Mapas y puentes:
dos cuentos de gráficas

Lara Bossinger

8 de marzo 2022

Los siete puentes de Königsberg

De Jakob Emanuel Handmann - 2011-12-22 (upload, according to EXIF data), Dominio público, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1001511

En el año 1736 Leonhard Euler estuvo en Königsberg (hoy en día en Rusia).

El río Pregel atraviesa Königsberg y encierra dos islas

Siete puentes conectan las partes norte y sur de Königsberg con las islas.

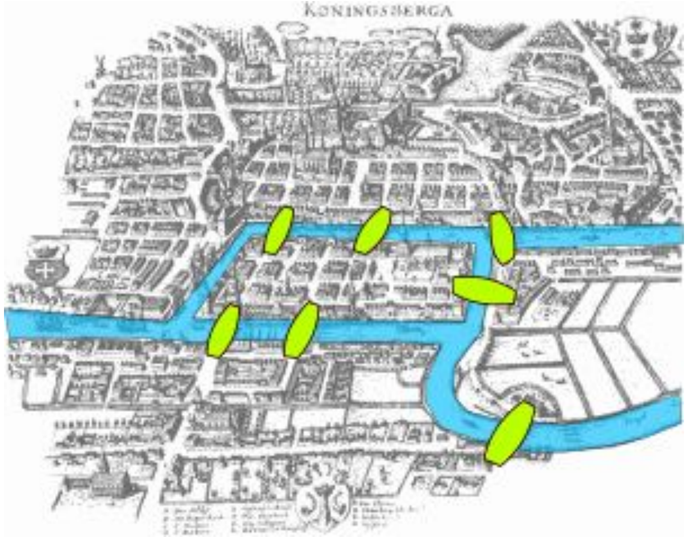
United States Library of Congress Prints and Photographs, digital ID ppmsca.00735.

La pregunta de Leonhard

¿Existe una ruta por Königsberg que pasa exactamente una vez por cada puente?

➔ no se permite llegar a tierra firme más que por un puente,
➔ la única manera de pasar por un puente es cruzar lo.

Cada ruta que cumple lo anterior se llama un *camino de Euler*.



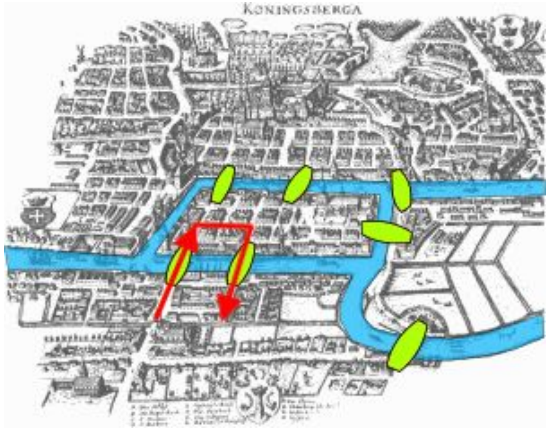
By Bogdan Giuşcă - Public domain (PD),based on the image, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=112920

¿Cómo podemos resolver el problema matemáticamente?

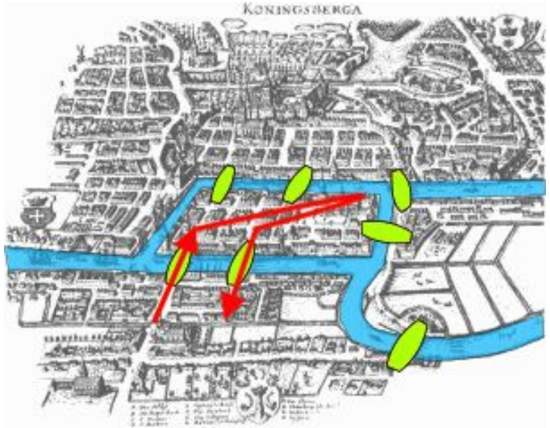
Una observación

Leonhard notó lo siguiente:

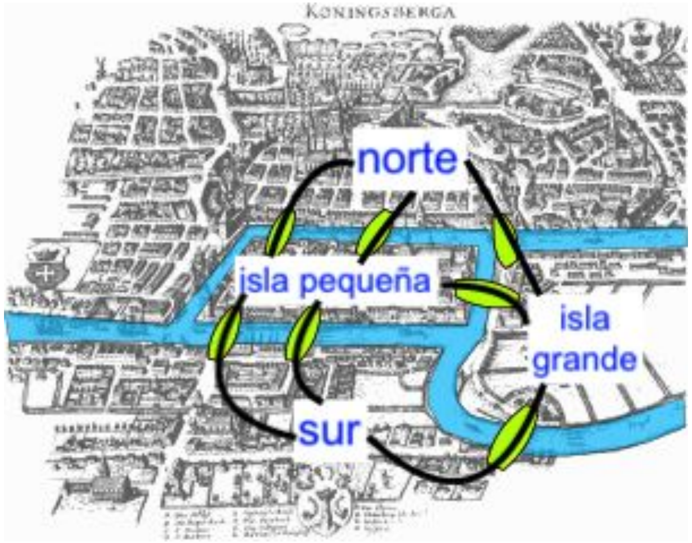
Dada una ruta, si cambiamos los caminos que tomamos en tierra firme no afecta si es una solución o no.

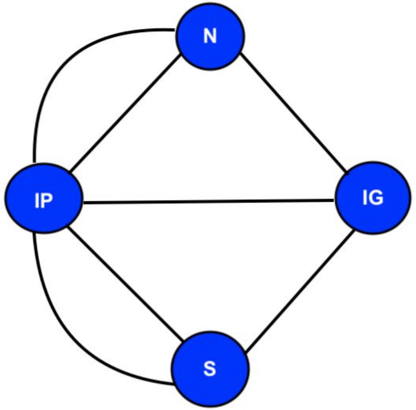


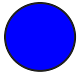
=



Simplificamos el mapa





Las bolas  representan a las cuatro islas, el y norte y el sur de Königsberg.

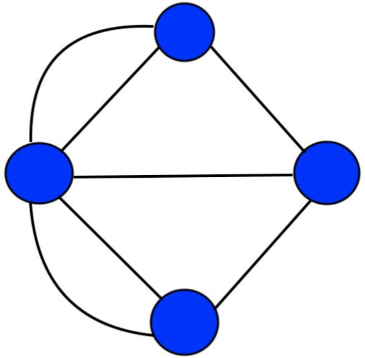
Las líneas representan a los puentes entre ellos.

La (tal vez) primera gráfica del mundo

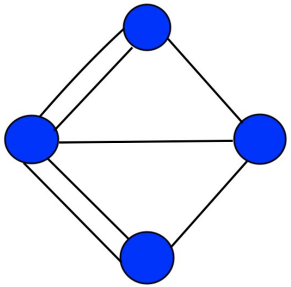
El mapa simplificado fue la primera gráfica (según la leyenda):

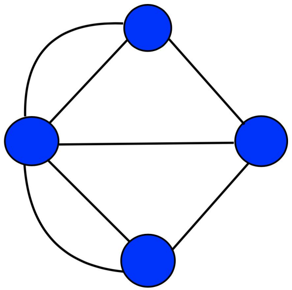
Definición:

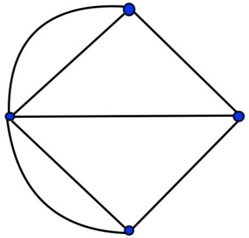
Una *gráfica* es una colección de puntos que se llaman los *vértices* y líneas que los conectan que se llaman las *aristas*.

