

§5 Coherencia de signos de c- y g-vectores

Lara Bossinger



Universidad Nacional Autónoma de México, IM-Oaxaca

6 de abril 2022

Contexto [Fomin–Zelevinsky, Cluster algebras IV]

En el caso de $\mathcal{A}_{\text{prin}}$ sean $A_{1;s'}, \dots, A_{n;s'}$ las variables (mutables) de una semilla s' obtenido de s y A_i, X_i las variables iniciales:

$$\mu_{\mathcal{A};s,s'}^*(A_{j;s'}) = A_1^{g_{j1}} \cdots A_n^{g_{jn}} F_{j;s'}(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n)$$

donde $\hat{X}_i = X_i \prod_{j=1}^n A_j^{\epsilon_{i,j}}$, $F_{j;s'} \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$. En el caso \mathcal{X} con variables iniciales X_1, \dots, X_n de s y $X_{1;s'}, \dots, X_{n;s'}$ las de s' tenemos:

$$\mu_{\mathcal{X};s,s'}^*(X_{j;s'}) = X_1^{c_{j1}} \cdots X_n^{c_{jn}}$$

$\rightsquigarrow (g_{j1}, \dots, g_{jn})$ es el ***g*-vector** de A'_j y (c_{j1}, \dots, c_{jn}) el ***c*-vector** de X'_j .

Conjectura (Coherencia de signos)

Para cada $j \in I$ tenemos $c_{j1}, \dots, c_{jn} \geq 0$ o $c_{j1}, \dots, c_{jn} \leq 0$.

Sea $k \in I$, entonces $g_{jk} \geq 0$ para cada $j \in I$, o $g_{jk} \leq 0$ para cada $j \in I$.

Plan

- 1 Coeficientes principales y ejemplo en A_2
- 2 Compactificaciones parciales
- 3 Degeneración de \mathcal{A} a un toro T_{N°
- 4 Recuperando g -vectores en el contexto de [GHKK]
- 5 Coherencia de signos

Coeficientes principales

Dado los datos fijos Γ definimos los **datos fijos con coeficientes principales** Γ_{prin} :

- 1 la latiz $\tilde{N} := N \oplus M^\circ$ con forma bilineal:

$$\{(n_1, m_{,1}), (n_2, m_s)\} := \{n_1, n_1\} + \langle n_1, m_2 \rangle - \langle n_2, m_1 \rangle.$$

- 2 $\tilde{N}_{\text{mut}} := N_{\text{mut}} \oplus \{0\}$

- 3 $\tilde{I} = I_1 \cup I_2$, donde $I_1 = I_2 = I$ y $\tilde{I}_{\text{mut}} := (I_1)_{\text{mut}}$

La \mathcal{A} -variedad con coeficientes principales es

$$\mathcal{A}_{\text{prin}} := \mathcal{A}_{\Gamma_{\text{prin}}} = \bigcup_{v \in \mathcal{T}_s} T_{\tilde{N}^\circ},$$

donde $T_{\tilde{N}^\circ} = T_{N^\circ \oplus M} = T_{N^\circ} \times T_M$.

Ejemplo: coeficientes principales

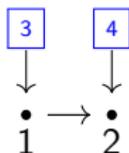
Sea $N = \mathbb{Z}^2 = N_{\text{mut}} = N^\circ$ con forma bilineal definida por $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ con respecto a $s = (e_1, e_2)$. Entonces, $\tilde{N} = N \oplus M$ y

$$\tilde{s} = ((e_1, 0), (e_2, 0), (0, e_1^*), (0, e_2^*)) =: (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4).$$

La matriz que representa la forma bilineal en \tilde{N} es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

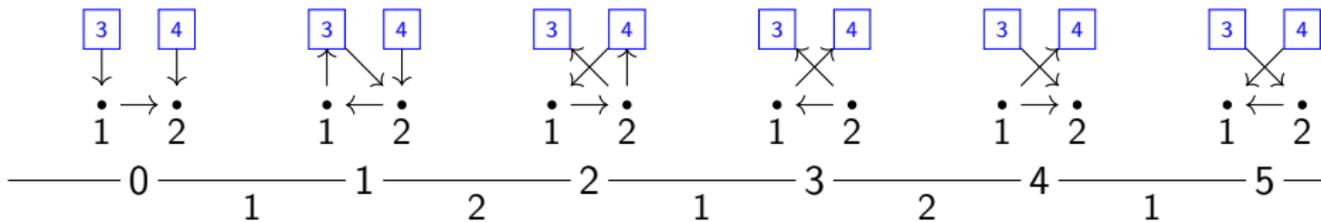
Representada en un carcaj donde $\epsilon_{ij} = \#\{i \rightarrow j\} - \#\{j \rightarrow i\}$ es



