De la Grassmanniana y las gráficas plabic, a los positroides y las particiones que no se cruzan.

Jorge Luis Santos Silva

Instituto de Matemáticas,UNAM, Oax.

26/11/2021

Grassmanniana Gr_{kn}

Definición

La **Grassmanniana** Gr_{kn} es el espacio de todos los espacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$ de dimensión k. La **Grassmanniana totalmente no negativa** $(Gr_{kn})_{\geq 0}$ (**Grassmanniana positiva** $(Gr_{kn})_{>0}$) es el conjunto de Gr_{kn} que pueden ser representado por matrices A tal que $\Delta_I(A) \geq 0$ $(\Delta_I(A) > 0)$, donde $I \subseteq \binom{[n]}{k}$ y $\Delta_I(A)$ es el menor maximal de A con las columnas indexadas por I.

Definición

Dado $\mathcal{M} \subseteq \binom{[n]}{k}$ definimos la **positroid cell** $S_{\mathcal{M}}^{tnn}$ como los elementos de Gr_{kn} que son representados por matrices A tales que $\Delta_I(A) > 0$ para $I \in \mathcal{M}$ y $\Delta_J(A) = 0$ si $J \notin \mathcal{M}$.

Grassmanniana Gr_{kn}

Definición

La **Grassmanniana** Gr_{kn} es el espacio de todos los espacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$ de dimensión k. La **Grassmanniana totalmente no negativa** $(Gr_{kn})_{\geq 0}$ (**Grassmanniana positiva** $(Gr_{kn})_{>0}$) es el conjunto de Gr_{kn} que pueden ser representado por matrices A tal que $\Delta_I(A) \geq 0$ ($\Delta_I(A) > 0$), donde $I \subseteq \binom{[n]}{k}$ y $\Delta_I(A)$ es el menor maximal de A con las columnas indexadas por I.

Definición

Dado $\mathcal{M} \subseteq \binom{[n]}{k}$ definimos la **positroid cell** $S_{\mathcal{M}}^{tnn}$ como los elementos de Gr_{kn} que son representados por matrices A tales que $\Delta_I(A) > 0$ para $I \in \mathcal{M}$ y $\Delta_J(A) = 0$ si $J \notin \mathcal{M}$.

Observación

Gr_{kn} es unión disjunta de positroid cells $S_{\mathcal{M}}^{tnn}$.

Definición

Un **collar de Grassmann reducido** de tipo (k,n) es una sucesión $\mathcal{I} = (I_1, I_2, \ldots, I_n)$ tal que para toda $i \leq n$ tenemos, $I_i \in \binom{[n]}{k}$, $i \in I_i$ y $I_{i+1} = (I_i \setminus \{i\}) \cup \{j\}$ para alguna $j \in [n]$.

Ejemplo

$(123, 235, 234, 134, 145)$ *y* $(12, 23, 34, 45, 51)$ *son collares de Grassmann de tipo* $(3,5)$ *y* $(2,5)$ *respectivamente.*

Observación

Gr_{kn} es unión disjunta de positroid cells $S_{\mathcal{M}}^{tnn}$.

Definición

Un **collar de Grassmann reducido** de tipo (k, n) es una sucesión $\mathcal{I} = (I_1, I_2, \ldots, I_n)$ tal que para toda $i \leq n$ tenemos, $I_i \in \binom{[n]}{k}$, $i \in I_i$ y $I_{i+1} = (I_i \setminus \{i\}) \cup \{j\}$ para alguna $j \in [n]$.

Ejemplo

$(123, 235, 234, 134, 145)$ *y* $(12, 23, 34, 45, 51)$ *son collares de Grassmann de tipo* $(3, 5)$ *y* $(2, 5)$ *respectivamente.*

Observación

Gr_{kn} es unión disjunta de positroid cells $S_{\mathcal{M}}^{tnn}$.

Definición

Un **collar de Grassmann reducido** de tipo (k, n) es una sucesión $\mathcal{I} = (I_1, I_2, \ldots, I_n)$ tal que para toda $i \leq n$ tenemos, $I_i \in \binom{[n]}{k}$, $i \in I_i$ y $I_{i+1} = (I_i \setminus \{i\}) \cup \{j\}$ para alguna $j \in [n]$.

