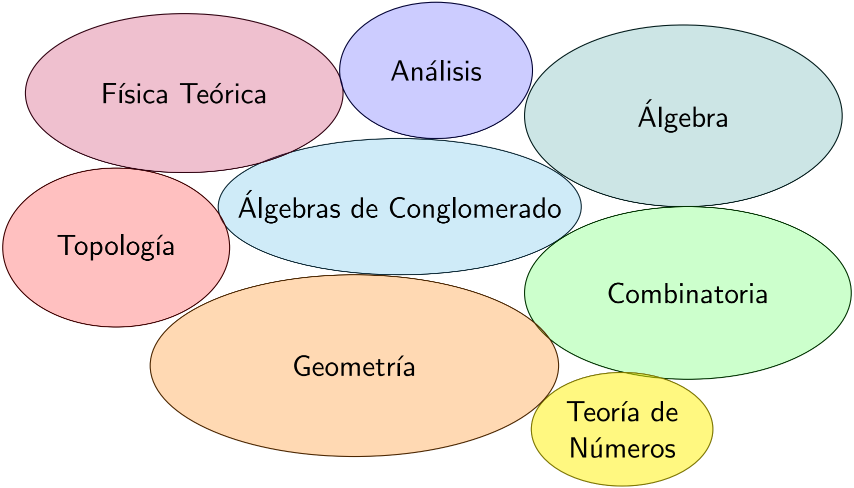
La historia del álgebra de conglomerado

Lara Bossinger

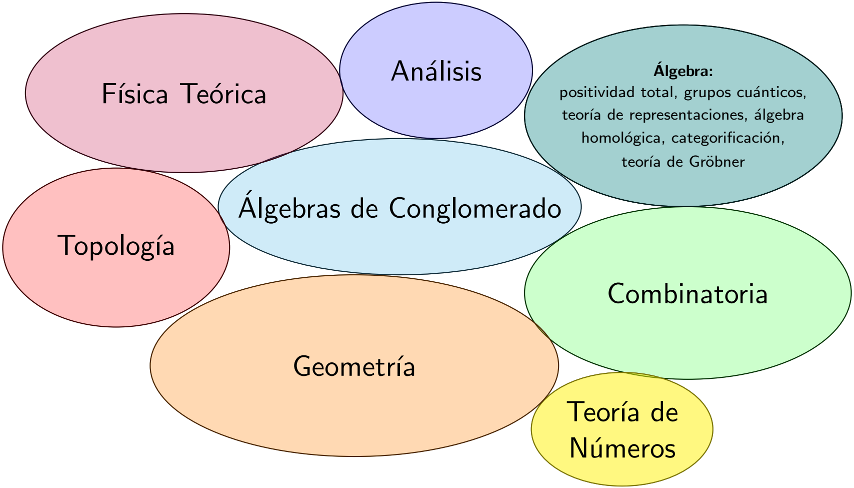
Universidad Nacional Autónoma de México, IM-Oaxaca

Hablando de Matemáticas, mayo 20 2021

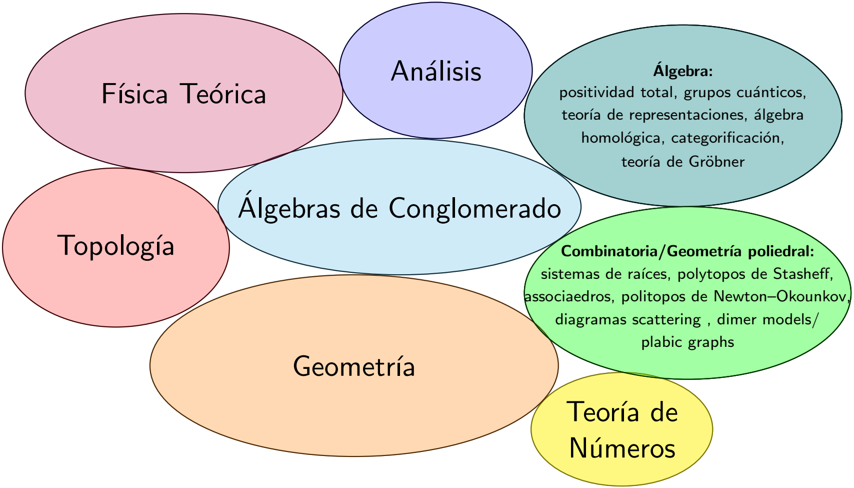
¿Donde encontramos las álgebras de conglomerado?



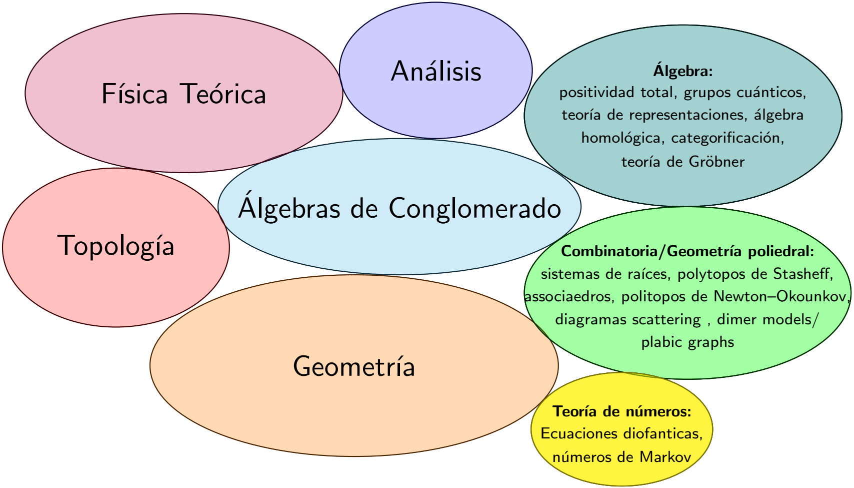
¿Donde encontramos las álgebras de conglomerado?