Ejemplo: $\mathcal{A}_{\text{prin}}$ en el caso A_2

Definición (Mutación de carcaj)

Q carcaj sin 1 y 2-ciclos. La mutación $\mu_k(Q)$ de Q en k mutable es:
 $\forall i \rightarrow k \rightarrow j$ agrega $i \rightarrow j$, invierte cada flecha en k , y elimina 2-ciclos.



Las coordenadas de toro inicial $T_{\tilde{N}, \tilde{s}}$ son $\tilde{A}_i := z^{\tilde{e}_i^*}$ con \tilde{e}_i^* base de \tilde{M} .
 Bajo la mutación en la dirección k solo cambia \tilde{A}_k según la formula:

$$\tilde{A}'_k \tilde{A}_k = \prod_{i \rightarrow k \in Q} \tilde{A}_i + \prod_{k \rightarrow j \in Q} \tilde{A}_j.$$

Ejemplo: $\mathcal{A}_{\text{prin}}$ en el caso A_2

Notación:

- para $i \in \{1, 2\}$: $z_{\tilde{e}_i}^* = z^{(e_i^*, 0)} =: A_i$,
- para $i \in \{3, 4\}$: $z_{\tilde{e}_i}^* = z^{(0, e_i)} =: X_i$.

\Rightarrow las coordenadas congeladas X_i pertenecen a cada toro en el atlas

Calculamos las expresiones de $\tilde{A}_{i;s'}$ con $i \in \{1, 2\}$

s'	0	1	2	3	4	5
$\tilde{A}_{1;s'}$	A_1	$\frac{X_1+A_2}{A_1}$	$\frac{X_1+A_2}{A_1}$	$\frac{A_1X_2+1}{A_2}$	$\frac{A_1X_2+1}{A_2}$	A_2
$\tilde{A}_{2;s'}$	A_2	A_2	$\frac{A_1X_1X_2+A_2+X_1}{A_1A_2}$	$\frac{A_1X_1X_2+A_2+X_1}{A_1A_2}$	A_1	A_1

$$\rightsquigarrow F_{i;s'} = \tilde{A}_{i;s'}(1, 1, X_1, X_2).$$

Compactificaciones parciales desde variables congeladas

Si $I \neq I_{\text{mut}}$ las coordenadas $A_i = z^{f_i}$ para $i \in I - I_{\text{mut}}$ pertenecen a cada toro T_{N° . Agregamos divisores $\{A_i = 0\}$, $i \in I - I_{\text{mut}}$, es decir reemplazamos el toro $T_{N^\circ, s}$ por

$$T_{N^\circ, s} \subset \text{TV}(\Sigma^s) \cong \mathbb{A}^{|I - I_{\text{mut}}|} \times (k^*)^{|I_{\text{mut}}|},$$

donde $\Sigma^s = \mathbb{R}_{\geq 0} e_i$. Para s' obtenido de s por mutaciones tenemos $\Sigma^{s'} := \mu_{s, s'}^t(\Sigma^s)$. Definimos $\bar{\mathcal{A}} = \bigcup_{v \in \vec{\mathcal{T}}_s} \text{TV}(\Sigma^{s_v})$ con su proyección natural

$$\pi : \bar{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{A}^{|I - I_{\text{mut}}|} \quad \text{con coordenadas } A_i, i \in I - I_{\text{mut}}$$

Conos para $\mathcal{A}_{\text{prin}}$

Para Γ_{prin} tenemos n direcciones congeladas que corresponden a I_2 . Dada una semilla inicial s compactificamos

$$T_{\tilde{N}^{\circ}, s} \subset TV(\Sigma^s)$$

donde $\Sigma^s = \mathbb{R}_{\geq 0}(0, e_i^*) \subset \tilde{N}_{\mathbb{R}}^{\circ}$.

