

Cuerpos de Newton–Okounkov desde solitones de la ecuación de KP

Lara Bossinger



Universidad Nacional Autónoma de México, IM-Oaxaca

Encuentro conjunto de la SMM y la RSME 2021

Sesión “*Poliedros de Newton y métodos tropicales en ecuaciones diferenciales*”

Ecuación de KP

La *ecuación de Kadomtsev y Petviashvili (KP)* es una ecuación diferencial parcial para describir el movimiento de onda no lineal. Para $u = u(x, y, t)$

$$(-4u_t + u_{xxx} + 6uu_x)_x + 3u_{yy} = 0$$

Generaliza la ecuación Korteweg-de Vries (KdV) que es unidimensional (para $u = u(x, t)$ es $u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0$).

Una clase de soluciones muy curiosa es la de *ondas solitarias*. Son ondas que viajan preservando su forma y su energía.

Ondas solitarias en agua de poca profundidad



De Mark J. Ablowitz en Nuevo Vallarta, Nayarit, México,
<https://sites.google.com/site/ablowitz/line-solitons>

El cuento dice que fueron observados por primera vez de John Scott Russel en un canal de agua de poca profundidad en 1834 en Escocia y los describió en [Rus].

Soluciones de ondas solitarias

Un *dato de un solitón* es una matriz $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ y $\kappa_1 < \kappa_2 < \dots < \kappa_n$ en \mathbb{R} . La *función* τ asociada es

$$\tau_A(x, y, t) = \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \Delta_I(A) \prod_{j < k} (\kappa_{ij} - \kappa_{ik}) e^{\Theta_I(x, y, t)},$$

con $\Delta_I(A)$ la determinante de la submatriz de A con columnas en I y $\Theta_I(x, y, t) = \sum_{i \in I} \kappa_i x + \kappa_i^2 y + \kappa_i^3 t$. Cada dato de un solitón da una *solución de solitón* que es la función

$$u(x, y, t) = 2\partial_x^2 \ln(\tau_A).$$

La solución es *regualr* si $\Delta_I(A) \geq 0$ para cada $I \in \binom{[n]}{k}$. En este caso A corresponde a un elemento en la Grassmanniana totalmente no negativa.

La gráfica de un solitón

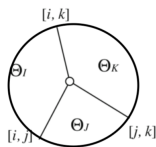
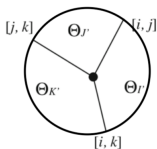
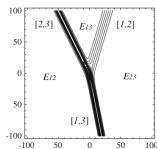
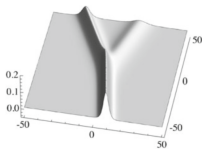
Substituimos $x \rightarrow \frac{x}{\epsilon}$, $y \rightarrow \frac{y}{\epsilon}$ y $t \rightarrow \frac{t}{\epsilon}$ para un $\epsilon > 0$ muy pequeño. El *limite tropical* es

$$f_A(x, y, t) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon \ln(\tau_A)) = \max_{I \in \binom{[n]}{k}} (\Theta_I(x, y, t)).$$

Las *líneas de nivel* del solitón son capturadas en el conjunto

$$\mathcal{C}_t(A) = \{\text{locos en el plano de } xy \text{ donde } f_A \text{ no es lineal}\}.$$

La *gráfica del solitón* es $\mathcal{C}_t(A)$ encajada en un disco, olvidando su estructura métrica pero preservando su estructura topológica.



La Grassmanniana totalmente positiva

Sea $\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ la Grassmanniana de k -espacios en \mathbb{C}^n . Sus elementos se pueden representar como matrices $k \times n$ y los menores Δ_I para $I \in \binom{[n]}{k}$ dan las *coordenadas de Plücker* del encaje

$$\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n) \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{\binom{[n]}{k}-1}.$$

Sea $A_{k,n}$ el anillo de coordenadas homogéneas. Toma $[A] \in \text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ *totalmente positiva* (i.e. $p_I([A]) > 0 \forall I \in \binom{[n]}{k}$) y $A \in [A]$ en RREF. Fijamos $\kappa_1 < \dots < \kappa_n$ y $t \ll 0$.

