

# Familias de degeneraciones de Gröbner

L. Bossinger y A. Nájera Chávez

Universidad Nacional Autónoma de México, Oaxaca



Congreso nacional de la SMM 2020

## ① Motivación

# Resumen

- 1 Motivación
- 2 Teoría de Gröbner

# Resumen

- 1 Motivación
- 2 Teoría de Gröbner
- 3 Teorema principal

# Resumen

- ① Motivación
- ② Teoría de Gröbner
- ③ Teorema principal
- ④ Aplicación: coeficientes universales para álgebras de conglomerado

# Motivación

Entender la relación entre diferentes degeneraciones tóricas de una variedad proyectiva.

# Motivación

Entender la relación entre diferentes degeneraciones tóricas de una variedad proyectiva.

*Eslogan: En simetría especular, conocer todas las degeneraciones tóricas de una variedad es equivalente a conocer la variedad espejo.*

# Motivación

Entender la relación entre diferentes degeneraciones tóricas de una variedad proyectiva.

*Eslogan: En simetría especular, conocer todas las degeneraciones tóricas de una variedad es equivalente a conocer la variedad espejo.*

Hoy: Estudiar simultáneamente las degeneraciones tóricas de Gröbner de una variedad proyectiva polarizada.

## Ideales iniciales

Sea  $f = \sum c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$

## Ideales iniciales

Sea  $f = \sum c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  con  $c_\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  y  $\mathbf{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ .

## Ideales iniciales

Sea  $f = \sum c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  con  $c_\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  y  $\mathbf{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ .

Dado  $w \in \mathbb{R}^n$  definimos su *forma inicial con respecto a  $w$*  como

## Ideales iniciales

Sea  $f = \sum c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  con  $c_\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  y  $\mathbf{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ .

Dado  $w \in \mathbb{R}^n$  definimos su *forma inicial con respecto a  $w$*  como

$$\text{in}_w(f) := \sum_{w \cdot \beta = \min_{c_\alpha \neq 0} \{w \cdot \alpha\}} c_\beta \mathbf{x}^\beta.$$

## Ideales iniciales

Sea  $f = \sum c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  con  $c_\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  y  $\mathbf{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ .

Dado  $w \in \mathbb{R}^n$  definimos su *forma inicial con respecto a  $w$*  como

$$\text{in}_w(f) := \sum_{w \cdot \beta = \min_{c_\alpha \neq 0} \{w \cdot \alpha\}} c_\beta \mathbf{x}^\beta.$$

Para un ideal  $J \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  definimos su *ideal inicial con respecto a  $w$*  como  $\text{in}_w(J) := \langle \text{in}_w(f) : f \in J \rangle$ .

## Ideales iniciales

Sea  $f = \sum c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  con  $c_\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  y  $\mathbf{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ .

Dado  $w \in \mathbb{R}^n$  definimos su *forma inicial con respecto a  $w$*  como

$$\text{in}_w(f) := \sum_{w \cdot \beta = \min_{c_\alpha \neq 0} \{w \cdot \alpha\}} c_\beta \mathbf{x}^\beta.$$

Para un ideal  $J \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  definimos su *ideal inicial con respecto a  $w$*  como  $\text{in}_w(J) := \langle \text{in}_w(f) : f \in J \rangle$ .

### Ejemplo

Para  $f = x_1 x_2^2 + x_1^2 + x_2 \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$

## Ideales iniciales

Sea  $f = \sum c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  con  $c_\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  y  $\mathbf{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ .

Dado  $w \in \mathbb{R}^n$  definimos su *forma inicial con respecto a  $w$*  como

$$\text{in}_w(f) := \sum_{w \cdot \beta = \min_{c_\alpha \neq 0} \{w \cdot \alpha\}} c_\beta \mathbf{x}^\beta.$$

Para un ideal  $J \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  definimos su *ideal inicial con respecto a  $w$*  como  $\text{in}_w(J) := \langle \text{in}_w(f) : f \in J \rangle$ .

### Ejemplo

Para  $f = x_1 x_2^2 + x_1^2 + x_2 \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$  y  $w = (1, 0)$  se tiene

## Ideales iniciales

Sea  $f = \sum c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  con  $c_\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  y  $\mathbf{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ .

Dado  $w \in \mathbb{R}^n$  definimos su *forma inicial con respecto a  $w$*  como

$$\text{in}_w(f) := \sum_{w \cdot \beta = \min_{c_\alpha \neq 0} \{w \cdot \alpha\}} c_\beta \mathbf{x}^\beta.$$

Para un ideal  $J \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  definimos su *ideal inicial con respecto a  $w$*  como  $\text{in}_w(J) := \langle \text{in}_w(f) : f \in J \rangle$ .

### Ejemplo

Para  $f = x_1 x_2^2 + x_1^2 + x_2 \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$  y  $w = (1, 0)$  se tiene

$$\text{in}_w(f) = x_2.$$

# El abanico y las degeneraciones de Gröbner

## Definición

Dado un ideal homogéneo  $J \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  su *ábanico de Gröbner*  $GF(J)$  es  $\mathbb{R}^n$  con la estructura de abanico dada por

# El abanico y las degeneraciones de Gröbner

## Definición

Dado un ideal homogéneo  $J \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  su *ábanico de Gröbner*  $GF(J)$  es  $\mathbb{R}^n$  con la estructura de abanico dada por

$$v, w \in C^\circ \Leftrightarrow in_v(J) = in_w(J).$$

# El abanico y las degeneraciones de Gröbner

## Definición

Dado un ideal homogéneo  $J \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  su *ábanico de Gröbner*  $GF(J)$  es  $\mathbb{R}^n$  con la estructura de abanico dada por

$$v, w \in C^\circ \Leftrightarrow in_v(J) = in_w(J).$$

Notación:  $in_C(J) := in_w(J)$  dónde  $w \in C^\circ$ .

# El abanico y las degeneraciones de Gröbner

## Definición

Dado un ideal homogéneo  $J \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  su *ábanico de Gröbner*  $GF(J)$  es  $\mathbb{R}^n$  con la estructura de abanico dada por

$$v, w \in C^\circ \Leftrightarrow in_v(J) = in_w(J).$$

Notación:  $in_C(J) := in_w(J)$  dónde  $w \in C^\circ$ .

Cada cono abierto  $C^\circ \in GF(J)$  define una *degeneración de Gröbner*

# El abanico y las degeneraciones de Gröbner

## Definición

Dado un ideal homogéneo  $J \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  su *abanico de Gröbner*  $GF(J)$  es  $\mathbb{R}^n$  con la estructura de abanico dada por

$$v, w \in C^\circ \Leftrightarrow in_v(J) = in_w(J).$$

Notación:  $in_C(J) := in_w(J)$  dónde  $w \in C^\circ$ .