Lema (5.2)

Sea s' una semilla obtenida de s por mutaciones. Entonces, $\Sigma^{s'} = \Sigma^s$.

Prueba: verifica que la tropicalización geométrica $\mu_{s, s'}^t$ fija el cono Σ^s .

Compactificaciones parciales de $\mathcal{A}_{\text{prin}}$

Sean Γ datos fijos, s una semilla y Γ_{prin} los datos fijos con coeficientes principales. Una semilla $s = (e_i : i \in I)$ para Γ determina una semilla de Γ_{prin}

$$\tilde{s} := ((e_i, 0)_{i \in I}, (0, f_i)_{i \in I}).$$

Proposición (B.11)

El espacio $\mathcal{A}_{\text{prin}}$ solo depende de la clase de equivalencia de la semilla inicial $[s]$. Pero la semilla inicial s determina

- 1 una compactificación parcial $\mathcal{A}_{\text{prin}} \subset \bar{\mathcal{A}}_{\text{prin}}^s$, y
- 2 una extensión canónica de cada \mathcal{A} -variable de conglomerado a una variable de conglomerado de $\mathcal{A}_{\text{prin}}$.

Prueba

- ① Para Γ_{prin} tenemos n direcciones congeladas que corresponden a l_2 . Dada una semilla inicial s compactificamos

$$\bar{\mathcal{A}}_{\text{prin}}^s := \bigcup_{v \in \vec{\mathcal{T}}_s} T_{N^\circ, s} \times \mathbb{A}_{X_i, i \in I}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}_{X_i, i \in I}^n$$

donde $X_j = z^{(e_j, 0)}$.

- ② $[s] \leftrightarrow [\tilde{s}]$, para $s' \in [s]$ sea $\tilde{s}' \in [\tilde{s}]$ la semilla correspondiente, entonces

$$\tilde{s}' = ((e'_i, 0)_{i \in I}, (g_i)_{i \in I}), \quad \text{donde } s' = (e'_i)_{i \in I}.$$

Tenemos

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{\text{prin}} & \longleftarrow & \mathcal{A} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ T_M & \longleftarrow & \{1\} \end{array}$$

y la variable \tilde{A}'_i de $\mathcal{A}_{\text{prin}}$ se restringe a la variable A'_i de \mathcal{A} en la fibra del 1.

Degeneración a un toro

Corolario (5.3)

Sea s una semilla y la raíz del árbol \mathcal{T}_s y $\mathcal{A}_{\text{prin}} \subset \bar{\mathcal{A}}_{\text{prin}}^s \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}_{X_i, i \in I}^n$ la compactificación parcial con respecto a las direcciones congeladas l_2 . Entonces, las aplicaciones biracionales entre dos cartas

$$TV(\Sigma^s) \dashrightarrow TV(\Sigma^{s'})$$

son isomorfismos en una vecindad de $0 \in \mathbb{A}_{X_i, i \in I}^n$ y la identidad en la fibra $\pi^{-1}(0)$. En particular, $\pi^{-1}(0) = T_{N^\circ}$.

Prueba

Recuerda, $\tilde{s} = (\tilde{e}_i)_{i \in \tilde{I}} = ((e_i, 0)_{i \in I}, (0, f_i)_{i \in I})$ y la matriz que define $\tilde{p}_1^* : \tilde{N} \rightarrow \tilde{M}^\circ$ con respecto de la base \tilde{s} de \tilde{N} y $((f_i, 0)_{i \in I}, (0, e_i)_{i \in I})$ de \tilde{M}° es $(\epsilon_s \mathbf{1})$.

Sea $\mathfrak{D}_s^{\text{prin}}$ el diagrama de difusión consistente para Γ_{prin} . Las funciones de las paredes iniciales son

$$1 + z^{p_1^*(\tilde{e}_i)} = 1 + z^{(v_i, e_i)}$$

Nota que módulo $X_i = z^{(0, e_i)}$ todas son 1. Es decir, módulo los X_i $\mathfrak{D}_s^{\text{prin}}$ coincide con el diagrama de difusión inicial (que ya es consistente).

