Ejercicios 2 del curso "Álgebras de Conglomerado"

Lara Bossinger

semestre 2022-1

3. El fenómeno de Laurent

3.3. Comentarios

Ejercicio 3.8. Muestra que existe una biyección entre las semillas en el sentido de la Definición 2.27 y los datos semillas con los datos fijos. Es decir, dado un semilla $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{B})$ muestra que determina de manera única los datos fijos y los datos de una semilla.

Solución: Acá hay un problema con la formulación del ejercicio, o más bien, como hasta el momento no hemos visto la definición de y-patrones no podemos dar la solución hasta ahora. El problema son los multiplicadores que en el contexto geométrico son definidas para todas las direcciones (mutables y congeladas), pero en el contexto algebraico solo tenemos multiplicadores definidas para direcciones mutables. Si los multiplicadores de direcciones congeladas no son todos uno, entonces no podemos asociar una patrón de semillas (de tipo geometrico) que captura esta información. El problema se va a resolver cuanda trabajamos con distintos semicampos (saliendo del tipo geometrico) y distintos y-patrones.
El problema se ve en el siguiente ejemplo: toma la latiz $N = \mathbb{Z}^3$ con forma bilineal casi-simétrica $\{\cdot, \cdot\}$ definida con respecto a la base estándar por la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea $I = [3]$ y $I_{\text{mut}} = [2]$; y fijamos $d_1 = d_3 = 2$ y $d_2 = 1$. Entonces el multiplicador d_3 de la dirección congelada 3 no es uno. Para los datos de una semilla inicial escogemos la base estándar (e_1, e_2, e_3) de N. Calculamos $\epsilon_{ij} = \{e_i, e_j\} d_j$ para $i \in [n] = [2]$ y $j \in [n+m] = [3]$:

$$\epsilon_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como en las notas asociamos entonces la matriz de intercambio extendida:

$$\tilde{B} = \epsilon_s^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Los multiplicadores para la matriz de intercambio $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ son $d_1 = 2, d_2 = 1$.
Para el regreso entonces consideramos la matriz $\tilde{B}$ con $d_1 = 2, d_2 = 1$ y queremos determinar

los datos fijos y los datos de una semilla. Los datos de una semilla se obtienen de las variables de conglomerado, más interesante son los datos fijos, en particular la forma bilineal $\{\cdot,\cdot\}$ y los multiplicadores d_1, d_2, d_3. Sabemos para $i, j \in [n] = [2]$ y $j \in [n+m] = [3]$:

$$\{e_i, e_j\}d_j = \epsilon_{ij} = b_{ji}$$

Pero para $j \in [n+1, n+m]$ (en este caso $j = 3$) no tenemos d_j. Además $\{e_i, e_j\}$ puede estar en $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. Cada elección de los valores d_j con $j \in [n+1, n+m]$ nos da distintos datos fijos. Por ejemplo, con $d_3 = 1$ obtenemos para $\{\cdot,\cdot\}$ la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

que es distinta de la cual con que empezamos.

Ejercicio 3.9. Sean los datos fijos Γ arbitrarios (no necesariamente con $d_i = 1$) y sean $s = (e_i : i \in I)$ los datos de una semilla:

1. muestra que $\mu_k(s) = (e'_i : i \in I)$ son datos de una semilla;
2. verifica que la matriz $\epsilon_{\mu_k(s)}$ con entradas $\epsilon'_{ij} := \{e'_i, e'_j\}d_j$ es igual a la matriz $\mu_k(\epsilon_s) = (\epsilon''_{ij})$ que se obtiene de ϵ_s bajo la mutación de la matriz en la dirección k (como la vimos en (2.6)), es decir:

$$\epsilon''_{ij} := \begin{cases} -\epsilon_{ij} & k \in \{i,j\} \\ \epsilon_{ij} + \operatorname{sgn}(\epsilon_{ik})[\epsilon_{ik}\epsilon_{kj}]_+ & \text{lo demás} \end{cases} \tag{1}$$

Ejercicio 3.10. Prueba el Lema 3.12 en el caso general donde no necesariamente tenemos $d_i = 1$ para todas $i \in I$.