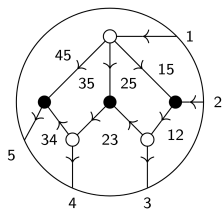
[KW14]&[Pos] Entonces la gráfica del solitón $\mathcal{C}_t(A)$

- 1 es plana, bicolorido and trivalente (\rightsquigarrow *plabic graph* [Pos]),
- 2 tiene $k(n-k) + 1$ caras de los cuales n son no acotadas,
- 3 el conjunto $\{p_I : \Theta_I \text{ es máximo local de } f_A\}$ genera $A_{k,n}$,
- 4 define una carta $\Phi_{\mathcal{C}} : (\mathbb{C}^*)^{k(n-k)+1} \rightarrow \text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ que restringida a $(\mathbb{R}_{>0})^{k(n-k)+1}$ parametriza la Grassmanniana totalmente positiva.

La valuación de flujos

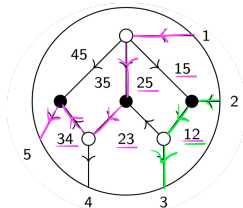
[Pos] Etiqueta las aristas infinitas $1, \dots, n$ en sentido horario y orienta las aristas de $\mathcal{C}_t(A)$ tal que $1, \dots, k$ son fuentes y $k + 1, \dots, n$ pozos.

Por ejemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ da esta gráfica:



[RW19] definen la *valuación de flujos* $\nu_{\mathcal{C}} : A_{k,n} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}^{k(n-k)+1}$ para cada gráfica $\mathcal{C} := \mathcal{C}_t(A)$. Un *flujo* para $I \in \binom{[n]}{k}$ en \mathcal{C} es una colección de k caminos $\{p_i : j_i \rightarrow i\}_{i \in I}$ sin intersecciones y $\nu_{\mathcal{C}}(p_I)$ corresponde al flujo minimal con respecto del número de caras de su lado izquierda.

Por ejemplo, para $I = \{3, 5\}$ el flujo minimal es:
 $\nu_{\mathcal{C}}(p_I) = 2e_{12} + e_{15} + e_{25} + e_{23} + e_{34} \in \mathbb{Z}^7$.



Cuerpos de Newton–Okounkov

Nota que $A_{k,n}$ es $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -graduada. Definimos el *cuerpo de Newton–Okounkov*

$$\Delta(A_{k,n}, \nu_{\mathcal{C}}) := \overline{\operatorname{conv} \left(\bigcup_{d \geq 0} \frac{\nu_{\mathcal{C}}(f)}{d} : f \in A, \deg(f) = d \right)} \subset \mathbb{R}^{k(n-k)+1}$$

[KK12]&[LM09]: $\Delta(A_{k,n}, \nu_{\mathcal{C}})$ es convexo (no necesariamente politopal ni acotado) y su volumen es el grado de $\operatorname{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$.

[And13]&[RW19]: $\Delta(A_{k,n}, \nu_{\mathcal{C}})$ es un politopo, y entonces define una degeneración tórica de $\operatorname{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ a la variedad tórica $X_{\Delta}(A, \nu_{\mathcal{C}})$.

Theorem (B.20)

$\Delta(A_{k,n}, \nu_{\mathcal{C}})$ es un politopo integral si y solo si la degeneración viene de un punto en la *Grassmanniana tropical*.

La Grassmanniana tropical

Sea $J_{k,n} \subset \mathbb{C}[p_I : I \in \binom{[n]}{k}]$ el *ideal de Plücker*, entonces $A_{k,n} \cong \mathbb{C}[p_I]/J_{k,n}$. La *Grassmanniana tropical* es

$$\text{Trop}(J_{k,n}) := \left\{ w \in \mathbb{R}^{\binom{[n]}{k}} : \text{in}_w(J_{k,n}) \not\cong \text{monomios} \right\}.$$

Es un abanico bajo la relación: $v, w \in C^\circ \Leftrightarrow \text{in}_v(J_{k,n}) = \text{in}_w(J_{k,n})$. Un cono maximal $C \in \text{Trop}(J_{k,n})$ es *primo* si $\text{in}_w(J_{k,n})$ es primo $\forall w \in C^\circ$.