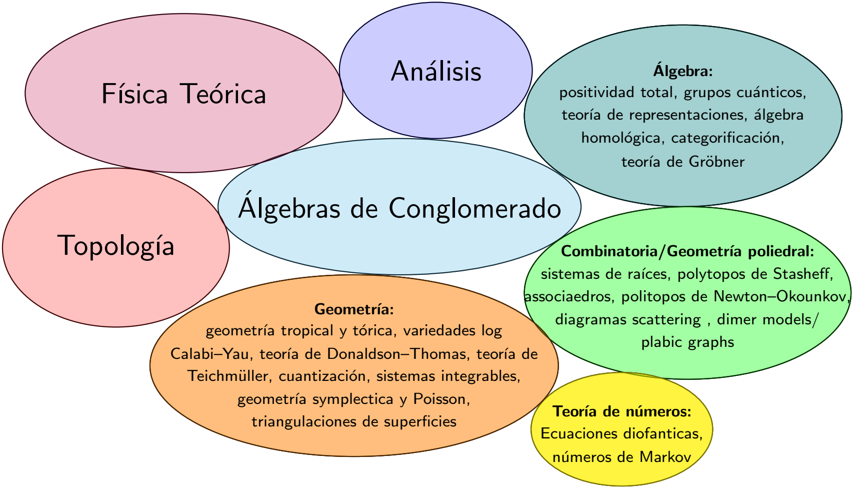
¿Donde encontramos las álgebras de conglomerado?



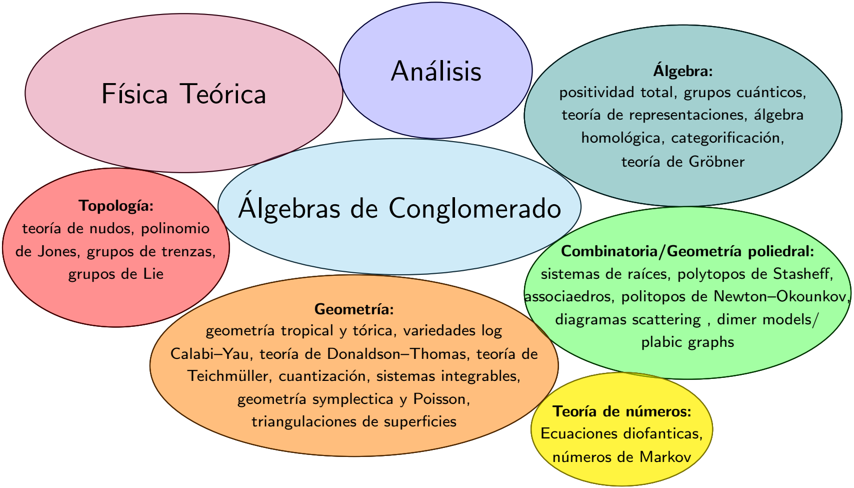
¿Donde encontramos las álgebras de conglomerado?



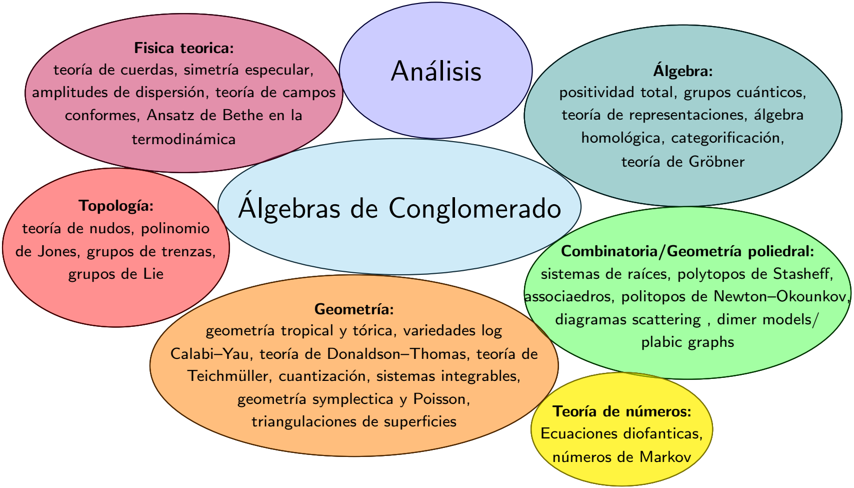
¿Donde encontramos las álgebras de conglomerado?



¿Donde encontramos las álgebras de conglomerado?



¿Donde encontramos las álgebras de conglomerado?



¿Donde encontramos las álgebras de conglomerado?

Álgebras de Conglomerado

Fisica teorica:
teoría de cuerdas, simetría especular, amplitudes de dispersión, teoría de campos conformes, Ansatz de Bethe en la termodinámica

Analysis/Fisica:
ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, ondas solitarias

Álgebra:
positividad total, grupos cuánticos, teoría de representaciones, álgebra homológica, categorificación, teoría de Gröbner

Topología:
teoría de nudos, polinomio de Jones, grupos de trenzas, grupos de Lie

Combinatoria/Geometría poliedral:
sistemas de raíces, polytopos de Stasheff, associaedros, politopos de Newton–Okounkov, diagramas scattering , dimer models/ plabic graphs

Geometría:
geometría tropical y tórica, variedades log Calabi–Yau, teoría de Donaldson–Thomas, teoría de Teichmüller, cuantización, sistemas integrables, geometría symplectica y Poisson, triangulaciones de superficies

Teoría de números:
Ecuaciones diofanticas, números de Markov

Historia

- Dos rusos Sergei Fomin y Andrei Zelevinsky definieron las álgebras de conglomerado en 2001

©http://www.math.lsa.umich.edu/~fomin

©https://opc.mfo.de

- Observaron la *estructura de conglomerado* en la teoría de positividad total de matrices, en grupos cuánticos y sus bases canónicas.
- Los algebristas de la teoría de representaciones fueron muy emocionados por el nuevo concepto.
- Pocos años después muchos matemáticos de otros áreas dieron el bienvenido al álgebra de conglomerado en su trabajo.
- Ahora hay más que 1,755 artículos y desde 2003 había más que 139 eventos sobre el álgebra de conglomerado

El origen del álgebra de conglomerado: la positividad total

Sea $M = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

El origen del álgebra de conglomerado: la positividad total

Sea $M = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$p_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

El origen del álgebra de conglomerado: la positividad total

Sea $M = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$p_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ calculamos

El origen del álgebra de conglomerado: la positividad total

Sea $M = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$p_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ calculamos

$$p_{12} = \det \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) = 2$$

El origen del álgebra de conglomerado: la positividad total

Sea $M = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$p_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $\quad M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \quad$ calculamos

$$p_{12} = 2,\ p_{13} = \det \left(\begin{smallmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 1$$

El origen del álgebra de conglomerado: la positividad total

Sea $M = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$p_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ calculamos

$$p_{12} = 2,\ p_{13} = 1,\ p_{14} = \det \left(\begin{smallmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 1$$

El origen del álgebra de conglomerado: la positividad total

Sea $M = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$p_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ calculamos

$$p_{12} = 2,\ p_{13} = 1,\ p_{14} = 1,\ p_{23} = \det \left(\begin{smallmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 6$$

El origen del álgebra de conglomerado: la positividad total

Sea $M = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$p_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ calculamos

$$p_{12} = 2,\ p_{13} = 1,\ p_{14} = 1,\ p_{23} = 6,\ p_{24} = \det \left(\begin{smallmatrix} 0 & -5 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 10$$

Sea $M = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$p_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ calculamos

$$p_{12} = 2,\ p_{13} = 1,\ p_{14} = 1,\ p_{23} = 6,\ p_{24} = 10,\ p_{34} = \det \left(\begin{smallmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 2$$

El origen del álgebra de conglomerado: la positividad total

Sea $M = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$p_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ calculamos

$$p_{12} = 2,\ p_{13} = 1,\ p_{14} = 1,\ p_{23} = 6,\ p_{24} = 10,\ p_{34} = 2.$$

Observamos: $p_{12}p_{34} + p_{14}p_{23} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 6 = 10 = p_{13}p_{24}$.