Solición: Hay que verificar que $\langle f'_j, d_i e'_i \rangle = \delta_{ji}$ para todas $i, j \in I$. Si $k \neq j$ tenemos

$$\langle f'_j, d_i e'_i \rangle = \langle f_j, d_i(e_i + [\epsilon_{ik}]_+ e_k) \rangle = d_j^{-1} d_i \langle e_j^*, e_i \rangle + d_j^{-1} d_i [\epsilon_{ik}]_+ \langle e_j^*, e_k \rangle \overset{j \neq k}{=} d_j^{-1} d_i \langle e_j^*, e_i \rangle = \delta_{ij}.$$

Para $k = j$ distinguimos dos casos para i. Primero, si $i = k$:

$$\langle f'_k, d_k e'_k \rangle = \langle -f_k + \sum_j [-\epsilon_{kj}]_+ f_j, -d_k e_k \rangle = \langle e_k^*, e_k \rangle + \sum_{j \neq k} d_j^{-1} d_k [-\epsilon_{kj}]_+ \langle e_j^*, e_k \rangle = 1$$

Por el otro lado, si $i \neq k$ calculamos

$$\begin{aligned} \langle f'_k, d_i e'_i \rangle &= \langle -f_k + \sum_{j \neq k} [-\epsilon_{kj}]_+ f_j, d_i(e_i + [\epsilon_{ik}]_+ e_k) \rangle \\ &\overset{i \neq k}{=} \sum_{j \neq k} [-\epsilon_{kj}]_+ \langle f_j, d_i e_i \rangle - \langle f_k, d_i [\epsilon_{ik}]_+ e_k \rangle \\ &\overset{f_j = d_j^{-1} e_j^*}{=} \sum_{j \neq k} [-\epsilon_{kj}]_+ \langle d_j^{-1} e_j^*, d_i e_i \rangle - \langle d_k^{-1} e_k^*, d_i [\epsilon_{ik}]_+ e_k \rangle \\ &\overset{\langle f_j, d_i e_i \rangle = \delta_{ij}}{=} [-\epsilon_{ki}]_+ - \frac{d_i}{d_k} [\epsilon_{ik}]_+ \end{aligned}$$

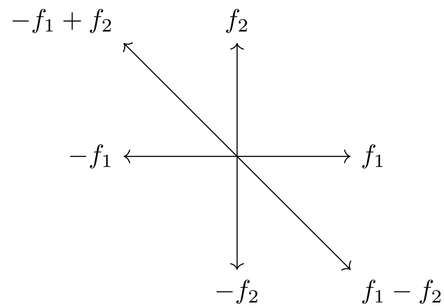
Dado el Lema 3.9 sabemos que ϵ_{ik} y ϵ_{ki} tienen signos opuestos. Si $\operatorname{sgn}(\epsilon_{ik}) \in \{0, -1\}$ ya acabamos. Para el caso de $\operatorname{sgn}(\epsilon_{ik}) = 1$ tenemos

$$[-\epsilon_{ki}]_+ - \frac{d_i}{d_k}[\epsilon_{ik}]_+ \overset{\epsilon_{ik}=-\frac{d_k}{d_i}\epsilon_{ki}}{=} -\epsilon_{ki} + \epsilon_{ki} = 0.$$

Ejercicio 3.11. Los elementos $v_k \in M$ satisfacen $v_k = \sum_{i\in I} \epsilon_{ki} d_i f_i$.

Ejercicio 3.12. Prueba la Proposición 3.14 en el caso general donde no necesariamente tenemos $d_i = 1$ para todas las $i \in I$.

Ejercicio 3.13. Recuerda el Ejemplo 3.13 y la Tabla 1. Dibujando los $f_{i,s}$ en el plano nos damos cuenta que son un abanico completo cuyos conos máximales correspondes a las semillas $s_0, \dots, s_5$:



Repite el calculo de los $f_{i,s}$ en los siguientes casos y verifica si sale también un abanico completo o no:

1. Fijamos $N = \mathbb{Z}^2$ con forma $\{\cdot,\cdot\}$ definida de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ para la base estándar $\{e_1, e_2\}$. Además fijamos $I = I_{\text{mut}}$ con $(d_1, d_2) = (2, 1)$ y para la semilla inicial fijamos $s_0 = (e_1, e_2)$ (como en los Ejemplo 3.8 y 3.11).