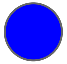


No nos importa si
dibujamos las aristas
rectas
o curvadas 



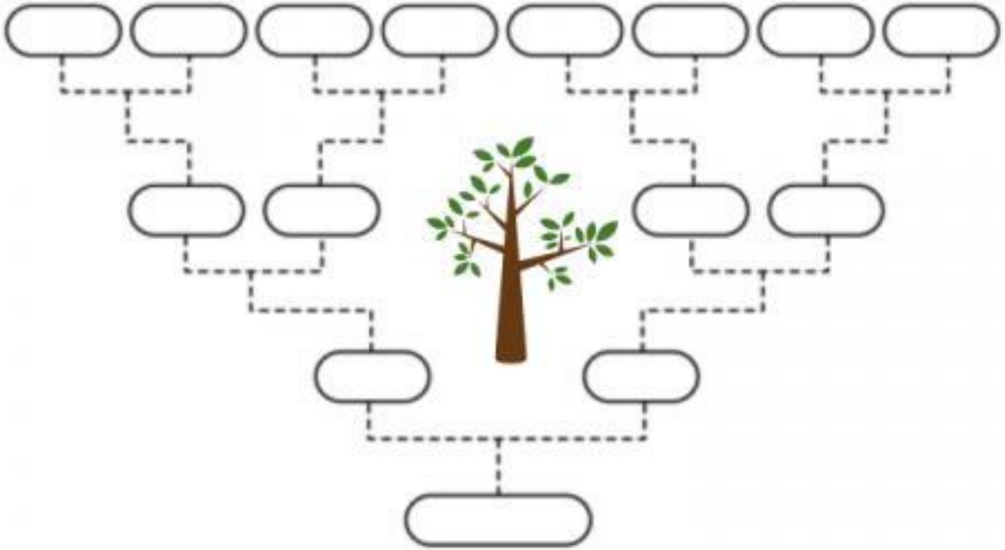




Tampoco si los
vértices son puntos 
o bolas 

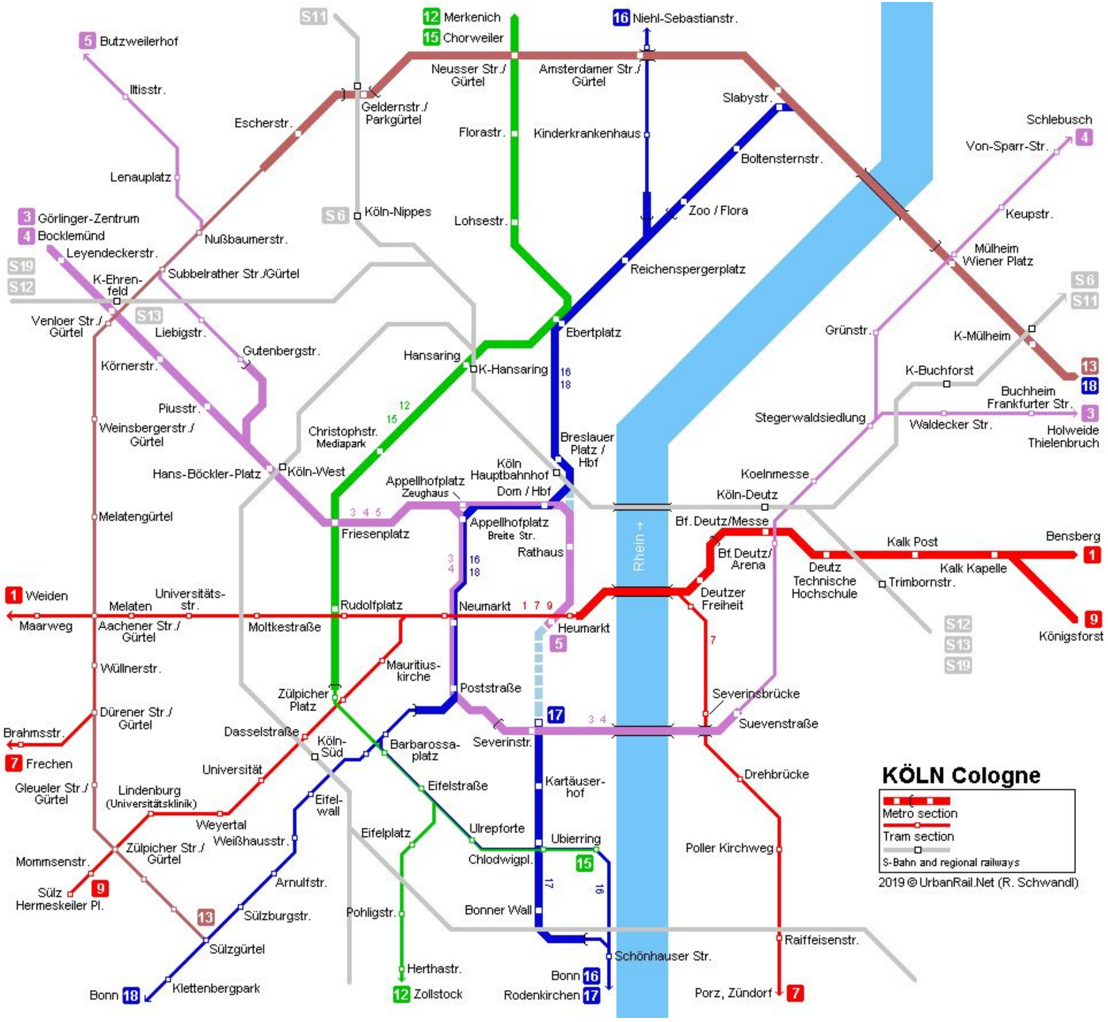
¿Qué más podemos representar con una gráfica?