Cada cono abierto  $C^\circ \in GF(J)$  define una *degeneración de Gröbner*

$$\pi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{A}^1$$

# El abanico y las degeneraciones de Gröbner

## Definición

Dado un ideal homogéneo  $J \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  su *ábanico de Gröbner*  $GF(J)$  es  $\mathbb{R}^n$  con la estructura de abanico dada por

$$v, w \in C^\circ \Leftrightarrow in_v(J) = in_w(J).$$

Notación:  $in_C(J) := in_w(J)$  dónde  $w \in C^\circ$ .

Cada cono abierto  $C^\circ \in GF(J)$  define una *degeneración de Gröbner*

$$\pi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{A}^1$$

dónde  $\pi^{-1}(t) \cong V(J)$  para  $t \neq 0$  y  $\pi^{-1}(0) = V(in_C(J))$ .

## Ejemplo

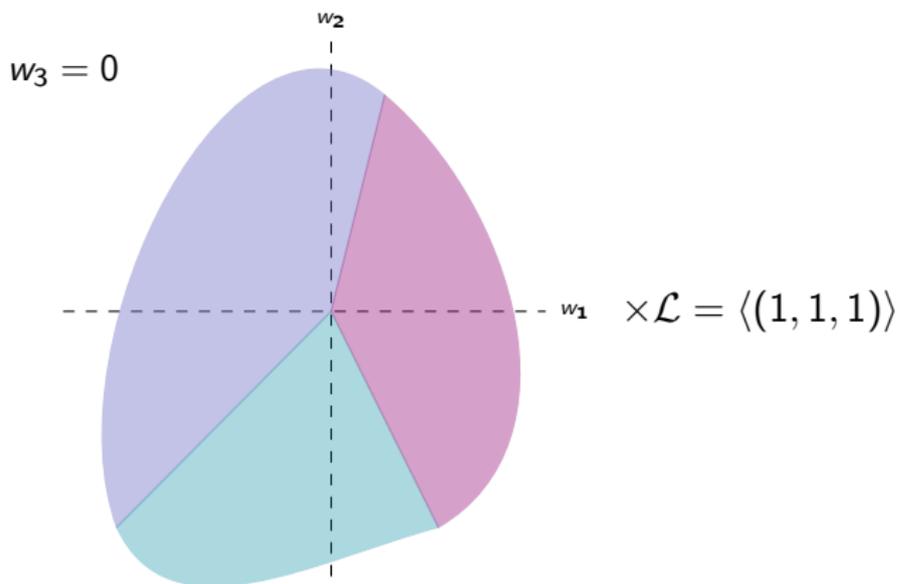
Sea  $J = \langle x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ .

## Ejemplo

Sea  $J = \langle x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ . Entonces  $GF(J)$  es  $\mathbb{R}^3$  con la siguiente estructura de abanico:

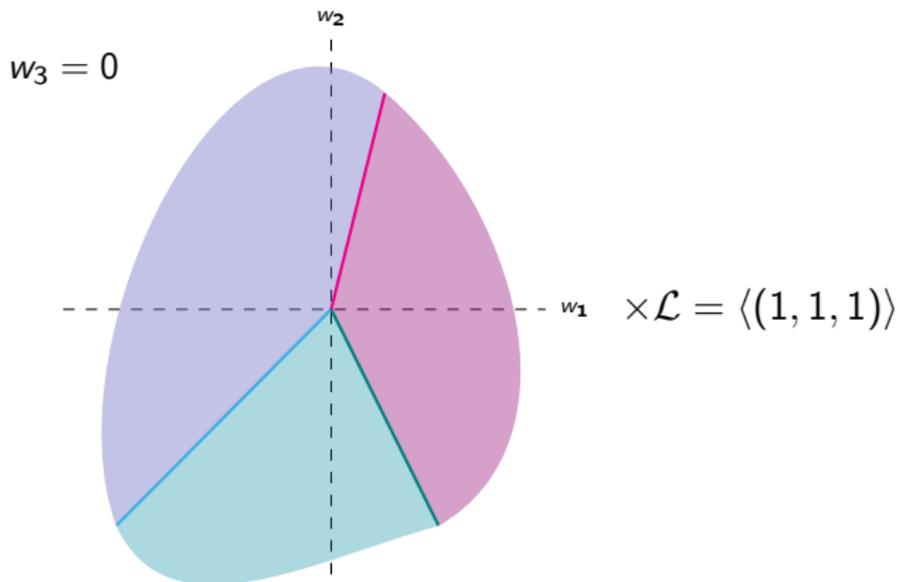
## Ejemplo

Sea  $J = \langle x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ . Entonces  $GF(J)$  es  $\mathbb{R}^3$  con la siguiente estructura de abanico:



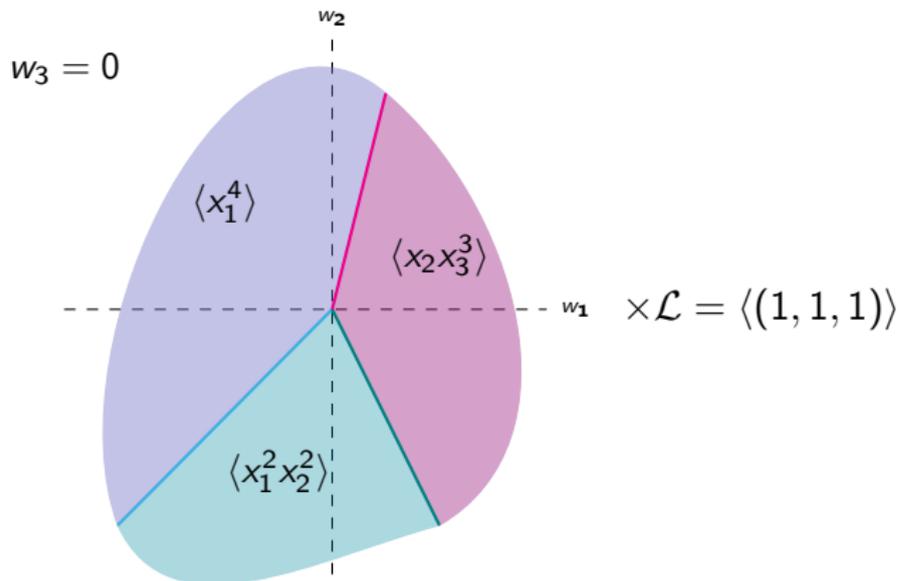
## Ejemplo

Sea  $J = \langle x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ . Entonces  $GF(J)$  es  $\mathbb{R}^3$  con la siguiente estructura de abanico:



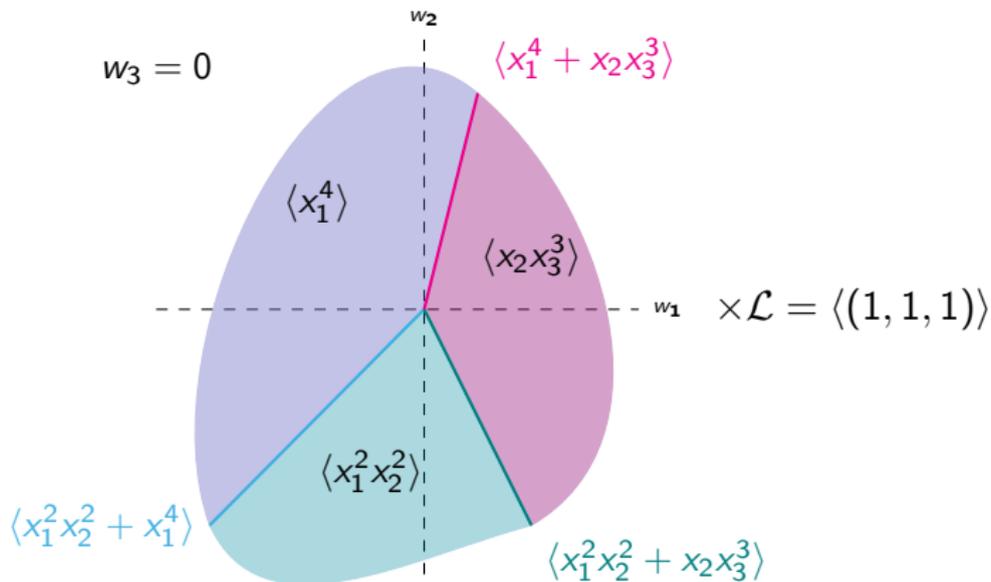
## Ejemplo

Sea  $J = \langle x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ . Entonces  $GF(J)$  es  $\mathbb{R}^3$  con la siguiente estructura de abanico:



## Ejemplo

Sea  $J = \langle x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ . Entonces  $GF(J)$  es  $\mathbb{R}^3$  con la siguiente estructura de abanico:



## Primer teorema

Sea  $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/J$ .

Para un cono  $\tau$  de  $GF(J)$  definimos  $A_\tau := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/\text{in}_\tau(J)$ .

## Primer teorema

Sea  $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/J$ .

Para un cono  $\tau$  de  $GF(J)$  definimos  $A_\tau := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/\text{in}_\tau(J)$ .

Theorem (B.–Mohammadi–N.C.)

## Primer teorema

Sea  $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/J$ .

Para un cono  $\tau$  de  $GF(J)$  definimos  $A_\tau := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/\text{in}_\tau(J)$ .

### Theorem (B.–Mohammadi–N.C.)

*Sea  $C \in GF(J)$  un cono maximal con  $m$  rayos. Entonces existe un  $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_m]$ -módulo libre  $\tilde{A}$*

## Primer teorema

Sea  $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/J$ .

Para un cono  $\tau$  de  $GF(J)$  definimos  $A_\tau := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/\text{in}_\tau(J)$ .

### Theorem (B.–Mohammadi–N.C.)

*Sea  $C \in GF(J)$  un cono maximal con  $m$  rayos. Entonces existe un  $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_m]$ -módulo libre  $\tilde{A}$  que define una familia plana*

$$\pi : \text{Spec}(\tilde{A}) \rightarrow \mathbb{A}^m$$

*con fibra genérica  $\text{Spec}(A)$*

## Primer teorema

Sea  $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/J$ .

Para un cono  $\tau$  de  $GF(J)$  definimos  $A_\tau := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/\text{in}_\tau(J)$ .

### Theorem (B.–Mohammadi–N.C.)

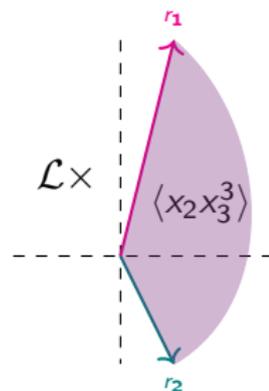
Sea  $C \in GF(J)$  un cono maximal con  $m$  rayos. Entonces existe un  $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_m]$ -módulo libre  $\tilde{A}$  que define una familia plana

$$\pi : \text{Spec}(\tilde{A}) \rightarrow \mathbb{A}^m$$

con fibra genérica  $\text{Spec}(A)$  y para cada cara  $\tau \subseteq C$  existe  $\mathbf{a}_\tau \in \mathbb{A}^m$  y una fibra especial  $\pi^{-1}(\mathbf{a}_\tau) \cong \text{Spec}(A_\tau)$ .

## Ejemplo

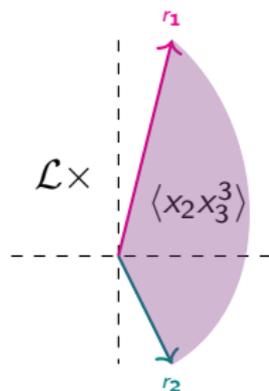
Tomemos  $f = x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$



## Ejemplo

Tomemos  $f = x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$   
y consideremos el cono maximal  $C$  de  $GF(\langle f \rangle)$   
generado por  $\mathcal{L}$  y las columnas de la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

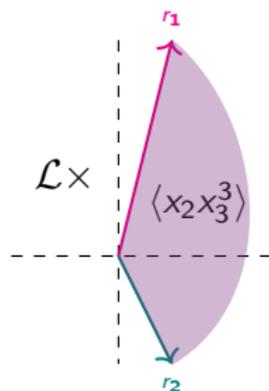
$$\tilde{f}(t_1, t_2) = f(t_1 t_2 x_1, t_1^4 t_2^{-2} x_2, x_3) t_1^{-4} t_2^2$$



## Ejemplo

Tomemos  $f = x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$   
y consideremos el cono maximal  $C$  de  $GF(\langle f \rangle)$   
generado por  $\mathcal{L}$  y las columnas de la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t_1, t_2) &= f(t_1 t_2 x_1, t_1^4 t_2^{-2} x_2, x_3) t_1^{-4} t_2^2 \\ &= t_1^6 x_1^2 x_2^2 + t_2^6 x_1^4 + x_2 x_3^3\end{aligned}$$



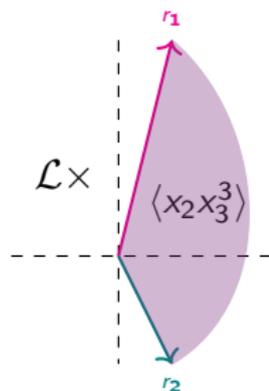
## Ejemplo

Tomemos  $f = x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$   
y consideremos el cono maximal  $C$  de  $GF(\langle f \rangle)$   
generado por  $\mathcal{L}$  y las columnas de la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t_1, t_2) &= f(t_1 t_2 x_1, t_1^4 t_2^{-2} x_2, x_3) t_1^{-4} t_2^2 \\ &= t_1^6 x_1^2 x_2^2 + t_2^6 x_1^4 + x_2 x_3^3\end{aligned}$$

