en el plano de } xy \text{ donde } f_A \text{ no es lineal}\}.$$

La *gráfica del solitón* es $\mathcal{C}_t(A)$ encajada en un disco, olvidando su estructura métrica pero preservando su estructura topológica.



Conexión con las álgebras de conglomerado

Sean los datos del solitón *genéricos*, es decir $\Delta_l(A) > 0$ para todos los l y $\sum_{j=1}^p \kappa_{ij}$ distintos para todos los p .



Teorema (Kodama–Williams 2014)

El conjunto de coordenadas de Plücker (los Δ_l) cuyos índices corresponden a las etiquetas de una gráfica de un solitón regular genérica es una semilla en el álgebra de conglomerado de la Grassmanniana.

Referencias

- BMN Lara Bossinger, Fatemeh Mohammadi, Alfredo Nájera Chávez. Families of Gröbner Degenerations, Grassmannians and Universal Cluster Algebras *SIGMA* 17 (2021)
- FZ02 Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras. I. Foundations. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(2):497–529, 2002.
- FZ03 Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras. II. Finite type classification. *Invent. Math.* 154 (2003), no. 1, 63–121.
- FG07 Vladimir V. Fock and Alexander Goncharov. Dual Teichmüller and lamination spaces. Handbook of Teichmüller theory. Vol. I, 647–684, *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, 11, Eur. Math. Soc., Zürich, (2007)
- GHKK Mark Gross, Paul Hacking, Sean Keel, and Maxim Kontsevich. Canonical bases for cluster algebras. *J. Amer. Math. Soc.*, 31(2):497–608 (2018)
- MR88 Teo Mora and Lorenzo Robbiano. The Gröbner fan of an ideal. *Computational aspects of commutative algebra. J. Symbolic Comput.* 6 (1988), no. 2-3, 183–208
- Pen87 Robert C. Penner. The decorated Teichmüller space of punctured surfaces. *Comm. Math. Phys.* Volume 113, Number 2 (1987), 299-339.
- Sco06 Joshua S. Scott. Grassmannians and cluster algebras. *Proc. London Math. Soc.* (3) 92 (2006), no. 2, 345–380.
- LS19 Kyungyong Lee and Ralf Schiffler. Cluster algebras and Jones polynomials. *Selecta Math. (N.S.)* 25 4 Paper No. 58, 41 (2019)
- KW14 Yuji Kodama and Lauren Williams. KP solitons and total positivity for the Grassmannian. *Invent. Math.* 198, no. 3 (2014)