MI ÁRBOL GENEALÓGICO



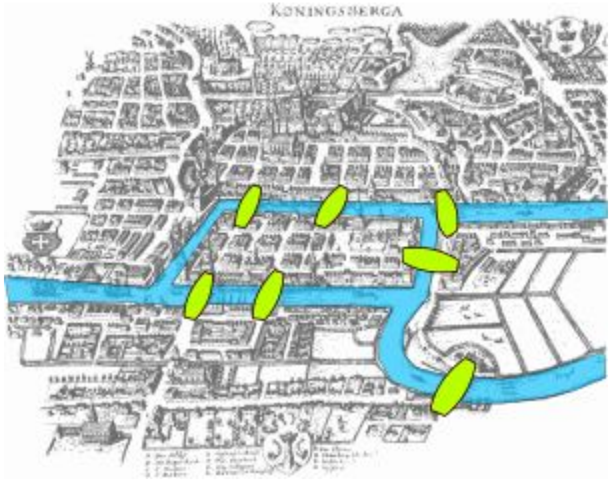
https://www.mundodeportivo.com/uncomo/tecnologia/articulo/como-hacer-un-arbol-genealogico-con-word-26421.html

EL MAPA DEL METRO EN COLONIA



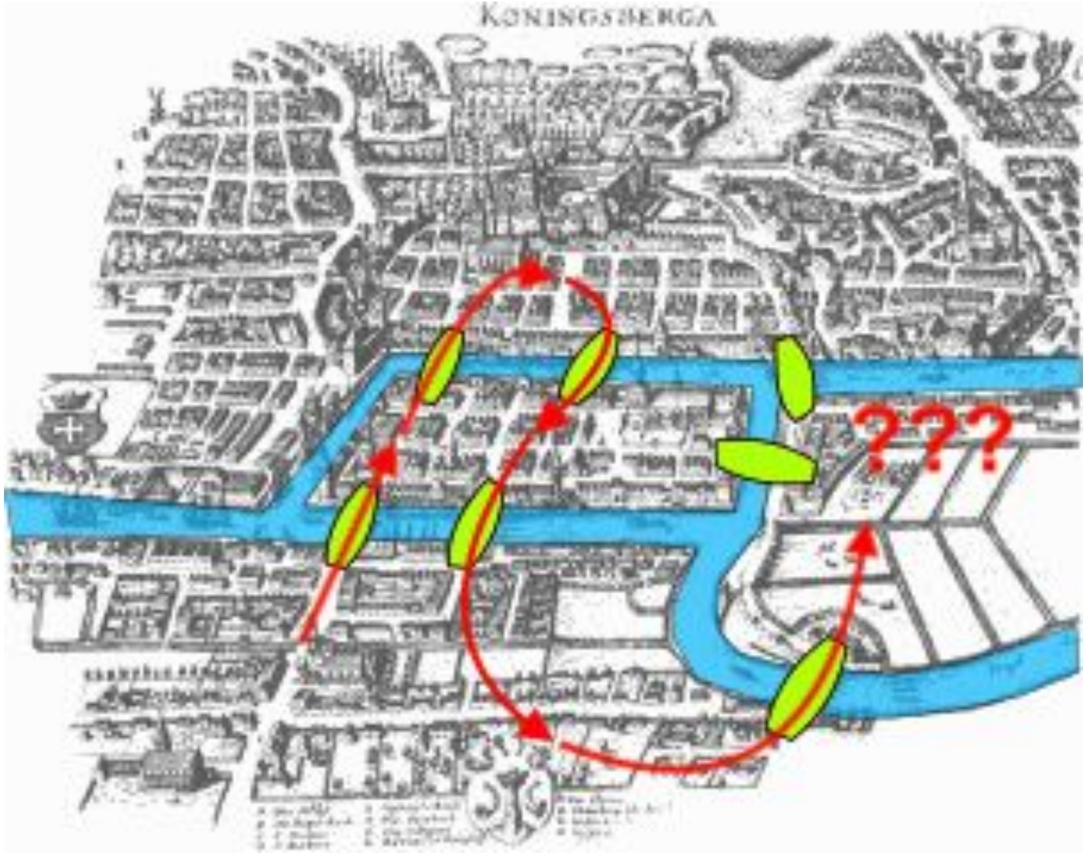
https://www.urbanrail.net/eu/de/k/koeln.htm

¿Sus respuestas?