El origen del álgebra de conglomerado: la positividad total

Sea $M = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$p_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ calculamos

$$p_{12} = 2,\ p_{13} = 1,\ p_{14} = 1,\ p_{23} = 6,\ p_{24} = 10,\ p_{34} = 2.$$

Observamos: $p_{12}p_{34} + p_{14}p_{23} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 6 = 10 = p_{13}p_{24}$.

Ejercicio: Cada $M \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ cumple $p_{12}p_{34} + p_{14}p_{23} = p_{13}p_{24}$.

El origen del álgebra de conglomerado: la positividad total

Sea $M = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ de rango 2. Se llama *totalmente positiva* si todos los 2-minores de M son números reales positivos:

$$p_{ij}(M) := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix} = a_i b_j - a_j b_i > 0 \quad \text{para todos } i < j.$$

Por ejemplo, para $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ calculamos

$$p_{12} = 2,\ p_{13} = 1,\ p_{14} = 1,\ p_{23} = 6,\ p_{24} = 10,\ p_{34} = 2.$$

Observamos: $p_{12}p_{34} + p_{14}p_{23} = 2\cdot 2 + 1 \cdot 6 = 10 = p_{13}p_{24}$.

Ejercicio: Cada $M \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ cumple $p_{12}p_{34} + p_{14}p_{23} = p_{13}p_{24}$.

Pregunta: ¿Como podemos verificar *eficientemente* si M es totalmente positiva o no?

El origen del algebra de conglomerado: positividad total

Observación: $M \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ es totalmente positivo si y solo si $p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{34} > 0$. Pues, en este caso también

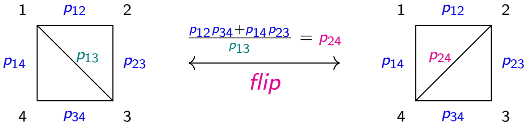
$$p_{24} = \frac{p_{12}p_{34} + p_{14}p_{23}}{p_{13}} > 0.$$

El conjunto $\{p_{13}, p_{12}, p_{14}, p_{23}, p_{34}\}$ se llama un *test de positividad*.

Question: ¿Como podemos encontrar los tests de positividad?

Para $\mathbb{R}^{2\times 4}$ tenemos otro test de positividad: $\{p_{24}, p_{12}, p_{14}, p_{23}, p_{34}\}$.

Los dos se pueden visualizar usando las triangulaciones del cuadrado:

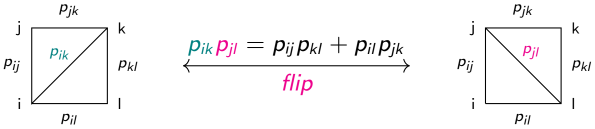


Relaciones entre los minores y Ptolomeo

Más general para una matriz $M \in \mathbb{R}^{2\times n}$ uno puede verificar que para todos $i < j < k < l \in \{1, \dots, n\}$ tenemos $p_{ik}p_{jl} = p_{ij}p_{kl} + p_{il}p_{jk}$:

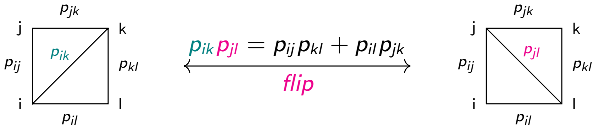
Relaciones entre los minores y Ptolomeo

Más general para una matriz $M \in \mathbb{R}^{2\times n}$ uno puede verificar que para todos $i < j < k < l \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos $p_{ik}p_{jl} = p_{ij}p_{kl} + p_{il}p_{jk}$:



Relaciones entre los minores y Ptolomeo

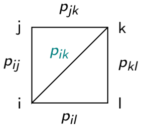
Más general para una matriz $M \in \mathbb{R}^{2\times n}$ uno puede verificar que para todos $i < j < k < l \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos $p_{ik}p_{jl} = p_{ij}p_{kl} + p_{il}p_{jk}$:



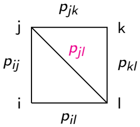
¿Les parece conocida?

Relaciones entre los minores y Ptolomeo

Más general para una matriz $M \in \mathbb{R}^{2\times n}$ uno puede verificar que para todos $i < j < k < l \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos $p_{ik}p_{jl} = p_{ij}p_{kl} + p_{il}p_{jk}$:

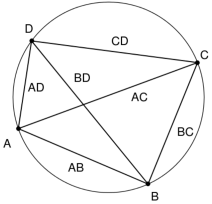


$$p_{ik}p_{jl} = p_{ij}p_{kl} + p_{il}p_{jk}$$
$$\xleftrightarrow[\textit{flip}]{}$$



¿Les parece conocida?

La relación de Ptolomeo: $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}$

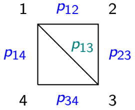


Test de positividad y el álgebra de conglomerado $\mathcal{A}_T$

Consecuencia: $\left\{\begin{matrix}\text{test de positividad}\\ \text{eficiente}\end{matrix}\right\} \overset{1-1}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix}\text{triangulación}\\ \text{del } n\text{-ágon}\end{matrix}\right\}.$

$\Rightarrow$ *una* triangulación contiene la información de *todos* test de positividad usando los *flips*.

$\rightsquigarrow$ Esta información la usamos para definir un *álgebra de conglomerado* $\mathcal{A}_T$ asociada a una triangulación T , por ejemplo

$T =$ 

$\mathcal{A}_T$ es el subálgebra del campo $\mathbb{Q}(p_{13}, p_{12}, p_{14}, p_{23}, p_{34})$ generado de todas los minores obtenidos de T con flips

$$\mathcal{A}_T = \left\langle p_{13}, p_{12}, p_{14}, p_{23}, p_{34}, \frac{p_{12}p_{34} + p_{14}p_{23}}{p_{13}} = p_{24} \right\rangle$$

Carcaj y mutación de carcaj

Un *carcaj* Q es una gráfica dirigida, que consiste de un conjunto finito de vértices y flechas entre ellos.