Ejemplo

$(123, 235, 234, 134, 145)$ *y* $(12, 23, 34, 45, 51)$ *son collares de Grassmann de tipo* $(3, 5)$ *y* $(2, 5)$ *respectivamente.*

Definición

Una **gráfica plabic** es una gráfica plana no dirigida dibujada dentro de un círculo con n puntos es la frontera dispuestos en contra de las manecillas del reloj, tal que cada vértice frontera es adyacente a un sólo vértice. Cada vértice interior (no frontera) esta coloreado color blanco o negro.

Definición

Un **diagrama Le** $L(\lambda, D)_{k,n}$ es un diagrama de Young para la partición λ contenido en un rectángulo $k(n-k)$ y las cajas están etiquetadas con "+" y "0", donde las etiquetas cumplen: no hay 0 que tiene un + arriba en la misma columna y un + a su izquierda en el mismo renglón.

Teorema

Sea $S^{tnn}_{\mathcal{M}}$ una positroid cell en $(Gr_{kn})_{\geq 0}$. Para $r \leq n$, tomamos $I_r \in \mathcal{M}$ que es el menor con el orden lexicográfico con respecto al orden $r < r+1 < \cdots < n < 1 < \cdots < r-1$. Entonces $\{I_i\}_{i \leq n}$ es un collar de Grassmann del tipo (k, n).

Sea $\mathcal{I}$ un collar de Grassmann de tipo (k, n):

- Construimos un diagrama de Young dentro de un rectángulo de $k(n-k)$ tal que las columnas son etiquetadas por I_1.
- Hacemos $I_1 \setminus I_i = \{a_1 > a_2 \cdots > a_r\}$ y $I_i \setminus I_1 = \{b_1 < b_2 < \cdots < b_r\}$ y formamos las parejas

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_r, b_r).$$

en la correspondiente caja de el diagrama colocamos un "$+$".

Teorema

Sea $S^{tnn}_{\mathcal{M}}$ una positroid cell en $(Gr_{kn})_{\geq 0}$. Para $r \leq n$, tomamos $I_r \in \mathcal{M}$ que es el menor con el orden lexicográfico con respecto al orden $r < r+1 < \cdots < n < 1 < \cdots < r-1$. Entonces $\{I_i\}_{i \leq n}$ es un collar de Grassmann del tipo (k, n).

Sea $\mathcal{I}$ un collar de Grassmann de tipo (k, n):

- Construimos un diagrama de Young dentro de un rectángulo de $k(n-k)$ tal que las columnas son etiquetadas por I_1.
- Hacemos $I_1 \setminus I_i = \{a_1 > a_2 \cdots > a_r\}$ y $I_i \setminus I_1 = \{b_1 < b_2 < \cdots < b_r\}$ y formamos las parejas

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_r, b_r).$$

en la correspondiente caja de el diagrama colocamos un "+".

Teorema

Sea $S^{tnn}_{\mathcal{M}}$ una positroid cell en $(Gr_{kn})_{\geq 0}$. Para $r \leq n$, tomamos $I_r \in \mathcal{M}$ que es el menor con el orden lexicográfico con respecto al orden $r < r+1 < \cdots < n < 1 < \cdots < r-1$. Entonces $\{I_i\}_{i \leq n}$ es un collar de Grassmann del tipo (k, n).

Sea $\mathcal{I}$ un collar de Grassmann de tipo (k, n):

- Construimos un diagrama de Young dentro de un rectángulo de $k(n-k)$ tal que las columnas son etiquetadas por I_1.
- Hacemos $I_1 \setminus I_i = \{a_1 > a_2 \cdots > a_r\}$ y $I_i \setminus I_1 = \{b_1 < b_2 < \cdots < b_r\}$ y formamos las parejas

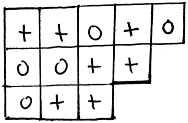
  $$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_r, b_r).$$

  en la correspondiente caja de el diagrama colocamos un "$+$".

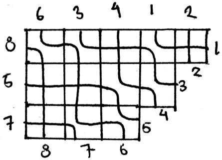
- Repetimos lo que hicimos en el paso anterior con todos los demás elementos del collar, y en las cajas que quedaron vacías colocamos un "0".

Dado un diagrama Le ¿Cómo construimos una gráfica plabic?

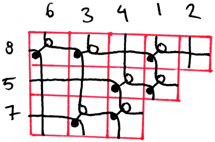
- Dado un diagrama Le etiquetaremos la frontera sureste con los números 1 hasta el n empezando desde la esquina noreste. Remplazaremos los 0 con cruces y los $+$ con "codos". Para cada i en la frontera sureste etiquetaremos con el mismo número el elemento de la frontera que llegamos caminando por los caminos que hemos creado.
- Agregaremos una arista en los codos que estén dentro de la misma casilla, y dos vértices uno blanco si el codo va de norte a este y uno negro si va de oeste a sur. Y eliminemos todas las etiquetas de la frontera sureste.