[SS04]: Para $k = 2$ cada cono maximal C es primo y da una degeneración tórica de $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ a la variedad tórica $V(\text{in}_C(J_{2,n}))$.

Teorema (B.–Fang–Fourier–Hering–Lanini 18)

Bajo isomorfismo tenemos la biyección

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{degeneraciones tóricas} \\ X_{\Delta(A_{2,n}, \nu_C)} \\ \text{de gráficas de solitón } \mathcal{C} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{degeneraciones tóricas} \\ V(\text{in}_C(J_{2,n})) \text{ de conos} \\ \text{maximales } C \in \text{Trop}(J_{2,n}) \end{array} \right\}$$

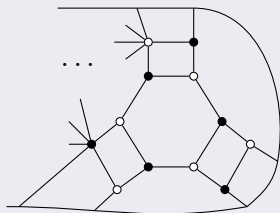
En particular, $\Delta(A_{2,n}, \nu_C)$ es integral para cada C .

Criterio para (no) integralidad

Para $k \neq 2$ hay ejemplos de $\Delta(A_{k,n}, \nu_C)$ que no son integrales (en [RW19] hay uno para $k = 3$ y $n = 6$).

Teorema (B.20)

Si la gráfica del solitón C contiene el patrón



entonces $\Delta(A_{k,n}, \nu_C)$ *no* es integral.

¡Muchas gracias por su atención!



L.B., Ghislain Fourier, Martina Lanini, Xin Fang, Milena Hering, Peter Littelmann
De Tatjana Ruf, Mini-Workshop: PBW Structures in Representation Theory 2016,
Oberwolfach Photo Collection, <https://opc.mfo.de>

- And13 Anderson, Dave. Okounkov bodies and toric degenerations. *Math. Ann.* 356 (2013), no. 3, 1183–1202.
- Bos20 Bossinger, Lara. Full-Rank Valuations and Toric Initial Ideals. *Int. Math. Res. Not.* rnaa071, (2020)
- B+18 Bossinger, Lara; Fang, Xin; Fourier, Ghislain; Hering, Milena; Lanini, Martina. Toric degenerations of $\text{Gr}(2,n)$ and $\text{Gr}(3,6)$ via plabic graphs. *Ann. Comb.* 22 (2018), no. 3, 491–512.
- KK12 Kaveh, Kiumars; Khovanskii, Askold G. Newton-Okounkov bodies, semigroups of integral points, graded algebras and intersection theory. *Ann. of Math.* (2) 176 (2012), no. 2, 925–978.
- Kod17 Kodama, Yuji. KP solitons and the Grassmannians. *Combinatorics and geometry of two-dimensional wave patterns. Springer Briefs in Mathematical Physics*, 22. Springer, Singapore, (2017).
- KW14 Kodama, Yuji; Williams, Lauren. KP solitons and total positivity for the Grassmannian. *Invent. Math.* 198 (2014), no. 3, 637–699.
- LM09 Lazarsfeld, Robert; Mustață, Mircea. Convex bodies associated to linear series. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* (4) 42 (2009), no. 5, 783–835.
- Pos Postnikov, Alexander. Total positivity, Grassmannians, and networks. arXiv:math/0609764 [math.CO] (2006).
- RW19 Rietsch, Konstanze; Williams, Lauren. Newton-Okounkov bodies, cluster duality, and mirror symmetry for Grassmannians. *Duke Math. J.* 168 (2019), no. 18, 3437–3527.
- Rus44 Russell, John S. Report on waves. *Rept. Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science*, pp. 311–390. John Murray, London (1844)
- SS04 Speyer, David; Sturmfels, Bernd. The tropical Grassmannian. *Adv. Geom.* 4 (2004), no. 3, 389–411.