Suposición: Q no tiene ciclos orientados de una o dos flechas.

Distingimos *vertices mutables* $\{1, \ldots, n\}$ y *vertices congeladas* $\{n+1, \ldots, m\}$, por ejemplo $1 \rightrightarrows 2 \to 3$.

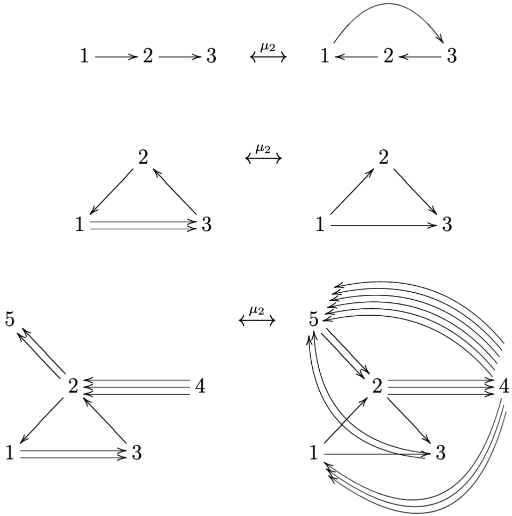
Definición (Mutación de carcaj)

Dado un carcaj Q y un vertex mutable k, la *mutación en la direción k* $\mu_k(Q)$ es un carcaj obtenido de Q en tres pasos:

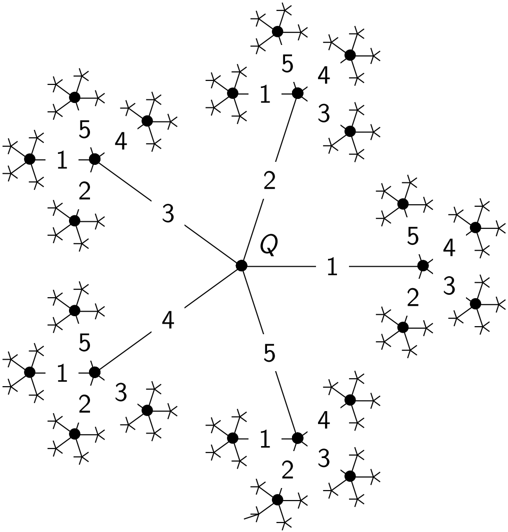
1. para cada camino $i \to k \to j$ se agrega una flecha $i \to j$;
2. se inverte cada flecha incidente a k;
3. se elimina un conjunto maximal de 2-ciclos.

Ejercicio: La mutación de carcaj es una *involución*: $\mu_k(\mu_k(Q)) = Q$.

Ejemplo: mutación de carcaj



Iteración de mutaciones: un sistema dinámico



Semillas y mutación

Una *semilla* s es un par $(\mathbf{x}, Q)$, donde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ es una colección de variables llamada un *conglomerado* y Q es un carcaj con n vértices mutables y m vértices congelados.

Definición (Mutación de semillas)

Dado una semilla $s = (\mathbf{x}, Q)$ y un vertex mutable k de Q, la *mutación en la dirección k* $\mu_k(s)$ es el par $(\mu_k(\mathbf{x}), \mu_k(Q))$, donce
$\mu_k(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \setminus \{x_k\} \cup \{x'_k\}$ y

$$x'_k := \frac{\prod_{i \to k \in Q} x_i + \prod_{k \to j \in Q} x_j}{x_k}.$$

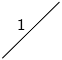
Ejercicio: La mutación de semillas es una *involución*: $\mu_k(\mu_k(s)) = s$.

Ejemplo: mutación de semillas

$$x_1 \to x_2$$

Ejemplo: mutación de semillas

$$x_1 \to x_2$$



Ejemplo: mutación de semillas

$$\begin{tikzcd}
 & x_1 \arrow[r] \arrow[d, dash, "1"'] & x_2 \\
\frac{1+x_2}{x_1} & x_2 \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

Ejemplo: mutación de semillas

$$\begin{tikzcd}
 & x_1 \arrow[r] \arrow[dl, dash, "1"'] & x_2 \\
\frac{1+x_2}{x_1} & x_2 \arrow[l] \arrow[d, dash, "2"'] & \\
 & {} &
\end{tikzcd}$$

Ejemplo: mutación de semillas

$$
\begin{tikzcd}
 & x_1 \rightarrow x_2 \arrow[dl, dash, "1"'] \\
\frac{1+x_2}{x_1} \leftarrow x_2 \arrow[d, dash, "2"'] & \\
\frac{1+x_2}{x_1} \rightarrow \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} &
\end{tikzcd}
$$

Ejemplo: mutación de semillas

$$\begin{tikzcd}
 & & x_1 \arrow[r] \arrow[dl, dash, "1"'] & x_2 \\
 \frac{1+x_2}{x_1} & x_2 \arrow[l] \arrow[d, dash, "2"'] & & \\
 \frac{1+x_2}{x_1} \arrow[r] & \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \arrow[dr, dash, "1"'] & & \\
 & & {} &
\end{tikzcd}$$

Ejemplo: mutación de semillas

$$
\begin{tikzcd}
 & & & x_1 \arrow[r] & x_2 \\
 & \frac{1+x_2}{x_1} & x_2 \arrow[l] \arrow[ur, dash, "1"] \arrow[dl, dash, "2"'] & & \\
 \frac{1+x_2}{x_1} \arrow[r] & \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \arrow[dr, dash, "1"] & & & \\
 & & {} & &
\end{tikzcd}
$$

$$\left(1+\frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}\right) \div \frac{1+x_2}{x_1}$$

Ejemplo: mutación de semillas

$$\begin{tikzcd}
 & & x_1 \arrow[r] & x_2 \\
\frac{1+x_2}{x_1} & x_2 \arrow[l] \arrow[ur, dash, "1"] & & \\
\frac{1+x_2}{x_1} \arrow[r] & \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \arrow[u, dash, "2"] \arrow[dr, dash, "1"] & & \\
 & & {} &
\end{tikzcd}$$

$$\left(1+\frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}\right) \div \frac{1+x_2}{x_1} \quad = \frac{x_1x_2+1+x_1+x_2}{x_2(1+x_2)}$$