Las aplicaciones biracionales $TV(\Sigma^s) \dashrightarrow TV(\Sigma^{s'})$ son definidos por pullback $z^{\tilde{m}} \mapsto z^{\tilde{m}} f^{(\tilde{n}, \tilde{m})}$ donde $\tilde{n} \in \tilde{N}^\circ$, $\tilde{m} \in \tilde{M}^\circ$ y f es una función regular en $TV(\Sigma^{s'})$ y $f \equiv 1 \pmod{X_i}$.

Donde $f \neq 0$ la aplicación $TV(\Sigma^s) \dashrightarrow TV(\Sigma^{s'})$ es un isomorfismo, en particular eso es el caso en una vecindad de $\pi^{-1}(0)$.

Coherencia de signos de c-vectores

Sea $w \in \mathcal{T}_s$ y $\tilde{s}_w = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_{2n})$ la semilla obtenida de \tilde{s} . Entonces \tilde{e}^w es la matriz con entradas

$$\tilde{e}_{ij}^w = \{\tilde{e}_i, \tilde{e}_j\} d_{j \bmod n}, \quad \text{con } i \in [n], j \in [2n]$$

Los **c-vectores** de \tilde{s}_w son las filas de la submatriz con índices de columnas $[n+1, 2n]$.

Corolario (5.5, Coherencia de signos de c-vectores)

Para cada $w \in \mathcal{T}_s$ y cada $1 \leq k \leq n$ las entradas $\tilde{e}_{k,j}^w$ con $n+1 \leq j \leq 2n$ son o todas no negativas o todas no positivas.

Prueba

Sea \tilde{s}_w una semilla y $\tilde{s}_{w'} = \mu_k(\tilde{s}_w)$ que inducen

$$TV(\Sigma_w^s) = (k^*)_{A'_i, i \in I}^n \times \mathbb{A}_{X_i, i \in I}^n \xrightarrow{\mu_k} TV(\Sigma_{w'}^s) = (k^*)_{A''_i, i \in I}^n \times \mathbb{A}_{X_i, i \in I}^n$$

Las coordenadas son relacionadas: $\mu_k^*(X_i) = X_i$, $\mu_k^*(A''_i) = A'_i$ para $i \neq k$ y

$$\mu_k^*(A''_k)A'_k = \prod_{i \in [n]} X_i^{[\tilde{\epsilon}_{k,n+i}^w]_+} \prod_{i \in [n]} A_i^{[\tilde{\epsilon}_{k,i}^w]_+} + \prod_{i \in [n]} X_i^{[-\tilde{\epsilon}_{k,n+i}]_+} \prod_{i \in [n]} A_i^{[-\tilde{\epsilon}_{k,i}^w]_+}$$

donde el lado derecho es cero, μ_k no es un isomorfismo. Pero en $\pi^{-1}(0)$ si es un isomorfismo (Corolario 5.3) por lo tanto no ambos monomios pueden ser no trivial en los X_i .

$$\circ [\tilde{\epsilon}_{k,n+i}^w]_+ = 0 \forall i \quad \circ [-\tilde{\epsilon}_{k,n+i}^w]_+ = 0 \forall i.$$

Fomin–Zelevinsky g -vectores

Tenemos

$$N^\circ \rightarrow N^\circ \oplus M \quad n \mapsto (n, p^*(n))$$

lo cual induce $T_{N^\circ} \rightarrow T_{N^\circ \oplus M} \Rightarrow T_{N^\circ}$ actúa en $\mathcal{A}_{\text{prin}}$.

En coordenadas iniciales $A_i = z^{(f_i, 0)}$ y $X_i = z^{(0, e_i)}$ tenemos

$$t \cdot A_i = \chi^{f_i}(t)A_i = t_i A_i \quad \text{tiene peso } f_i \in M^\circ,$$

$$t \cdot X_i = \chi^{p^*(e_i)}(t)X_i \quad \text{tiene peso } p^*(e_i) \in M^\circ.$$

\Rightarrow monomios de conglomerado son eigenfunciones.