Entonces,  $\tilde{A} = \mathbb{C}[t_1, t_2][x_1, x_2, x_3]/\langle \tilde{f} \rangle$  y

- $\tilde{f}(0, 0) = x_2 x_3^3 = \text{in}_C(f)$ ,



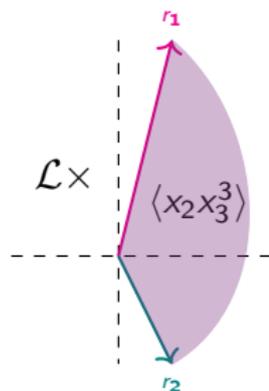
## Ejemplo

Tomemos  $f = x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$   
y consideremos el cono maximal  $C$  de  $GF(\langle f \rangle)$   
generado por  $\mathcal{L}$  y las columnas de la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t_1, t_2) &= f(t_1 t_2 x_1, t_1^4 t_2^{-2} x_2, x_3) t_1^{-4} t_2^2 \\ &= t_1^6 x_1^2 x_2^2 + t_2^6 x_1^4 + x_2 x_3^3\end{aligned}$$

Entonces,  $\tilde{A} = \mathbb{C}[t_1, t_2][x_1, x_2, x_3]/\langle \tilde{f} \rangle$  y

- $\tilde{f}(0, 0) = x_2 x_3^3 = \text{in}_C(f)$ ,
- $\tilde{f}(0, 1) = x_1^4 + x_2 x_3^3 = \text{in}_{r_1}(f)$ ,



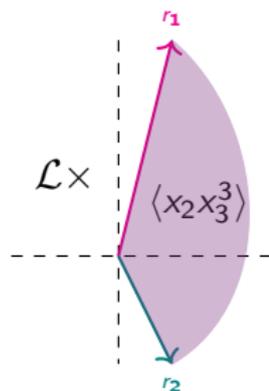
## Ejemplo

Tomemos  $f = x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$   
y consideremos el cono maximal  $C$  de  $GF(\langle f \rangle)$   
generado por  $\mathcal{L}$  y las columnas de la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t_1, t_2) &= f(t_1 t_2 x_1, t_1^4 t_2^{-2} x_2, x_3) t_1^{-4} t_2^2 \\ &= t_1^6 x_1^2 x_2^2 + t_2^6 x_1^4 + x_2 x_3^3\end{aligned}$$

Entonces,  $\tilde{A} = \mathbb{C}[t_1, t_2][x_1, x_2, x_3]/\langle \tilde{f} \rangle$  y

- $\tilde{f}(0, 0) = x_2 x_3^3 = \text{in}_C(f)$ ,
- $\tilde{f}(0, 1) = x_1^4 + x_2 x_3^3 = \text{in}_{r_1}(f)$ ,
- $\tilde{f}(1, 0) = x_1^2 x_2^2 + x_2 x_3^3 = \text{in}_{r_2}(f)$ ,



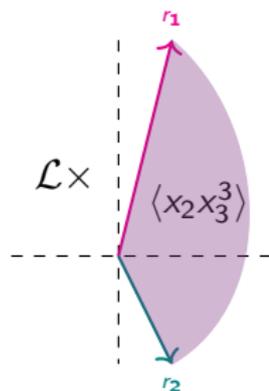
## Ejemplo

Tomemos  $f = x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2 x_3^3 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$   
y consideremos el cono maximal  $C$  de  $GF(\langle f \rangle)$   
generado por  $\mathcal{L}$  y las columnas de la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t_1, t_2) &= f(t_1 t_2 x_1, t_1^4 t_2^{-2} x_2, x_3) t_1^{-4} t_2^2 \\ &= t_1^6 x_1^2 x_2^2 + t_2^6 x_1^4 + x_2 x_3^3\end{aligned}$$

Entonces,  $\tilde{A} = \mathbb{C}[t_1, t_2][x_1, x_2, x_3]/\langle \tilde{f} \rangle$  y

- $\tilde{f}(0, 0) = x_2 x_3^3 = \text{in}_C(f)$ ,
- $\tilde{f}(0, 1) = x_1^4 + x_2 x_3^3 = \text{in}_{r_1}(f)$ ,
- $\tilde{f}(1, 0) = x_1^2 x_2^2 + x_2 x_3^3 = \text{in}_{r_2}(f)$ ,
- $\tilde{f}(1, 1) = f$ .



# Aplicación: coeficientes universales para álgebras de conglomerado

Un *álgebra de conglomerado*<sup>1</sup>  $A \subset \mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$  es un anillo conmutativo definido de manera recursiva por

---

<sup>1</sup>Definida por Fomin y Zelevinsky.

# Aplicación: coeficientes universales para álgebras de conglomerado

Un *álgebra de conglomerado*<sup>1</sup>  $A \subset \mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$  es un anillo conmutativo definido de manera recursiva por

- 1 *semillas*: conjuntos maximales de generadores algebraicamente independientes,

---

<sup>1</sup>Definida por Fomin y Zelevinsky.

# Aplicación: coeficientes universales para álgebras de conglomerado

Un *álgebra de conglomerado*<sup>1</sup>  $A \subset \mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$  es un anillo conmutativo definido de manera recursiva por

- ① *semillas*: conjuntos maximales de generadores algebráicamente independientes, sus elementos son llamados *variables de conglomerado*;

---

<sup>1</sup>Definida por Fomin y Zelevinsky.

# Aplicación: coeficientes universales para álgebras de conglomerado

Un *álgebra de conglomerado*<sup>1</sup>  $A \subset \mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$  es un anillo conmutativo definido de manera recursiva por

- 1 *semillas*: conjuntos maximales de generadores algebráicamente independientes, sus elementos son llamados *variables de conglomerado*;
- 2 *mutación*: una operación combinatoria para crear una nueva semilla a partir de una semilla dada.

---

<sup>1</sup>Definida por Fomin y Zelevinsky.

# Aplicación: coeficientes universales para álgebras de conglomerado

Un *álgebra de conglomerado*<sup>1</sup>  $A \subset \mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$  es un anillo conmutativo definido de manera recursiva por

- 1 *semillas*: conjuntos maximales de generadores algebráicamente independientes, sus elementos son llamados *variables de conglomerado*;
- 2 *mutación*: una operación combinatoria para crear una nueva semilla a partir de una semilla dada.

$\rightsquigarrow$  la estructura de conglomerado se codifica en un complejo simplicial llamado el *complejo de conglomerado* (semillas  $\leftrightarrow$  simplejos maximales).

---

<sup>1</sup>Definida por Fomin y Zelevinsky.