Ejemplo: mutación de semillas

$$x_1 \to x_2$$

1

$$\frac{1+x_2}{x_1} \leftarrow x_2$$

2

$$\frac{1+x_2}{x_1} \to \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2}$$

1

la magia de conglomerado!

$$\left(1 + \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2}\right) \div \frac{1+x_2}{x_1} \quad = \frac{x_1 x_2 + 1 + x_1 + x_2}{x_2(1+x_2)} \quad = \frac{1+x_1}{x_2}$$

Ejemplo: mutación de semillas

$$
\begin{tikzcd}
& & x_1 \arrow[r] & x_2 \\
& \frac{1+x_2}{x_1} & x_2 \arrow[l] \arrow[u, dash, "1"'] & \\
& \frac{1+x_2}{x_1} \arrow[r] & \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \arrow[u, dash, "2"] & \\
& & \frac{1+x_1}{x_2} & \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \arrow[l] \arrow[ul, dash, "1"']
\end{tikzcd}
$$

la magia de conglomerado!

$$\left(1+\frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}\right)\div\frac{1+x_2}{x_1} \quad = \frac{x_1x_2+1+x_1+x_2}{x_2(1+x_2)} \quad = \frac{1+x_1}{x_2}$$

Ejemplo: mutación de semillas

$$
\begin{tikzcd}
 & x_1 \rightarrow x_2 \arrow[dl, dash, "1"'] & \\
\frac{1+x_2}{x_1} \leftarrow x_2 \arrow[d, dash, "2"'] & & \\
\frac{1+x_2}{x_1} \rightarrow \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2} \arrow[dr, dash, "1"'] & & \\
 & \frac{1+x_1}{x_2} \leftarrow \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2} \arrow[ur, dash, "2"'] &
\end{tikzcd}
$$

Ejemplo: mutación de semillas

$$
\begin{tikzcd}
 & & x_1 \to x_2 \arrow[dl, dash, "1"'] & \\
 & \frac{1+x_2}{x_1} \leftarrow x_2 \arrow[d, dash, "2"'] & & \\
 & \frac{1+x_2}{x_1} \to \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2} \arrow[dr, dash, "1"'] & & \frac{1+x_1}{x_2} \to x_1 \\
 & & \frac{1+x_1}{x_2} \leftarrow \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2} \arrow[ur, dash, "2"'] &
\end{tikzcd}
$$

Ejemplo: mutación de semillas

$$
\begin{tikzcd}
 & x_1 \to x_2 \arrow[dl, dash, "1"'] & \\
\frac{1+x_2}{x_1} \leftarrow x_2 \arrow[d, dash, "2"'] & & \\
\frac{1+x_2}{x_1} \to \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \arrow[dr, dash, "1"'] & & \frac{1+x_1}{x_2} \to x_1 \arrow[uul, dash, "1"'] \\
 & \frac{1+x_1}{x_2} \leftarrow \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \arrow[ur, dash, "2"'] &
\end{tikzcd}
$$

Ejemplo: mutación de semillas

$$\begin{tikzcd}
 & x_1 \rightarrow x_2 & \\
\frac{1+x_2}{x_1} \leftarrow x_2 \arrow[ur, dash, "1"] \arrow[d, dash, "2"'] & & x_2 \leftarrow x_1 \arrow[d, dash, "1"] \\
\frac{1+x_2}{x_1} \rightarrow \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \arrow[dr, dash, "1"'] & & \frac{1+x_1}{x_2} \rightarrow x_1 \arrow[dl, dash, "2"] \\
 & \frac{1+x_1}{x_2} \leftarrow \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} &
\end{tikzcd}$$

Ejemplo: mutación de semillas

$$\begin{tikzcd}
 & x_1 \to x_2 \arrow[dl, dash, "1"'] \arrow[dr, dash, "\cong"] & \\
\frac{1+x_2}{x_1} \leftarrow x_2 \arrow[d, dash, "2"'] & & x_2 \leftarrow x_1 \arrow[d, dash, "1"] \\
\frac{1+x_2}{x_1} \to \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \arrow[dr, dash, "1"'] & & \frac{1+x_1}{x_2} \to x_1 \arrow[dl, dash, "2"] \\
 & \frac{1+x_1}{x_2} \leftarrow \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} &
\end{tikzcd}$$

Álgebra de conglomerado

Sea $\mathcal{F} = \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_{n+m})$ el campo de funciones racionales en las variables $x_1, \ldots, x_{n+m}$.

Sean $s = (\mathbf{x}, Q)$ es una semilla con $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{n+m})$ y $s' = (\mathbf{x}', Q')$ una semilla obtenida de s con mutaciones, entonces el conglomerado $\mathbf{x}' = (x_1', \ldots, x_n', x_{n+1}', \ldots, x_{n+m}')$ satisface

$$\mathbb{Q}(x_1', \ldots, x_n', x_{n+1}', \ldots, x_{n+m}') = \mathcal{F}.$$

Definición

El *álgebra de conglomerado* definido de la semilla inicial $s = (Q, \mathbf{x})$ es la $\mathcal{F}$-subálgebra

$$\mathcal{A}_Q := \langle \bigcup_{(\mathbf{x}', Q') \sim (\mathbf{x}, Q)} \mathbf{x}' \rangle \subset \mathcal{F}.$$

Teorema (Fomin–Zelevinsky 2001)

El álgebra de conglomerado $\mathcal{A}_Q$ solo dipende de la clase de mutación de Q.

Ejemplo: un álgebra de conglomerado

$$
\begin{tikzcd}
& x_1 \to x_2 \arrow[dl, dash, "1"'] \arrow[dr, dash, "\cong"] & \\
\frac{1+x_2}{x_1} \leftarrow x_2 \arrow[d, dash, "2"'] & & x_2 \leftarrow x_1 \arrow[d, dash, "1"] \\
\frac{1+x_2}{x_1} \to \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2} \arrow[dr, dash, "1"'] & & \frac{1+x_1}{x_2} \to x_1 \arrow[dl, dash, "2"] \\
& \frac{1+x_1}{x_2} \leftarrow \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2} &
\end{tikzcd}
$$

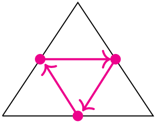
$$\mathcal{A}_Q = \left\langle x_1, x_2, \frac{1+x_2}{x_1}, \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2}, \frac{1+x_1}{x_2} \right\rangle \subset \mathbb{Q}(x_1, x_2).$$

El carcaj de una triangulación

Recuerda el álgebra de conglomerado $\mathcal{A}_T$ asociada a una triangulación T del n-ágono.