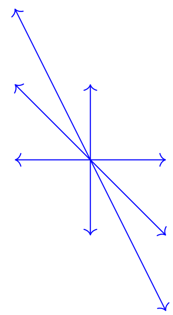
2. Fijamos $N = \mathbb{Z}^3$ con forma $\{\cdot,\cdot\}$ definida de $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ para la base estándar $\{e_1, e_2, e_3\}$. Además fijamos $I = I_{\text{mut}}$ con $d_i = 1$ y para la semilla inicial fijamos $s_0 = (e_1, e_2, e_3)$.

Solución:

1. Este caso es de tipo $\mathtt{B}_2$ y corresponde a la matriz inicial

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculando los $f_{i,s}$ observamos que son 8-periódicos y se obtiene el abanico



4. La clasificación de tipo finito

4.1. Subálgebras de conglomerado

Ejercicio 4.1. Congelar variables en una semilla conmuta con la mutación de semillas.

Ejercicio 4.2. Restringir una semilla conmuta con la mutación de semillas.

4.2. Plegando Carcajes

Ejercicio 4.3. Prueba el Lema 4.10 usando la formula de la mutación de matrices (2.4) y el Lema 4.9.

Ejercicio 4.4. Consideramos el carcaj Q con 5 vértices mutables.

$$\begin{tikzcd} x_2 \arrow[dr] & & x_3 \arrow[dl] \\ & x_1 & \\ x_3' \arrow[ur] & & x_2' \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

con la acción del grupo $G = \mathbb{Z}_2$ que actua con una rotación de 180° en Q. Las G-orbitas son $\{x_1\}, \{x_2, x_2'\}$ y $\{x_3, x_3'\}$.

1. Verifique que Q es G-admisible y calcula la matriz plegada $\tilde{B}^G$.

2. Prueba que Q es globalmente plegable con respecto a la acción de G.

Ejercicio 4.5. Verifica que el carcaj Q en el Ejemplo 4.16 es globalmente plegable.

Solución: Recureda que un isomorfismo de un carcaj es una permutación de las etiquetas de sus vértices. Un isomorfismo es *G-equivarinate* si manda G-orbitas a G-orbitas. Nuestro carcaj Q es

$$\begin{tikzcd} 5 \arrow[r] & 3 & 2 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & 4 & 6 \arrow[l] \\ & & 1 & & \end{tikzcd}$$

con las G-orbitas $\{1\}, \{2\}, \{3,4\}$ y $\{5,6\}$. Bajo isomorfismo de carcajes G-equivariantes los carcajes que aparecen mutando Q en las G-orbitas mutables (es decir, en $\mu_1, \mu_2, \mu_{\{3,4\}}$ y $\mu_{\{5,6\}}$) son las siguientes

$$\begin{tikzcd} 5 \arrow[r] & 3 & 2 \arrow[l] \arrow[r] & 4 & 6 \arrow[l] \\ & & 1 \arrow[u] & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 5 & 3 \arrow[l] \arrow[r] & 2 & 4 \arrow[l] \arrow[r] & 6 \\ & & 1 \arrow[u] & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 5 & 3 \arrow[l] \arrow[r] & 2 \arrow[d] & 4 \arrow[l] \arrow[r] & 6 \\ & & 1 & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 5 & 3 \arrow[l] & 2 \arrow[l] \arrow[r] & 4 \arrow[r] & 6 \\ & & 1 \arrow[u] & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 5 & 3 \arrow[l] & 2 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & 4 \arrow[r] & 6 \\ & & 1 & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 3 \arrow[r] & 5 \arrow[dr] & 2 \arrow[l] \arrow[r] & 6 \arrow[dl] & 4 \arrow[l] \\ & & 1 \arrow[u] & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 3 & 5 \arrow[l] \arrow[dr] & 2 \arrow[l] \arrow[r] & 6 \arrow[r] \arrow[dl] & 4 \\ & & 1 \arrow[u] & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & 3 \arrow[dr] & & 4 \arrow[dl] & \\ 5 \arrow[ur] & & 2 \arrow[ll] \arrow[rr] \arrow[d] & & 6 \arrow[ul] \\ & & 1 & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & 3 \arrow[dr] & & 4 \arrow[dl] & \\ 5 \arrow[ur] & & 2 \arrow[ll] \arrow[rr] & & 6 \arrow[ul] \\ & & 1 \arrow[u] & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 5 & 2 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[dr] & 6 \\ 3 \arrow[u] \arrow[r] & 1 \arrow[u] & 4 \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 5 \arrow[r] \arrow[d] & 2 & 6 \arrow[l] \arrow[d] \\ 3 \arrow[r] & 1 \arrow[u] & 4 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