## Ejemplo: la Grassmanniana $Gr_2(\mathbb{C}^5)$

El anillo de coordenadas homogéneo  $Gr_2(\mathbb{C}^5)$  con respecto al encaje de Plücker es un álgebra de conglomerado. Tenemos una biyección canónica

## Ejemplo: la Grassmanniana $Gr_2(\mathbb{C}^5)$

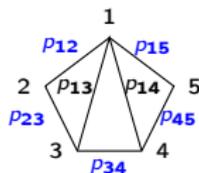
El anillo de coordenadas homogéneo  $Gr_2(\mathbb{C}^5)$  con respecto al encaje de Plücker es un álgebra de conglomerado. Tenemos una biyección canónica

$$\{\text{semillas}\} \leftrightarrow \{\text{triangulaciones de un pentágono}\}$$

## Ejemplo: la Grassmanniana $Gr_2(\mathbb{C}^5)$

El anillo de coordenadas homogéneo  $Gr_2(\mathbb{C}^5)$  con respecto al encaje de Plücker es un álgebra de conglomerado. Tenemos una biyección canónica

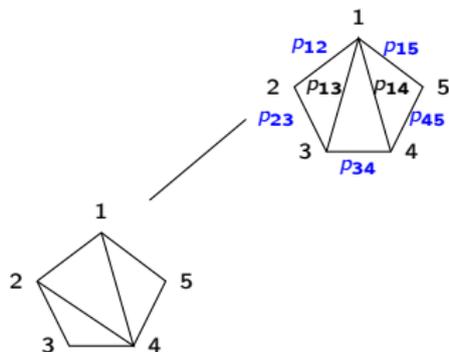
$$\{\text{semillas}\} \leftrightarrow \{\text{triangulaciones de un pentágono}\}$$



## Ejemplo: la Grassmanniana $Gr_2(\mathbb{C}^5)$

El anillo de coordenadas homogéneo  $Gr_2(\mathbb{C}^5)$  con respecto al encaje de Plücker es un álgebra de conglomerado. Tenemos una biyección canónica

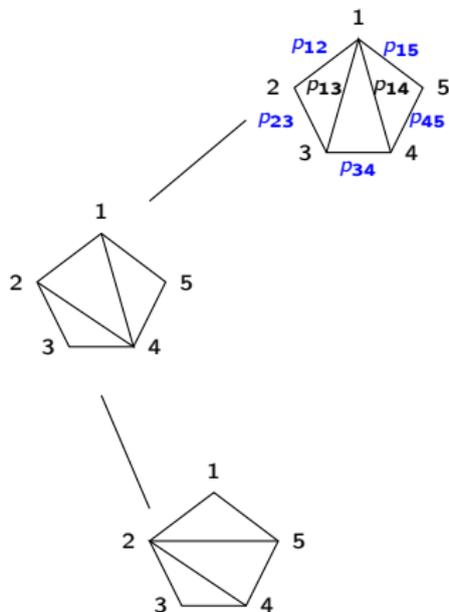
$$\{\text{semillas}\} \leftrightarrow \{\text{triangulaciones de un pentágono}\}$$



## Ejemplo: la Grassmanniana $Gr_2(\mathbb{C}^5)$

El anillo de coordenadas homogéneo  $Gr_2(\mathbb{C}^5)$  con respecto al encaje de Plücker es un álgebra de conglomerado. Tenemos una biyección canónica

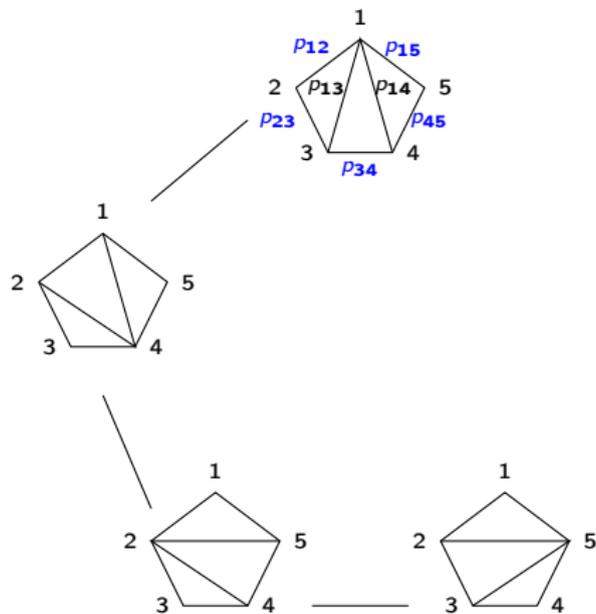
$$\{\text{semillas}\} \leftrightarrow \{\text{triangulaciones de un pentágono}\}$$



## Ejemplo: la Grassmanniana $Gr_2(\mathbb{C}^5)$

El anillo de coordenadas homogéneo  $Gr_2(\mathbb{C}^5)$  con respecto al encaje de Plücker es un álgebra de conglomerado. Tenemos una biyección canónica

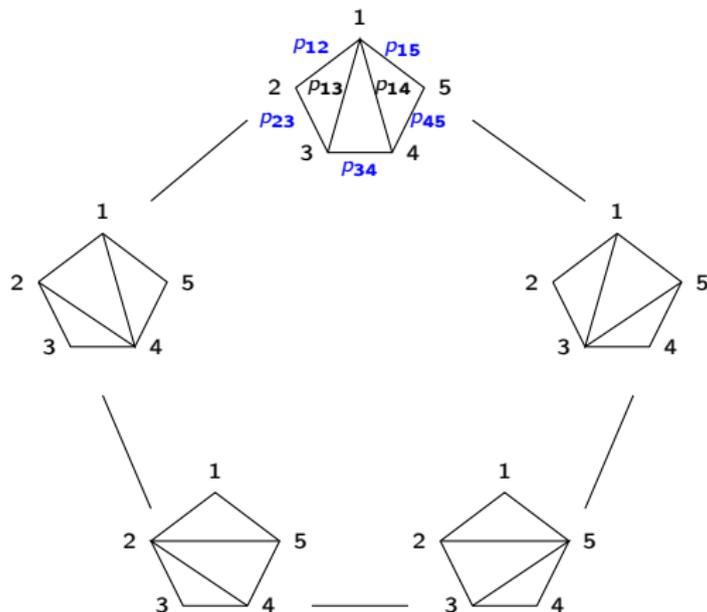
$$\{\text{semillas}\} \leftrightarrow \{\text{triangulaciones de un pentágono}\}$$



## Ejemplo: la Grassmanniana $Gr_2(\mathbb{C}^5)$

El anillo de coordenadas homogéneo  $Gr_2(\mathbb{C}^5)$  con respecto al encaje de Plücker es un álgebra de conglomerado. Tenemos una biyección canónica

$$\{\text{semillas}\} \leftrightarrow \{\text{triangulaciones de un pentágono}\}$$



## Aplicación: Grassmannianas

Consideremos la Grassmanniana  $\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$  con el encaje de Plücker <sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>Asumamos  $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ .

## Aplicación: Grassmannianas

Consideremos la Grassmanniana  $\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$  con el encaje de Plücker <sup>2</sup>. El anillo de coordenadas homogéneo

$$A_{k,n} = \mathbb{C}[p_J \mid J = \{j_1, \dots, j_k\} \subset \{1, \dots, n\}] / I_{k,n}$$

es un álgebra de conglomerado [Scott06].

---

<sup>2</sup>Asumamos  $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ .

## Aplicación: Grassmannianas

Consideremos la Grassmanniana  $\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$  con el encaje de Plücker <sup>2</sup>. El anillo de coordenadas homogéneo

$$A_{k,n} = \mathbb{C}[p_J \mid J = \{j_1, \dots, j_k\} \subset \{1, \dots, n\}] / I_{k,n}$$

es un álgebra de conglomerado [Scott06].

$k \leq 2$  coordenadas de Plücker = variables de conglomerado.

---

<sup>2</sup>Asumamos  $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ .

## Aplicación: Grassmannianas

Consideremos la Grassmanniana  $\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$  con el encaje de Plücker <sup>2</sup>. El anillo de coordenadas homogéneo

$$A_{k,n} = \mathbb{C}[p_J \mid J = \{j_1, \dots, j_k\} \subset \{1, \dots, n\}] / I_{k,n}$$

es un álgebra de conglomerado [Scott06].

$k \leq 2$  coordenadas de Plücker = variables de conglomerado.

$k \geq 3$  coordenadas de Plücker  $\subsetneq$  variables de conglomerado.

---

<sup>2</sup>Asumamos  $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ .

## Aplicación: Grassmannianas

Consideremos la Grassmanniana  $\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$  con el encaje de Plücker <sup>2</sup>. El anillo de coordenadas homogéneo

$$A_{k,n} = \mathbb{C}[p_J \mid J = \{j_1, \dots, j_k\} \subset \{1, \dots, n\}] / I_{k,n}$$

es un álgebra de conglomerado [Scott06].

$k \leq 2$  coordenadas de Plücker = variables de conglomerado.

$k \geq 3$  coordenadas de Plücker  $\subsetneq$  variables de conglomerado.

$k = 2$  o  $k = 3, n \in \{6, 7, 8\}$  hay un número finito de semillas;

---

<sup>2</sup>Asumamos  $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ .

## Aplicación: Grassmannianas

Consideremos la Grassmanniana  $\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$  con el encaje de Plücker <sup>2</sup>. El anillo de coordenadas homogéneo

$$A_{k,n} = \mathbb{C}[p_J \mid J = \{j_1, \dots, j_k\} \subset \{1, \dots, n\}] / I_{k,n}$$

es un álgebra de conglomerado [Scott06].

$k \leq 2$  coordenadas de Plücker = variables de conglomerado.

$k \geq 3$  coordenadas de Plücker  $\subsetneq$  variables de conglomerado.

$k = 2$  o  $k = 3, n \in \{6, 7, 8\}$  hay un número finito de semillas;

en los demás casos hay un número infinito de semillas!

---

<sup>2</sup>Asumamos  $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ .

# Aplicación: Degeneraciones tóricas usando álgebras de conglomerado

Fijemos una semilla  $s$ , entonces  $A$  puede ser dotada de *coeficientes principales en  $s$*

---

<sup>3</sup>Definida por Gross–Hacking–Keel–Kontsevich.

# Aplicación: Degeneraciones tóricas usando álgebras de conglomerado

Fijemos una semilla  $s$ , entonces  $A$  puede ser dotada de *coeficientes principales en  $s$*

$$A_s^{\text{prin}} \subset \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n](x_1, \dots, x_n).$$

---

<sup>3</sup>Definida por Gross–Hacking–Keel–Kontsevich.

# Aplicación: Degeneraciones tóricas usando álgebras de conglomerado

Fijemos una semilla  $s$ , entonces  $A$  puede ser dotada de *coeficientes principales en  $s$*

$$A_s^{\text{prin}} \subset \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n](x_1, \dots, x_n).$$

Bajo ciertas condiciones técnicas:

- 1  $A_s^{\text{prin}}$  admite una base (sobre  $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]$ ) llamada *la base de funciones  $\vartheta^3$* , que es independiente de  $s$ ;

---

<sup>3</sup>Definida por Gross–Hacking–Keel–Kontsevich.

# Aplicación: Degeneraciones tóricas usando álgebras de conglomerado

Fijemos una semilla  $s$ , entonces  $A$  puede ser dotada de *coeficientes principales en  $s$*

$$A_s^{\text{prin}} \subset \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n](x_1, \dots, x_n).$$

Bajo ciertas condiciones técnicas:

- 1  $A_s^{\text{prin}}$  admite una base (sobre  $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]$ ) llamada *la base de funciones  $\vartheta^3$* , que es independiente de  $s$ ;
- 2 si  $A$  es el anillo de coordenadas homogéneo de una variedad proyectiva  $X$  entonces  $A_s^{\text{prin}}$  define una degeneración tórica de  $X$  a  $X_{s,0}$ .

---

<sup>3</sup>Definida por Gross–Hacking–Keel–Kontsevich.

# Aplicación: Degeneraciones tóricas usando álgebras de conglomerado

Fijemos una semilla  $s$ , entonces  $A$  puede ser dotada de *coeficientes principales en  $s$*

$$A_s^{\text{prin}} \subset \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n](x_1, \dots, x_n).$$

Bajo ciertas condiciones técnicas:

- 1  $A_s^{\text{prin}}$  admite una base (sobre  $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]$ ) llamada *la base de funciones  $\vartheta^3$* , que es independiente de  $s$ ;
- 2 si  $A$  es el anillo de coordenadas homogéneo de una variedad proyectiva  $X$  entonces  $A_s^{\text{prin}}$  define una degeneración tórica de  $X$  a  $X_{s,0}$ .

---

<sup>3</sup>Definida por Gross–Hacking–Keel–Kontsevich.

# Aplicación: coeficientes universales para álgebras de conglomerado

Asumamos ahora que  $A$  tiene un número finito de semillas.

## Aplicación: coeficientes universales para álgebras de conglomerado

Asumamos ahora que  $A$  tiene un número finito de semillas.

Algebraicamente, podemos dotar  $A$  con *coeficientes universales*:

## Aplicación: coeficientes universales para álgebras de conglomerado

Asumamos ahora que  $A$  tiene un número finito de semillas.

Algebraicamente, podemos dotar  $A$  con *coeficientes universales*:

$$A^{\text{univ}} \subset \mathbb{C}[t_1, \dots, t_N](x_1, \dots, x_n),$$

dónde  $N$  es el número de variables de conglomerado.