Podemos asociar un carcaj Q_T a cada triangulación T:

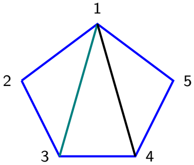
1. vértices mutables de $Q_T \leftrightarrow$ las diagonales de T;
2. vértices congelados de $Q_T \leftrightarrow$ aristas en la frontera de T;
3. agrega flechas a dentro de cada triangulo:



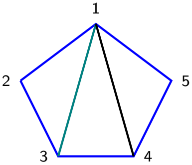
4. olvida las flechas entre vértices congelados.

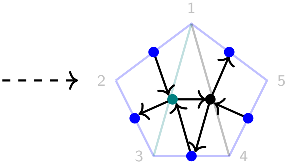
Flip de triangulación y mutación

T

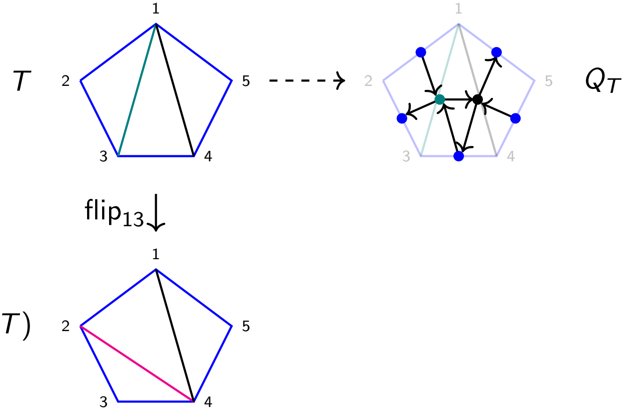


Flip de triangulación y mutación

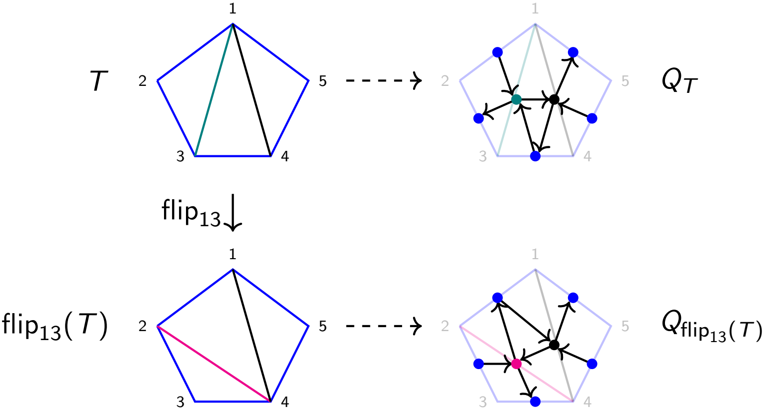
T 

 Q_T

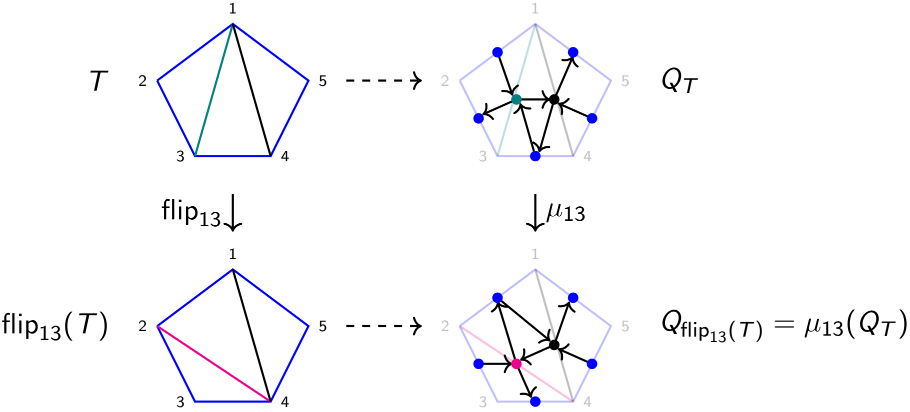
Flip de triangulación y mutación



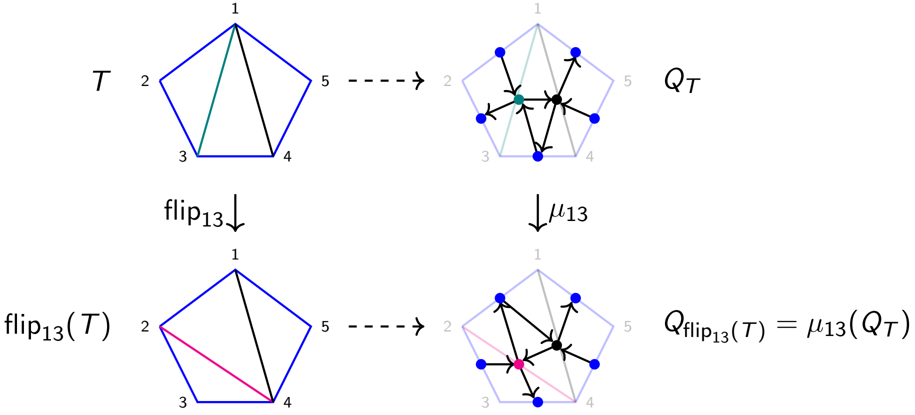
Flip de triangulación y mutación



Flip de triangulación y mutación

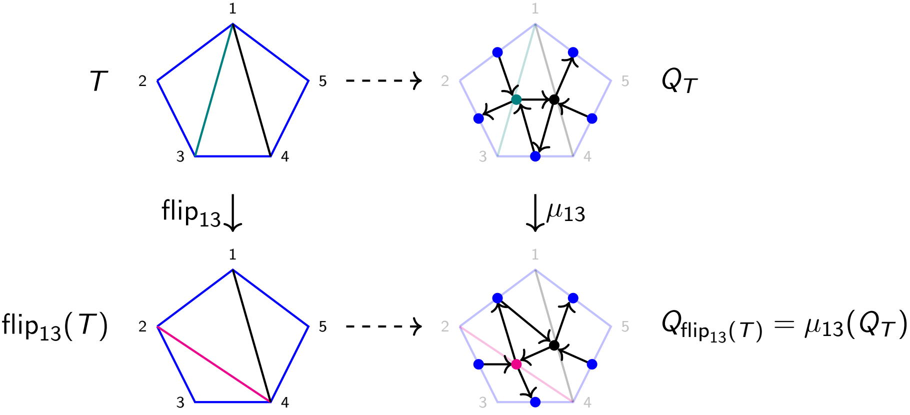


Flip de triangulación y mutación



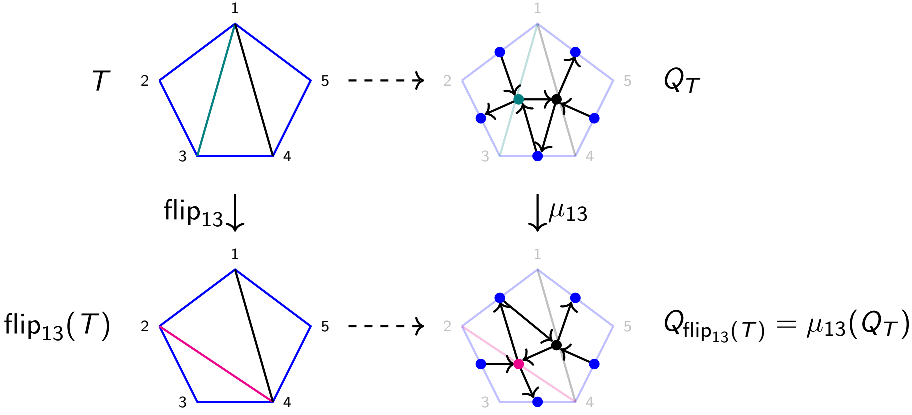
$$p_{24} = \frac{p_{12}p_{34} + p_{14}p_{23}}{p_{13}}$$

Flip de triangulación y mutación



$$p_{24} = \frac{p_{12}p_{34} + p_{14}p_{23}}{p_{13}} \dashrightarrow \frac{x_{12}x_{34} + x_{14}x_{23}}{x_{13}} = x'_{13}$$

Flip de triangulación y mutación



$$p_{24} = \frac{p_{12}p_{34} + p_{14}p_{23}}{p_{13}} \dashrightarrow \frac{x_{12}x_{34} + x_{14}x_{23}}{x_{13}} = x'_{13}$$

Entonces, $\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_{Q_T}$.

Fenómeno de Laurent (Fomin–Zelevinsky 2001)

Todas las variables de conglomerado con polinomios de Laurent en las variables de conglomerado de la semilla inicial con coeficientes enteros. Más precisamente, están contenidos en $\mathbb{Z}[x_1^{\pm}, \ldots, x_n^{\pm}, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}]$.

Conjectura de Positividad (Fomin–Zelevinsky 2001)

Todas las variables de conglomerado están contenidos en $\mathbb{N}[x_1^{\pm}, \ldots, x_n^{\pm}, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}]$.

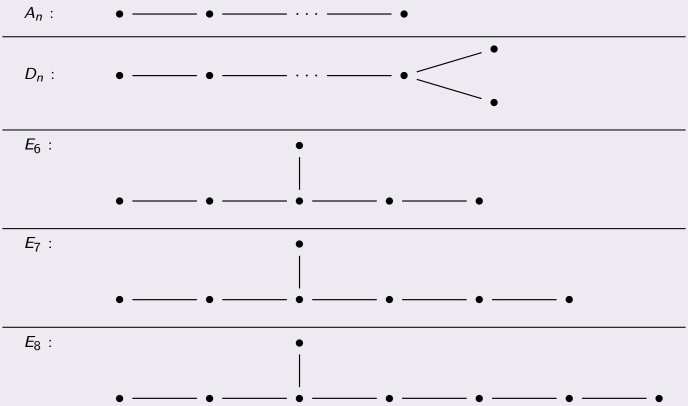
Teorema de Positividad (Gross–Hacking–Keel–Kontsevich 2014)

La conjetura de positividad es verdadera.

Gross–Hacking–Keel–Kontsevich ven las álgebras de conglomerado como anillos de funciones en variedades log Calabi–Yau (*variedades de conglomerado*) y usan herramientas de la geometría biracional y la simetría especular (mirror symmetry).