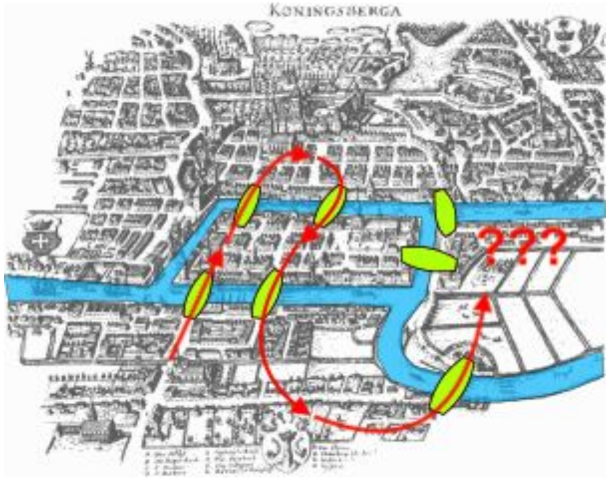
Un intento

¿Cuál es el problema?



Una observación

Salvo el inicio y el fin de nuestra ruta, cada vez que *entramos* a una isla por un puente también hay que *salir* por un puente:



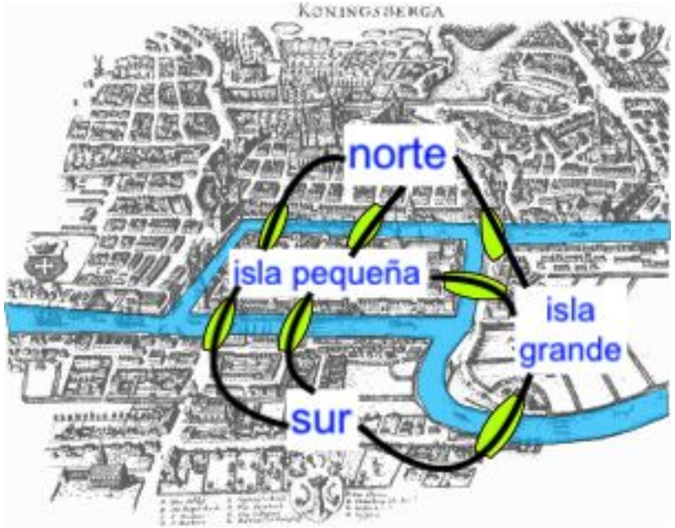
¡Solo el inicio y el fin pueden tener un número impar de puentes!

La conclusión de Leonhard

-> las cuatro islas tienen un número impar de puentes

Conclusión:

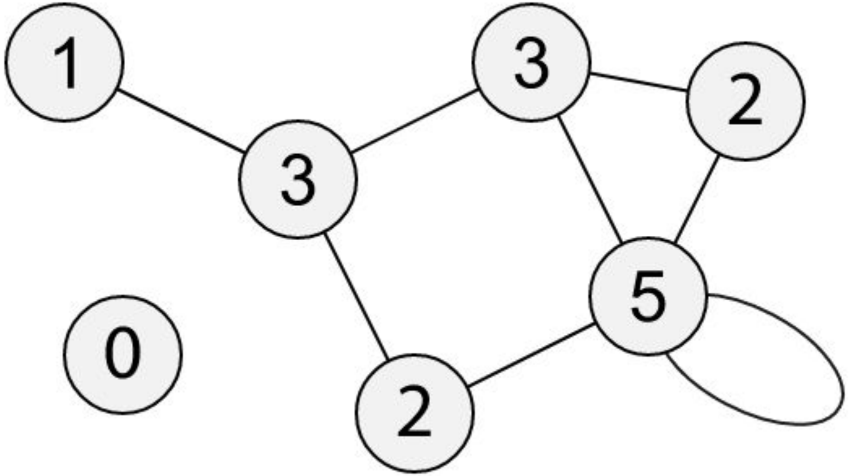
No existe una ruta de Königsberg que atraviesa cada puente exactamente una vez.