## Aplicación: coeficientes universales para álgebras de conglomerado

Asumamos ahora que  $A$  tiene un número finito de semillas.

Algebraicamente, podemos dotar  $A$  con *coeficientes universales*:

$$A^{\text{univ}} \subset \mathbb{C}[t_1, \dots, t_N](x_1, \dots, x_n),$$

dónde  $N$  es el número de variables de conglomerado. Más aún, tenemos una única *especialización de coeficientes* para cada semilla  $s$ :

## Aplicación: coeficientes universales para álgebras de conglomerado

Asumamos ahora que  $A$  tiene un número finito de semillas.

Algebraicamente, podemos dotar  $A$  con *coeficientes universales*:

$$A^{\text{univ}} \subset \mathbb{C}[t_1, \dots, t_N](x_1, \dots, x_n),$$

dónde  $N$  es el número de variables de conglomerado. Más aún, tenemos una única *especialización de coeficientes* para cada semilla  $s$ :

$$A^{\text{univ}} \rightarrow A_s^{\text{prin}}.$$

## Aplicación: coeficientes universales para álgebras de conglomerado

Asumamos ahora que  $A$  tiene un número finito de semillas.

Algebraicamente, podemos dotar  $A$  con *coeficientes universales*:

$$A^{\text{univ}} \subset \mathbb{C}[t_1, \dots, t_N](x_1, \dots, x_n),$$

dónde  $N$  es el número de variables de conglomerado. Más aún, tenemos una única *especialización de coeficientes* para cada semilla  $s$ :

$$A^{\text{univ}} \rightarrow A_s^{\text{prin}}.$$

$\oplus A^{\text{univ}}$  codifica todas las degeneraciones tóricas  $X_{s,0}$ ,

## Aplicación: coeficientes universales para álgebras de conglomerado

Asumamos ahora que  $A$  tiene un número finito de semillas.

Algebraicamente, podemos dotar  $A$  con *coeficientes universales*:

$$A^{\text{univ}} \subset \mathbb{C}[t_1, \dots, t_N](x_1, \dots, x_n),$$

dónde  $N$  es el número de variables de conglomerado. Más aún, tenemos una única *especialización de coeficientes* para cada semilla  $s$ :

$$A^{\text{univ}} \rightarrow A_s^{\text{prin}}.$$

- ⊕  $A^{\text{univ}}$  codifica todas las degeneraciones tóricas  $X_{s,0}$ ,
- ⊖  $A^{\text{univ}}$  no es explícita y se define de manera *recursiva*.

## Aplicación: Grassmannians $Gr_2(\mathbb{C}^n)$ y $Gr_3(\mathbb{C}^6)$

Consideremos  $Gr_k(\mathbb{C}^n)$  con  $(k, n) \in \{(2, n), (3, 6)\}$ .

## Aplicación: Grassmannians $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ y $\text{Gr}_3(\mathbb{C}^6)$

Consideremos  $\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$  con  $(k, n) \in \{(2, n), (3, 6)\}$ . Existe una presentación

$$A_{k,n} \cong \mathbb{C}[\text{cluster variables}] / J_{k,n}.$$

# Aplicación: Grassmannians $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ y $\text{Gr}_3(\mathbb{C}^6)$

Consideremos  $\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$  con  $(k, n) \in \{(2, n), (3, 6)\}$ . Existe una presentación

$$A_{k,n} \cong \mathbb{C}[\text{cluster variables}] / J_{k,n}.$$

- Para  $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ :  
    {variables de conglomerado} = {coordenadas de Plücker} y  
     $J_{2,n} = I_{2,n}$ ;

# Aplicación: Grassmannians $Gr_2(\mathbb{C}^n)$ y $Gr_3(\mathbb{C}^6)$

Consideremos  $Gr_k(\mathbb{C}^n)$  con  $(k, n) \in \{(2, n), (3, 6)\}$ . Existe una presentación

$$A_{k,n} \cong \mathbb{C}[\text{cluster variables}] / J_{k,n}.$$

- Para  $Gr_2(\mathbb{C}^n)$ :  
{variables de conglomerado} = {coordenadas de Plücker} y  
 $J_{2,n} = I_{2,n}$ ;
- Para  $Gr_3(\mathbb{C}^6)$ :  
{variables de conglomerado} = {coordenadas de Plücker,  $x, y$ },

# Aplicación: Grassmannians $Gr_2(\mathbb{C}^n)$ y $Gr_3(\mathbb{C}^6)$

Consideremos  $Gr_k(\mathbb{C}^n)$  con  $(k, n) \in \{(2, n), (3, 6)\}$ . Existe una presentación

$$A_{k,n} \cong \mathbb{C}[\text{cluster variables}] / J_{k,n}.$$

- Para  $Gr_2(\mathbb{C}^n)$ :  
{variables de conglomerado} = {coordenadas de Plücker} y  
 $J_{2,n} = I_{2,n}$ ;
- Para  $Gr_3(\mathbb{C}^6)$ :  
{variables de conglomerado} = {coordenadas de Plücker,  $x, y$ },  
 $J_{3,6}$  es homogéneo con respecto a la graduación no estándar  
 $\deg(x) = \deg(y) = 2$  y  $\deg(p_{ijk}) = 1$ ,

# Aplicación: Grassmannians $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ y $\text{Gr}_3(\mathbb{C}^6)$

Consideremos  $\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$  con  $(k, n) \in \{(2, n), (3, 6)\}$ . Existe una presentación

$$A_{k,n} \cong \mathbb{C}[\text{cluster variables}] / J_{k,n}.$$

- Para  $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ :  
{variables de conglomerado} = {coordenadas de Plücker} y  
 $J_{2,n} = I_{2,n}$ ;
- Para  $\text{Gr}_3(\mathbb{C}^6)$ :  
{variables de conglomerado} = {coordenadas de Plücker,  $x, y$ },  
 $J_{3,6}$  es homogéneo con respecto a la graduación no estándar  
 $\deg(x) = \deg(y) = 2$  y  $\deg(p_{ijk}) = 1$ ,  
eliminando  $x, y$  de  $J_{3,6}$  obtenemos  $I_{3,6}$ .