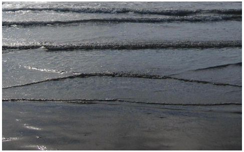
Clasificación de tipo finito (Fomin–Zelevinsky 2003)

El álgebra de conglomerado $\mathcal{A}_Q$ es de *tipo finito* (el conjunto de semillas es finito) si y solo si (la parte mutable de) Q es equivalente bajo mutación a una orientación de un diagrama de Dynkin de tipo ADE:



Ejemplos de estructuras de conglomerado

1. Los triples de Markov
   - son triples de enteros (a, b, c) que satisfacen $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$,
   - sea $Q =$ $$\begin{tikzcd}[column sep=small] & 2 \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & \\ 1 \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & & 3 \arrow[ll, shift left] \arrow[ll, shift right] \end{tikzcd}$$ y $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$,
   - $(\mathbf{x}', Q) \sim (\mathbf{x}, Q)$ entonces $\mathbf{x}' = (x_1', x_2', x_3')$ es un triple de Markov.
2. Ondas solitarias
   - son ondas en agua de poca profundidad que viajan preservando su forma y su energía
   - soluciones de la ecuación de Kadomtsev y Petviashvili (KP): $(-4u_t + u_{xxx} + 6uu_x)_x + 3u_{yy} = 0$



©M.J.Ablowitz, Nuevo Vallarta, Nayarit, México, https://sites.google.com/site/ablowitz

   - definen semillas en un álgebra de conglomerado
3. ...

Curso "Álgebras de Conglomerado" semestre 2022-1

Lara Bossinger

Mayo 2021

1 Resumen

Las álgebras de conglomerado son un área joven del álgebra conmutativa. En el año 2001 Sergei Fomin y Andrei Zelevinsky las descubrieron en la teoría de representaciones, los grupos cuánticos y la teoría de positividad total. Aunque su origen es algebraico y combinatorio, las álgebras de conglomerado hoy en día se encuentran en varios áreas de las matemáticas y la física. Por ejemplo, en triangulaciones de superficies, en singularidades, en nudos y grupos de trenzas, teoría de números, producen degeneraciones tóricas, en la geometría tropical, en ecuaciones diferenciales como la ecuación de Kadomtsev–Petviashvili, en la teoría de Teichmüller y la teoría de Gröbner, entre muchas otras. Es un área joven y expansiva de las matemáticas. Conociendo las álgebras de conglomerado uno llega muy pronto a la frontera del conocimiento y a preguntas abiertas que ofrecen una entrada a la investigación.