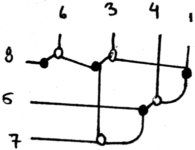
+ + O + O
O O + +
O + +



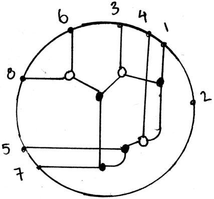
6 3 4 1 2
8 5 7
1 2 3 4 5
8 7 6



6 3 4 1 2
8 5 7



6 3 4 1
8 5 7



6 3 4 1
8 2 5 7

- Borremos todos los vértices de grado dos, como tambien borraremos todos los eje del diagrama que terminan en la frontera sureste.
- Borremos ahora las casillas y acomodemos en un circulo con n vértices frontera.

Definición

Un **matroide** M es un par $(E, \mathcal{B})$ que consiste en un conjunto finito E y una colección de conjuntos finita de conjuntos $\mathcal{B} = \mathcal{B}(M)$ de E llamadas **bases** de M, que satisface el **axioma de cambio de base**: Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $b_1 \in B_1 \setminus B_2$, entonces existe $b_2 \in B_2 - B_1$ talque

$$(B_1 \setminus \{b_1\}) \cup B_2 \in \mathcal{B}.$$

A E lo llamamos **tierra** de M; también decimos que M es un matroide de E.

Definición

Decimos que un matroide M es **conexo** si no puede ser escrito como suma directa[a] de dos matroides no vacíos .

[a]Dadas M y N matroides de E y F respectivamente, definimos su suma directa $M \oplus N$ como la unión disjunta de sus tierras y sus bases.

Definición

Dada una matríz A de kxn totalmente no negativa, le asociamos un matroide $M(A)$ de la siguiente manera: el conjunto tierra será $[n]$ y las bases serán $I \in \binom{[n]}{k}$ tal que $\Delta_I(A) \neq 0$. El matroide asociado $M(A)$ le llamaremos **positroide**.

Teorema

Sea $I = (I_1, I_2, \ldots, I_n)$ *un collar de Grassmann de tipo* (d, n). *Tomemos la colección*

$$\mathcal{B}(I) := \{B \in \binom{[n]}{k} \mid B \geq_i I_i, 0 \leq i \leq n\},$$

entonces $\mathcal{M}(I) = ([n], \mathcal{B}(I))$ *es un positroide.*

Definición

Dada una gráfica plabic definimos una **orientación perfecta** sustituyendo las aristas por flecha, donde para todo vértice interior tenemos que:

- si de color negro, entonces existe una única flecha que sale de el.
- si es de color blanco, entonces existe una única flecha que entra a el.

Decimos que una gráfica plabic es **orientable perfectamente** si admite una orientación perfecta.

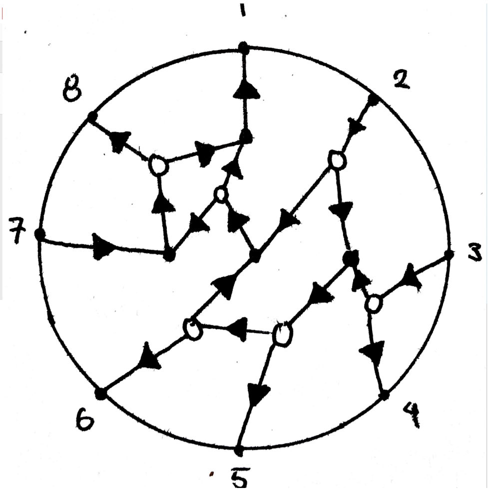
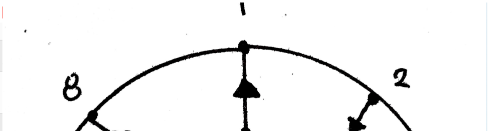


Figure: Orientación perfecta de una gráfica plabic.



Proposición

Sea G una gráfica plabic de tipo (d, n). Entones tenemos un positroide M_G en $[n]$ tal que sus bases están dadas por

$$\{I_{\mathcal{O}} | \ \mathcal{O} \text{ es una orientacion perfecta}\},$$

donde $I_{\mathcal{O}}$ es el conjunto de **fuentes** *de los vértices frontera de G.*

Las gráficas plabic que son obtenidas de L-diagramas son orientables perfectamente.