# Aplicación: Grassmannians $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ y $\text{Gr}_3(\mathbb{C}^6)$

Theorem (B.–Mohammadi–Nájera Chávez)

## Aplicación: Grassmannians $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ y $\text{Gr}_3(\mathbb{C}^6)$

### Theorem (B.–Mohammadi–Nájera Chávez)

*Existe un único cono maximal  $C$  en el abanico de Gröbner  $J_{k,n}$  para  $(k, n) \in \{(2, n), (3, 6)\}$  tal que*

# Aplicación: Grassmannians $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ y $\text{Gr}_3(\mathbb{C}^6)$

## Theorem (B.–Mohammadi–Nájera Chávez)

Existe un único cono maximal  $C$  en el abanico de Gröbner  $J_{k,n}$  para  $(k, n) \in \{(2, n), (3, 6)\}$  tal que

- 1 tenemos un isomorfismo canónico  $\tilde{A}_{k,n} \cong A_{k,n}^{\text{univ}}$  que identifica los coeficientes universales con los rayos de  $C$ ;

# Aplicación: Grassmannians $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ y $\text{Gr}_3(\mathbb{C}^6)$

## Theorem (B.–Mohammadi–Nájera Chávez)

Existe un único cono maximal  $C$  en el abanico de Gröbner  $J_{k,n}$  para  $(k, n) \in \{(2, n), (3, 6)\}$  tal que

- 1 tenemos un isomorfismo canónico  $\tilde{A}_{k,n} \cong A_{k,n}^{\text{univ}}$  que identifica los coeficientes universales con los rayos de  $C$ ;

# Aplicación: Grassmannians $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ y $\text{Gr}_3(\mathbb{C}^6)$

## Theorem (B.–Mohammadi–Nájera Chávez)

Existe un único cono maximal  $C$  en el abanico de Gröbner  $J_{k,n}$  para  $(k, n) \in \{(2, n), (3, 6)\}$  tal que

- 1 tenemos un isomorfismo canónico  $\tilde{A}_{k,n} \cong A_{k,n}^{\text{univ}}$  que identifica los coeficientes universales con los rayos de  $C$ ;
- 2 el *ideal de Stanley–Reisner* del complejo de conglomerado coincide con el ideal inicial  $\text{in}_C(J_{k,n})$ ;

# Aplicación: Grassmannians $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ y $\text{Gr}_3(\mathbb{C}^6)$

## Theorem (B.–Mohammadi–Nájera Chávez)

Existe un único cono maximal  $C$  en el abanico de Gröbner  $J_{k,n}$  para  $(k, n) \in \{(2, n), (3, 6)\}$  tal que

- 1 tenemos un isomorfismo canónico  $\tilde{A}_{k,n} \cong A_{k,n}^{\text{univ}}$  que identifica los coeficientes universales con los rayos de  $C$ ;
- 2 el *ideal de Stanley–Reisner* del complejo de conglomerado coincide con el ideal inicial  $\text{in}_C(J_{k,n})$ ;
- 3 para cada semilla  $s$  existe una cara  $\tau_s \subset C$  tal que la *variedad tórica*  $X_{s,0}$  es isomorfa a  $\text{Spec}(A_{\tau_s})$ .

## Direcciones a seguir

- (i) Esperamos extender estos resultados a todas las álgebras de conglomerado (graduadas) de tipo finito.

## Direcciones a seguir

- (i) Esperamos extender estos resultados a todas las álgebras de conglomerado (graduadas) de tipo finito.
- (ii) N.IIten mostró que el asociaedro generalizado de tipo  $D_n$  *no tiene obstrucciones*

## Direcciones a seguir

- (i) Esperamos extender estos resultados a todas las álgebras de conglomerado (graduadas) de tipo finito.
- (ii) N. Ilten mostró que el asociaedro generalizado de tipo  $D_n$  *no tiene obstrucciones*  $\Rightarrow$  el esquema de Stanley–Reisner  $\mathbb{P}(D_n)$  es un punto suave de su esquema de Hilbert.

## Direcciones a seguir

- (i) Esperamos extender estos resultados a todas las álgebras de conglomerado (graduadas) de tipo finito.
- (ii) N. Ilten mostró que el asociaedro generalizado de tipo  $D_n$  *no tiene obstrucciones*  $\Rightarrow$  el esquema de Stanley–Reisner  $\mathbb{P}(D_n)$  es un punto suave de su esquema de Hilbert.

### Corollary

*$Gr_3(\mathbb{C}^6)$ , el cono sobre  $\mathbb{P}(D_4)$  (es decir,  $Proj(A_C)$ ) y los esquemas tóricos  $Proj(A_{s,0})$  para todas las semillas  $s$  pertenecen a la misma componente irreducible de su esquema de Hilbert.*

## Direcciones a seguir

- (i) Esperamos extender estos resultados a todas las álgebras de conglomerado (graduadas) de tipo finito.
- (ii) N.IIten mostró que el asociaedro generalizado de tipo  $D_n$  *no tiene obstrucciones*  $\Rightarrow$  el esquema de Stanley–Reisner  $\mathbb{P}(D_n)$  es un punto suave de su esquema de Hilbert.

### Corollary

*$Gr_3(\mathbb{C}^6)$ , el cono sobre  $\mathbb{P}(D_4)$  (es decir,  $Proj(A_C)$ ) y los esquemas tóricos  $Proj(A_{s,0})$  para todas las semillas  $s$  pertenecen a la misma componente irreducible de su esquema de Hilbert.*

Pregunta: ¿Podemos obtener resultados similares para cualquier Grassmannians?

# Bibliografía

- BMN** Lara Bossinger, Fatemeh Mohammadi, Alfredo Nájera Chávez. Gröbner degenerations of Grassmannians and universal cluster algebras. *arxiv preprint arXiv:2007.14972 [math.AG]*, (2020)
- Gr(3,6)** Lara Bossinger. Grassmannians and universal coefficients for cluster algebras: computational data for Gr(3,6). <https://www.matem.unam.mx/~lara/clusterGr36>
- B20a** Lara Bossinger. Full-Rank Valuations and Toric Initial Ideals. *Int. Math. Res. Not.* rnaa071 (2020)
- Cox95** David A. Cox. The homogeneous coordinate ring of a toric variety. *J. Algebraic Geom.*, 4(1):17–50 (1995)
- FZ02** Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras. I. Foundations. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(2):497–529, 2002.
- FZ07** Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras. IV. Coefficients. *Compos. Math.* 143, no. 1, 112–164 (2007)
- GHKK18** Mark Gross, Paul Hacking, Sean Keel, and Maxim Kontsevich. Canonical bases for cluster algebras. *J. Amer. Math. Soc.*, 31(2):497–608 (2018)
- Ilten** Nathan Ilten. Type D Associahedra are Unobstructed. *Slides of online talk 13/08/2020*  
<http://magma.maths.usyd.edu.au/~kasprzyk/seminars/pdf/Ilten.pdf>
- KM19** Kiumars Kaveh and Christopher Manon. Khovanskii bases, higher rank valuations, and tropical geometry. *SIAM J. Appl. Algebra Geom.*, 3(2):292–336 (2019)
- Reading** Nathan Reading. Universal geometric cluster algebras. *Math. Z.* 277(1-2):499–547 (2014)
- Sc06** Joshua S. Scott. Grassmannians and cluster algebras. *Proc. London Math. Soc.* (3) 92 (2006), no. 2, 345–380.