El grado de un vértice

Definición

El *grado* de un vértice en una gráfica es el número de aristas colindantes.



La solución de Carl

En el año 1873 (*¡138 años después!*) el matemático Carl Hierholzer probó el siguiente teorema que resolvió todas las dudas de Leonhard:

Teorema de Euler (Carl Hierholzer, 1873)

Una gráfica tiene un *camino de Euler* si y sólo si existen exactamente cero o dos vértices con grado impar.

Ejemplo: Colonia (Alemania)

Pregunta:

¿Existe un camino de Euler para Colonia?

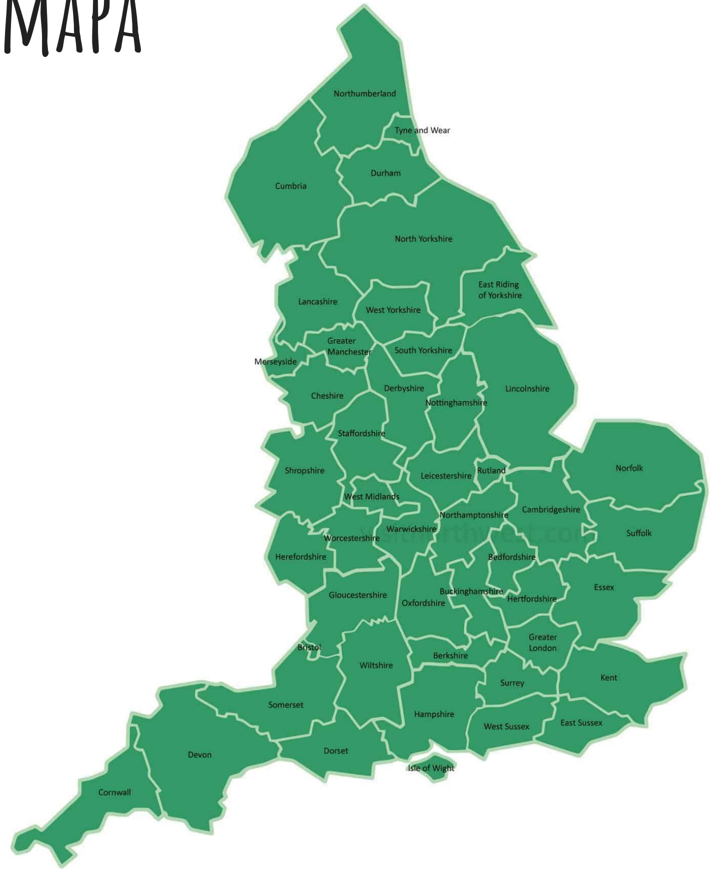
Tipp: ¿Cuál es la gráfica de Colonia?

Los 32 estados de México

El problema de la coloración de un mapa

En el año 1852 los hermanos Francis y Frederick Guthrie estudiaron matemáticas en Inglaterra y un día pensaron en lo siguiente:

Dado un mapa de Inglaterra con todos sus estados, ¿cuántos colores necesitamos para colorear estados colindantes con distintos colores?



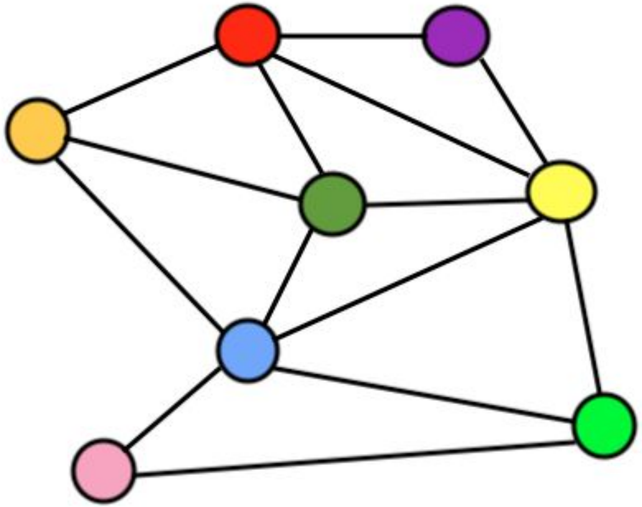
https://www.visitnorthwest.com/counties/

Pregunta:

¿Cuántos colores necesitamos para colorear el mapa de México de tal manera que estados colindantes no tengan el mismo color?