Definición (5.6)

El g -vector con respecto a una semilla s de un monomio de conglomerado de \mathcal{A} es el T_{N° -peso de su extensión a $\mathcal{A}_{\text{prin}}$ determinada por s .

g-vectores en la degeneración

Proposición (5.7)

Sea s una semilla y consideramos $\pi : \bar{\mathcal{A}}_{\text{prin}}^s \rightarrow \mathbb{A}_{X_i, i \in I}^n$. Sea \bar{A} un monomio de conglomerado en $\pi^{-1}(1, \dots, 1) = \mathcal{A}$ y sea A su extensión a $\bar{\mathcal{A}}_{\text{prin}}^s$.

A se restringe a una T_{N° -eigenfunción regular que no se anula en $\pi^{-1}(0) = T_{N^\circ}$ y su peso en M° es el g -vector de \bar{A} con respecto a s .

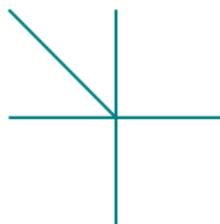
Prueba: $\xRightarrow{\text{Corolario 5.3}}$ suficiente verificar que A es regular en $TV(\Sigma_w^s)$ para $w \in \mathcal{T}_s$ y que se restringe a un carácter en $\pi^{-1}(0)$.

Si \bar{A} es un monomio de conglomerado en s_w y $\tilde{s}_w = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_{2n})$ entonces A es un polinomio de Laurent en $z^{\tilde{f}_1}, \dots, z^{\tilde{f}_n}$, pues no se anula en $TV(\Sigma_w^s)$.

Nota que π es T_{N° -equivariante y la acción de T_{N° fija $0 \in \mathbb{A}^n$. Por lo tanto no cambia el peso de A en $\pi^{-1}(0)$.

g-vectores en A_2

s'	0	1	2	3	4	5
$\tilde{A}_{1;s'}$	A_1	$\frac{X_1+A_2}{A_1}$	$\frac{X_1+A_2}{A_1}$	$\frac{A_1X_2+1}{A_2}$	$\frac{A_1X_2+1}{A_2}$	A_2
$\tilde{A}_{2;s'}$	A_2	A_2	$\frac{A_1X_1X_2+A_2+X_1}{A_1A_2}$	$\frac{A_1X_1X_2+A_2+X_1}{A_1A_2}$	A_1	A_1
$g_{1;s'}$	f_1	$-f_1 + f_2$	$-f_1 + f_2$	$-f_2$	$-f_2$	f_2
$g_{2;s'}$	f_2	f_2	$-f_1$	$-f_1$	f_1	f_1



g-vectores y el conjunto de cámaras de Fock–Goncharov

Definición (5.8)

Sea $\bar{A} = z^m$ un monomio de conglomerado en $T_{N^\circ, s'} \subset \mathcal{A}$ con $s' = (e'_1, \dots, e'_n)$. Nota que $(z^{e'_i})^T(m) = -\langle e'_i, m \rangle \leq 0$.

\Rightarrow después de identificar $\mathcal{A}^\vee(\mathbb{R}^T)$ con $M_{\mathbb{R}, s'}^\circ$, m es un punto en $\mathcal{C}_{s'}^+ \in \Delta_s^+ \subset \mathcal{A}^\vee(\mathbb{R}^T)$. Definimos $g(\bar{A}) := m$.

Corolario (5.9)

$g(\bar{A})$ es el g-vector de \bar{A} con respecto a s .

Coherencia de signos de g -vectores

[Nakanishi–Zelevinsky] la transpuesta de una matriz de g -vectores es una matriz de c -vectores.

Teorema (5.11)

Sea $s = (e_1, \dots, e_n)$ una semilla y $f_i = d_i^{-1} e_i^*$. Para cada semilla s' obtenida de s por mutaciones todas las coordenadas j de todos los g -vectores de las variables de conglomerado de s' escritos en la base f_1, \dots, f_n son o no negativas o no positivas.

Prueba [GHKK]:

Recuerda que los cámaras \mathcal{C}_s^+ son conos simpliciales en el abanico $\Delta_s^+ \subset \mathcal{D}_s$.

Corolario 5.9
 \Rightarrow Los g -vectores de las variables de una semilla s' son generadores de los rayos de $\mathcal{C}_{s'}^+$. Los hiperplanos e_i^\perp son paredes en \mathcal{D}_s .

\Rightarrow los conos \mathcal{C}_s^+ se encuentran o en el lado positivo de e_i^\perp o en el lado negativo.