4.3. Matrices de Cartan y Diagramas de Dynkin

Ejercicio 4.6. En este ejercicio vamos a probar que cada patrón de semillas de tipo finito es 2-finito.

1. Considera el grupo $W \subset \mathrm{GL}_2$ generado de $s_1 = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & -1 \end{pmatrix}$ y muestra que es un grupo finito si y solo si $ab \leq 3$.

Sea $B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ con $ab \geq 4$ y sean

$$\mathbf{x}(0) = (x_1, x_2), \quad \mathbf{x}(1) = (x_3, x_2), \quad \mathbf{x}(2) = (x_3, x_4), \ldots \tag{2}$$

los conglomerados en el campo $\mathcal{F}$ asociados al patrón de semillas definido por B. Consideramos el semicampo $U = \{u^r : r \in \mathbb{R}\}$ donde u es una variable formal y U tiene las operaciones

$$u^r \oplus u^s = u^{\max\{r,s\}}, \quad \text{y} \quad u^r \cdot u^s = u^{r+s}.$$

2. Construye un homomorfismo de semicampos $\psi : \mathcal{F} \to U$ tal que el conjunto $\{\psi(x_t) : t \in \mathbb{Z}\} \subset U$ es infinito. *Tipp:* en el caso $ab = 4$ toma $\psi(x_1) = u$ y $\psi(x_2) = u^a$, para $ab > 4$ toma $\psi(x_1) = u^b$ y $\psi(x_2) = u^{\lambda+1}$ para un eigenvalor λ de la matriz $s_1 s_2$ en 1.

3. Muestra que un patrón de semillas de tipo finito es también 2-finito.

Solución:

1. Observa que $s_1^2 = s_2^2 = 1$, pues W es finito si y solo si el elemento $s_1 s_2$ es de orden finito:
$$s_1 s_2 = \begin{pmatrix} ab-1 & -a \\ b & -1 \end{pmatrix}$$
Cada eigenvalor λ de $s_1 s_2$ satisface la ecuación característica:
$$\lambda^2 - (ab-1)\lambda - 1 = 0. \tag{3}$$
En particular, $s_1 s_2$ tiene orden finito si sus eigenvalores son raíces de la unidad. Verificamos los distintos casos: Si $a = b = 0$ tenemos $(s_1 s_2)^2 = 1$. Para $ab = 1$ tenemos $\lambda \in \{-(-1)^{\frac{1}{3}}, (-1)^{\frac{2}{3}}\}$ y $s_1 s_2$ es de orden 3; para $ab = 2$ tenemos $\lambda = \pm i$ y $s_1 s_2$ es de orden 4; y para $ab = 3$ tenemos $\lambda \in \{(-1)^{\frac{1}{3}}, -(-1)^{\frac{2}{3}}\}$ y $s_1 s_2$ es de orden 6. Para $ab = 4$ calculamos
$$(s_1 s_2)^k = \begin{pmatrix} 2k+1 & -ka \\ kb & -2k+1 \end{pmatrix},$$
pues W es infinito. Si $ab > 4$ tenemos $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ entonces W también es infinito.