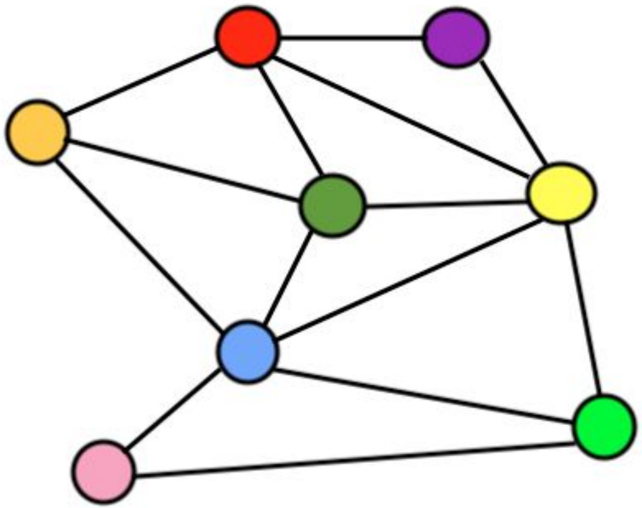
https://www.nicepng.com/maxp/u2r5q8w7i1y3t4a9/

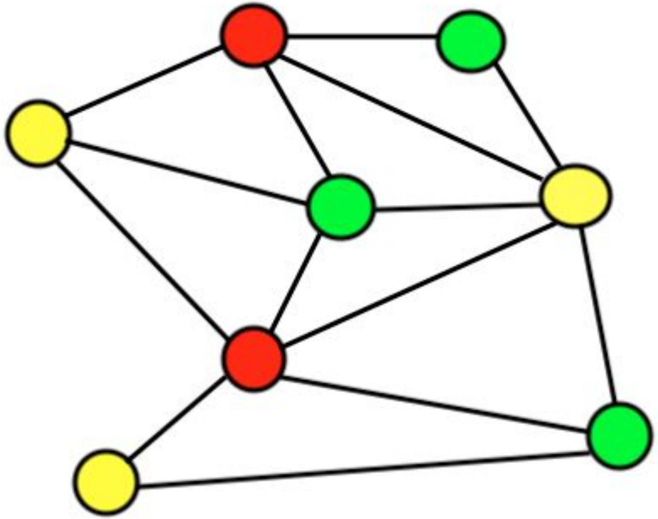
Coloración de gráficas



¿Cuántos colores son necesarios para que todos los vértices que comparten una arista tienen colores distintos?

El número cromático





Para la gráfica de los estados de Oaxaca tres colores son suficiente. Este número se llama el *número cromático* de la gráfica.

¿Cuántos colores necesitamos para los estados de México?


2
1
3


2
1
3
3
1
2


2
1
3
2
3
1
1
2


2
1
3
1
2
3
1
3
1
2


2
1
4
3
1
2
3
1
3
1
2

Una solución

Figura 6.2, González-Moreno
“Introducción a la teoría de gráficas”

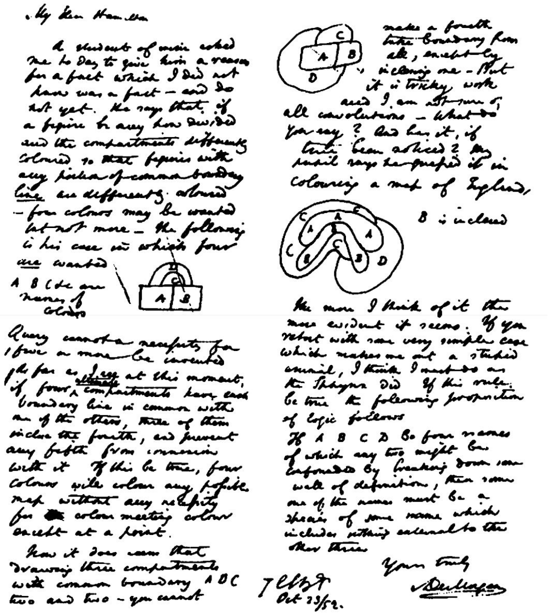
¡Necesitamos al menos cuatro colores!

La conjetura de los cuatro colores

Los hermanos Guthrie encontraron la solución para Inglaterra: *¡se necesitan cuatro colores!* Así llegaron a la conjetura de los cuatro colores:

Conjetura de los cuatro colores

Para colorear cualquier mapa de tal manera que países colindantes tienen colores distintos solo se requieren cuatro colores.