Definición

Dados G una gráfica plabic de tipo (d, n) y $\mathcal{O}$ una orientación perfecta en G y un conjunto J de vértices frontera tal que $|I_{\mathcal{O}}| = |J|$, decimos que un conjunto de caminos que no comparten vértices de $I_{\mathcal{O}}$ a J es un **flujo** si el conjunto de fuentes de estos caminos son $I_{\mathcal{O}} \setminus (I_{\mathcal{O}} \cap J)$ y lo objetivos son $J \setminus (I_{\mathcal{O}} \cap J)$.

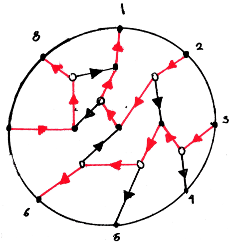


Figure: Flujo de $\{2, 3, 7\}$ a $\{1, 6, 8\}$.

Proposición

Sean G una gráfica plabic de tipo (d, n) y $\mathcal{O}$ una orientación perfecta en G. Entonces el conjunto de bases M_G son precisamente

$$\{I \mid \text{existe un flujo de } I_{\mathcal{O}} \text{ a } I\}.$$

Proposición

Consideremos un positroide que está dado por la gráfica plabic G y la orientación perfecta $\mathcal{O}$. Entonces existe un cambio de base entre $I_{\mathcal{O}}$ y $J = (I_{\mathcal{O}} \setminus \{i\} \cup \{j\})$ si y sólo si existe un camino dirigido en $\mathcal{O}$ de el vértice i al j.

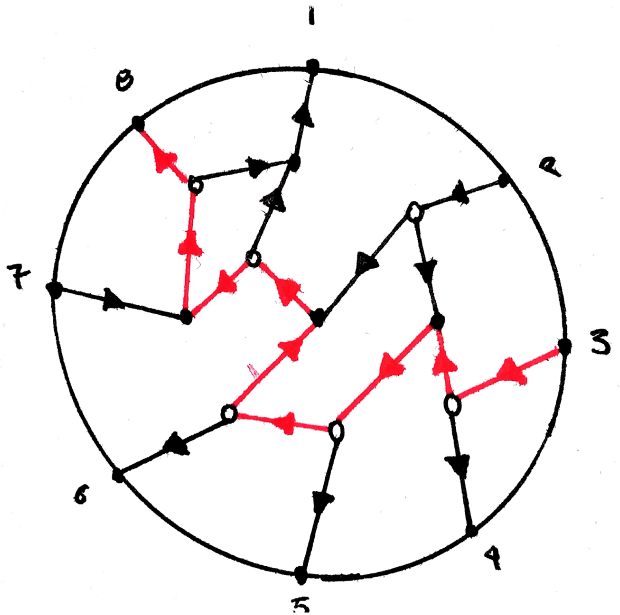


Figure: Camino dirigido de 3 a 8.

Definición

Un positroide es **conexo** si y sólo si no puede ser escrito como suma directa de dos positroides no vacíos.

Proposición

Sea M un matroide en E. Para todo $a, b \in E$ hacemos $a \sim b$ siempre que existan dos bases B_1 y B_2 de M tal que $B_2 = (B_1 \setminus \{a\}) \cup \{b\}$. Entonces $\sim$ es una relación de equivalencia y sus clases de equivalencia son las componentes conexas de M.

Definición

Sea Π una partición de n. Decimos que Π es una **partición que no se cruza** si no existen $i, k, j, m \in [n]$ y $A, B \in \Pi$ tales que $i < k < j < m$, $i, j \in A$ y $k, m \in B$. Al conjunto de particiones que no se cruzan de $[n]$ lo denotaremos con NC_n.

Teorema

Sean M un positroide en $[n]$ y $S_1, S_2, \ldots, S_k$ los conjuntos tierra de las componentes conexas de M.

$$\Pi_M = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$$

es una partición que no se cruza.

También tenemos el regreso

Teorema

Si $\Pi = \{S_1, S_2, \ldots S_k\}$ *es una partición que no se cruza en* $[n]$ *y* $M_1, M_2, \ldots, M_k$ *matroides conexos para* $S_1, S_2, \ldots, S_k$ *respectivamente, entonces* $M = \bigoplus_{i \leq k} M_i$ *es un positroide.*