2. Distinguimos los casos $ab = 4$ y $ab > 4$.

$ab > 4$ En este caso existe un eigenvalor real $\lambda > 1$ de $s_1 s_2$ que satisface la ecuación característica (3). Definimos $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{U}$ como $\psi(x_1) = u^b$ y $\psi(x_2) = u^{\lambda+1}$. Las relaciones de intercambio (como en el Ejercicio 2.18) implican que en $\mathcal{U}$ tenemos
$$\psi(x_{t-1})\psi(x_{t+1}) = \begin{cases} \psi(x_t)^b \oplus 1 & \text{si } t \text{ es par} \\ \psi(x_t)^a \oplus 1 & \text{si } t \text{ es impar} \end{cases} \tag{4}$$
Vamos a probar la siguiente afirmación: para $k \geq 0$ tenemos
$$\psi(x_{2k+1}) = u^{\lambda^k b}, \quad \psi(x_{2k+2}) = u^{\lambda^k(\lambda+1)}. \tag{5}$$
Por inducción: si $k = 0$ (5) vale por definición de ψ. Para el paso de la inducción calculamos $\psi(x_{2k+3})$ y $\psi(x_{2k+4})$ usando la formula de intercambio (4):
$$\begin{aligned} \psi(x_{2k+3}) &= \frac{\psi(x_{2k+2})^b \oplus 1}{\psi(x_{2k+1})} = u^{\lambda^k(\lambda+1)b - \lambda^k b} = u^{\lambda^{k+1} b} \\ \psi(x_{2k+4}) &= \frac{\psi(x_{2k+3})^a \oplus 1}{\psi(x_{2k+2})} = u^{\lambda^{k+1}ab - \lambda^k(\lambda+1)} = u^{\lambda^k(\lambda ab - \lambda - 1)} = u^{\lambda^{k+1}(\lambda+1)} \end{aligned}$$
Como $\lambda > 1$ eso da un número infinito de elementos distintos en $\mathcal{U}$.

$ab = 4$ En este caso $\lambda = 1$ es el único eigenvalor entonces cambiamos la definición de ψ:
$$\psi(x_1) = u, \quad \psi(x_2) = u^a.$$
Verificamos la siguiente afirmación por inducción:
$$\psi(x_{2k-1}) = u^{2k-1}, \quad \psi(x_{2k}) = u^{ka}.$$
Para $k \geq 1$ calculamos
$$\begin{aligned} \psi(x_{2k+1}) &= \frac{\psi(x_{2k})^b \oplus 1}{\psi(x_{2k-1})} = \frac{(u^{ka})^b \oplus 1}{u^{2k-1}} = u^{kab-2k+1} = u^{2k+1} \\ \psi(x_{2k+2}) &= \frac{\psi(x_{2k+1})^a \oplus 1}{\psi(x_{2k})} = \frac{(u^{2k+1})^a \oplus 1}{u^{ka}} = u^{2ka+a-ka} = u^{(k+1)a}. \end{aligned}$$

3. Si un patrón de semillas no es 2-finito, por definición existe una semilla $(\tilde{\mathbf{x}}', \tilde{B}')$ con matriz de intercambio $B' = (b'_{ij})$ y $|b'_{ij} b'_{ji}| \geq 4$ para lagunas i, j. La mutación alternante en μ_i y μ_j produce un patrón que después de evaluar todas las variables $x'_k = 1$ con $k \notin \{i, j\}$ coincide con (2). Según 2. entonces, el patrón de semillas contiene un subpatron que no es de tipo finito.

4.4. Tipo A

Ejercicio 4.7. Para probar el Corolario 4.32, pruebe las siguientes afirmaciones:

1. En un $n+3$-ágono hay $\frac{n(n+3)}{2}$ arcos distintos.
2. Sean d y d' dos arcos distintos del $n+3$-ágono. Verifica que las variables de conglomerado asociados son distintos.
3. El número de triangulaciones del $n+3$-ágono es el número de Catalán $C_{n+1} = \frac{1}{n+2}\binom{2n+2}{n+1}$.

Solución:

1. El número de arcos es $\binom{n+3}{2} - (n+3) = \frac{(n+2)(n+3)}{2} - (n+3) = \frac{n(n+3)}{2}$.
2. Si d y d' no se crucen pues existe una triangulación del $n+3$-ágono cuya semilla asociada contiene x y x'. Pues son distintos. Si d y d' se crucen existe una relación de intercambio que corresponde al flip de d a d'. Pues $xx' = M_1 + M_2$ donde M_1 y M_2 son monomios en las variables de una semilla. En el caso $x = x'$ tenemos $x^2 = M_1 + M_2$ que contradice el hecho que las variables de una semilla son algebraicamente independientes.