My dear Hamilton

A student of mine asked me to day to give him a reason for a fact which I did not know was a fact — and do not yet. He says that if a figure be any how divided and the compartments differently coloured so that figures with any portion of common boundary line are differently coloured — four colours may be wanted but not more — the following is his case in which four are wanted

A B C D are names of colours

Query cannot a necessity for five or more be invented. As far as I see at this moment, if four ultimate compartments have each boundary line in common with one of the others, three of them inclose the fourth, and prevent any fifth from connexion with it. If this be true, four colours will colour any possible map without any necessity for colour meeting colour except at a point.

Now it does seem that drawing three compartments with common boundary A B C two and two — you cannot make a fourth take boundary from all, except by inclosing one — But it is tricky work and I am not sure of all convolutions — What do you say? And has it, if true been noticed? My pupil says he guessed it in colouring a map of England.

B is inclosed

The more I think of it the more evident it seems. If you retort with some very simple case which makes me out a stupid animal, I think I must do as the Sphynx did. If this rule be true the following proposition of logic follows

If A B C D be four names of which any two might be confounded by breaking down some wall of definition, then some one of the names must be a species of some name which includes nothing external to the other three.

Yours truly
A De Morgan

7 Camden St
Oct 23/52

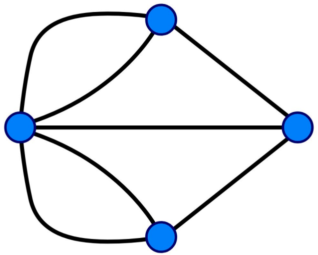
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=19950850

Gráficas planas

Las gráficas asociadas a mapas son gráficas particulares:

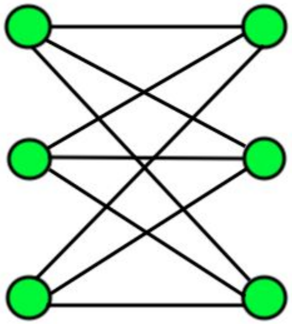
Definición

Una gráfica es *plana* si se puede dibujar de tal manera que ningunas de sus aristas se crucen.



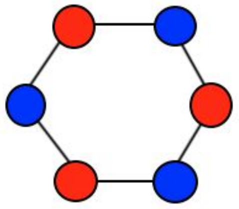
plana

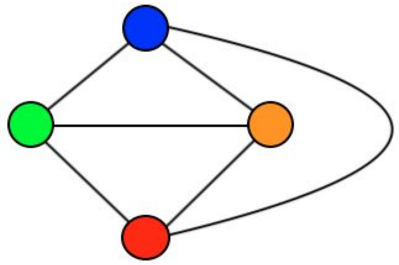
no plana



El teorema de los cuatro colores

El número cromático de una gráfica plana es *menor o igual a cuatro*.

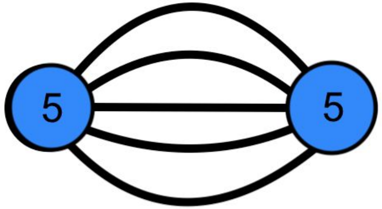




1879 Kempe sugirió una prueba y 1891 Heawood encontró un error
1880 Guthrie Tait lo intentó y 1892 Peterson encontró un error
1960s - 1970s Helsch empezó a desarrollar un programa
1976 Appel, Helsch y Koch ofrecieron una prueba computacional y
1981 Schmidt encontró un error en el código
1989 Appel, Helsch y Koch publicaron una versión corregida

¡HASTA HOY NO EXISTE UNA PRUEBA "HUMANA"!

La gráfica de Colonia y sus puentes



Tenemos dos vértices con grado impar. Entonces, según el teorema de Carl si existe un camino de Euler.

Sus respuestas:
¿Qué más podemos representa en una gráfica?

¡Muchas gracias por su atención!

Aprovechando su atención:

¿Sabías que hoy es el día internacional de la mujer?

Por razones históricas todavía hay menos mujeres matemáticas que hombres, pero

LAS MATEMÁTICAS SON PARA TODAS Y TODOS

Seguimos y seguiremos luchando para las mujeres matemáticas del futuro.

Las matemáticas nos unen:

¡Sigan sus sueños y hagan lo que aman!