En la primera parte del curso vamos a ver las definiciones básicas y las propiedades de las álgebras de conglomerado. Por ejemplo, vamos a elaborar la clasificación de los álgebras de conglomerado de *tipo finito* y el *fenómeno de Laurent* (más detalles en §2). En la segunda parte nos dedicaremos a algunas aplicaciones de las álgebras de conglomerado, por ejemplo su conexión a las Grassmannianas, a la combinatoria de triangulaciones del n-ágono y como uno puede construir valuaciones y degeneraciones tóricas usando álgebras de conglomerado.

Requisitos: Álgebra moderna (necesario) y álgebra conmutativa (recomendable).

2 Definiciones básicas

Más precisamente, un álgebra de conglomerado es un anillo conmutativo que se define de manera recursiva: dado un conjunto de variables algebraicamente independientes, llamado una *semilla*, hay un proceso que construye otra semilla reemplazando un elemento del conjunto por un elemento nuevo. Este proceso se llama la *mutación* y esta controlado por información combinatoria, como un carcaj (una gráfica dirigida) o una matriz antisimétrica.

Definición 1: Una *semilla* consiste de un carcaj Q con vértices $1, \dots, n$ y sin ciclos orientadas de longitud 1 ó 2; y un conjunto de variables $\{x_1, \dots, x_n\}$. Para un vértice k la *mutación en la dirección* k es un nuevo carcaj $\mu_k(Q)$ y un nuevo conjunto de elementos algebraicamente independientes $\{x_1, \dots, x_n\} \setminus \{x_k\} \cup \{x'_k\}$. El carcaj $\mu_k(Q)$ se obtiene de Q en tres pasos:

(i) para todas las composiciones de aristas $i \to k \to j$ se agrega una arista $i \to j$;
(ii) se cambia la orientación de todos las aristas adyacentes a k;
(iii) se elimina un conjunto maximal de 2-ciclos.

La variable x'_k es un binomio de Laurent, definimos

$$x'_k := \frac{1}{x_k}\left(\prod_{ik} x_i + \prod_{k\to j} x_j\right).$$

No es difícil ver que la mutación es una involución, es decir μ_k^2 es la identidad.

Ejemplo 1: Sea $Q = 1 \to 2$ con variables iniciales $\{x_1, x_2\}$. Entonces la mutación en dirección 1 es $\mu_1(Q) = 1 \leftarrow 2$ con variables $\{\frac{x_2+1}{x_1}, x_2\}$.

Definición 2: El *álgebra de conglomerado* es una subálgebra del campo de funciones racionales en las variables iniciales $\mathcal{F} := \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$. Más precisamente, para la semilla inicial $s = (Q, \{x_1, \dots, x_n\})$ el álgebra de conglomerado $\mathcal{A}_s$ es generado de la unión de todos los conjuntos de variables $\{x'_1, \dots, x'_k\}$ que son parte de una semilla s' tal que existe una sucesión de mutaciones de s a s'.

Ejemplo 2: Continuamos con el ejemplo anterior y fijamos $s = (1 \to 2, \{x_1, x_2\})$ para la semilla inicial. Es un primer ejercicio verificar la secuencia de mutaciones:

$$\begin{tikzcd}
 & x_1 \to x_2 \arrow[dl, "\mu_1"'] \arrow[dr, dash, "\sim"] & \\
\frac{1+x_2}{x_1} \leftarrow x_2 \arrow[d, "\mu_2"'] & & x_2 \leftarrow x_1 \arrow[d, "\mu_1"] \\
\frac{1+x_2}{x_1} \to \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \arrow[dr, "\mu_1"'] & & \frac{1+x_1}{x_2} \to x_1 \\
 & \frac{1+x_1}{x_2} \leftarrow \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \arrow[ur, "\mu_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Como el conjunto de variables $\{x_2, x_1\}$ es igual al conjunto inicial $\{x_1, x_2\}$ podemos concluir que el álgebra de conglomerado es

$$\mathcal{A}_{(1\to 2,\{x_1,x_2\})} = \left\langle x_1, x_2, \frac{1+x_2}{x_1}, \frac{1+x_1}{x_2}, \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \right\rangle \subset \mathbb{Q}(x_1, x_2).$$

Surgen algunas preguntas que vamos a responder en el curso: Las variables x'_k en el ejemplo son polinomios de Laurent en $x_1, \dots, x_n$ con coeficientes en $\mathbb{Z}$, se llama el *fenómeno de Laurent*. ¿Siempre es así? Después de un número finito de mutaciones (en el ejemplo son 5) regresamos a la semilla inicial, en este caso $\mathcal{A}$ es de *tipo finito*. ¿Cuándo pasa esto?

3 Bibliografia

FWZ Sergei Fomin, Lauren Williams y Andrei Zelevinsky. *Introduction to cluster algebras*, §1-3 en `https://arxiv.org/pdf/1608.05735.pdf`, §4-5 en `https://arxiv.org/pdf/1707.07190.pdf` y §6 en `https://arxiv.org/pdf/2008.09189.pdf`

M Robert J. Marsh. *Lecture notes on clustre algebras*, EMS Zurich Lectures in Advanced Mathematics Volume: 19; 2014; 122 pp; ISBN: 978-3-03719-130-9

References

FZ02 Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras. I. Foundations. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(2):497–529, 2002.

FZ03 Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras. II. Finite type classification. *Invent. Math.* 154 (2003), no. 1, 63–121.

BFZ05 Arkady Berenstein, Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras. III. Upper bounds and double Bruhat cells. Duke Math. J. 126 (2005), no. 1, 1–52.

FZ07 Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras. IV. Coefficients. *Compos. Math.* 143, no. 1, 112–164 (2007)

FG07 Vladimir V. Fock and Alexander Goncharov. Dual Teichmüller and lamination spaces. Handbook of Teichmüller theory. Vol. I, 647–684, *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, 11, Eur. Math. Soc., Zürich, (2007)

GHKK Mark Gross, Paul Hacking, Sean Keel, and Maxim Kontsevich. Canonical bases for cluster algebras. *J. Amer. Math. Soc.*, 31(2):497–608 (2018)

Pen87 Robert C. Penner. The decorated Teichmüller space of punctured surfaces. *Comm. Math. Phys.* Volume 113, Number 2 (1987), 299-339.

Sco06 Joshua S. Scott. Grassmannians and cluster algebras. *Proc. London Math. Soc.* (3) 92 (2006), no. 2, 345–380.

LS19 Kyungyong Lee and Ralf Schiffler. Cluster algebras and Jones polynomials. *Selecta Math. (N.S.)* 25 4 Paper No. 58, 41 (2019)