mid(V) y la (ex-)conjetura de Fock-Goncharov

20 de abril, 2022

Seminario de V. de C.

Fondos

Sea $V = \bigcup_{s \in S} T_{L,s}$ una variedad de conglomerado

$up(V) := \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ su álgebra de funciones regulares

"álgebra de conglomerado superior"

Vimos la construcción de $V^\vee = \bigcup_{s \in S} T_{L^*,s}$ la variedad dual (de Langlands)

Luego con el semi-anillo $\mathbb{Z}^T = (\mathbb{Z}, \max, +)$, hay los <u>puntos tropicales</u> $V^\vee(\mathbb{Z}^T) \cong T_{L^*,s}(\mathbb{Z}^T) \cong L^*$ como conjuntos.

(los mapeos de pegado inducen isomorfismos de $Q_{sf}(T_{L^*}) \rightsquigarrow$ biyecciones de $T_{L^*}(\mathbb{Z}^T)$)

"<u>Inspiración</u>" Para un toro T_L, $\mathbb{C}[T_L] = \Gamma(T_L, \mathcal{O}_{T_L})$ tiene una base "canónica" parametrizado por $\{\text{caracteres}\} = \{\text{monomios } z^\ell \mid \ell \in L^*\} = L^* = T_{L^*}(\mathbb{Z}^T)$, donde $T_{L^*} = T_L^\vee$

$\mathcal{A} = \bigcup_{v \in \overleftrightarrow{\mathbb{T}}_s} T_{N^\circ_{,v}} = \mathcal{A}_\Gamma$ con resp. a Γ (datos fijos)

$up(\mathcal{A}) = \Gamma(\mathcal{A}, \mathcal{O}_\mathcal{A})$

$\mathcal{A}^\vee = \bigcup_{v \in \overleftrightarrow{\mathbb{T}}_s} T_{M^\circ_{,v}} = \mathcal{X}_{\Gamma^\vee}$

$\mathcal{A}^\vee(\mathbb{Z}^T) \cong T_{M^\circ_{,v}}(\mathbb{Z}^T) \cong M^\circ$

Ex-conjetura de Fock-Goncharov Para una var. de cong. V, hay funciones ϑ_q tales que

$$up(V) = \bigoplus_{q \in V^\vee(\mathbb{Z}^T)} \mathbb{C}\,\vartheta_q \quad \text{como} \quad \mathbb{C}\text{-espacio vectorial.}$$

Contraejemplos (GHK, '15) Recuerda $p_2^*: N \to M^\circ / N_{uf}^\perp$, $K := \ker p_2^*$

$n \longmapsto (n' \mapsto \{n, n'\})$ $\quad n' \in N_{uf} \cap N^\circ$

$\mathcal{X} = \bigcup T_{N,s}$

$K \hookrightarrow N$ induce $T_M \to T_{K^*} \overset{\text{glue}}{\rightsquigarrow} \mathcal{X} \to T_{K^*}$ y se puede construir ejemplos con

$$\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_\mathcal{X}) = \mathbb{C}[K] \rightsquigarrow \text{faltan funciones correspondientes a puntos de } N \setminus K \ !$$

Recuerda Un monomio global de V es $f \in \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ tal que $\exists s$, $f|_{T_{L,s}}$ es un carácter. $(\in \mathbb{C}[L^*])$

$ord(V) \subset up(V)$ es el álgebra generada por los monomios globales (á. de c. "ordinaria")

Entonces ciertas funciones regulares en V sí corresponden a puntos de L^*.

Pregunta ¿Cuál es el subconjunto más grande de $L^* \cong V^\vee(\mathbb{Z}^T)$ cuyos elementos corresponden de manera canónica a funciones independientes en $up(V)$? $\rightsquigarrow \Theta$, $mid(V)$

Si se cumple "F F G C" (Fock Goncharov conjecture) se puede describir las funciones regulares por

① $\mathrm{can}(V) = \bigoplus_{q \in V^\vee(\mathbb{Z}^T)} \mathbb{C}\, e_q$ su base canónica

② Una funcion $\alpha : V^\vee(\mathbb{Z}^T)^{\times 3} \to \mathbb{C}$ "structure constants"

$$\theta_p \cdot \theta_q = \sum_{r \in V^\vee(\mathbb{Z}^T)} \alpha(p,q,r)\, \theta_r$$

y se sabe que FFGC aplica a variedades de interés (para teoría de rep.)

T. Magee
① $U \subset SL_n$ $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & * \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$
② $T \cong B/U \to SL_n/U \to SL_n/B \cong \mathrm{Flags}(\mathbb{C}^n)$
③ $\mathrm{Conf}_3^\times(GL_n/U)$ $G \backslash A^{\times 3} = \mathrm{Conf}_3(A)$

Shen-Weng '18 ④ $Gr_k(n)$, $\mathrm{Conf}_n^\times(a)$
$Gr_k(n) = A_\Gamma$, $\mathrm{Conf}_n^\times(a) = A_\Gamma^\vee = \mathcal{X}_{\Gamma^\vee}$

¿ FFGC para $A_\Gamma \Longleftrightarrow$ FFGC para $\mathcal{X}_\Gamma$?

$A_\Gamma \Leftrightarrow A_\Gamma^\vee$?

Teorema 0.3 [GHKK] Sea V uno de $A, \mathcal{X}, A_{\mathrm{prin}}$, con resp. a datos fijos Γ,

ⓐ Hay un conjunto $\Theta \subseteq V^\vee(\mathbb{Z}^T)$, y una función $\alpha : \Theta^{\times 3} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ canónicos t.q. $\mathrm{mid}(V) := \bigoplus_{q \in \Theta} \mathbb{C}\, \theta_q$ es una $\mathbb{C}$-algebra con mult.

$$\theta_p \cdot \theta_q = \sum_{r \in \Theta} \alpha(p,q,r)\, \theta_r$$

ⓑ Θ es un semigrupo afín saturado bajo $V^\vee(\mathbb{Z}^T) \cong L^*$ (dado por elección de semilla) y contiene $\Delta^+(\mathbb{Z})$, los puntos enteros del complejo de conglomerado/g-vectores

ⓒ Hay un mapa $\nu : \mathrm{mid}(V) \to \mathrm{up}(V)$ con imagen polinomios de Laurent positivos y universales. $\nu(q)$ es un monomio global para todo $q \in \Delta^+(\mathbb{Z})$

fenomeno de positividad

Además, ν es inyectivo para A_{prin}, $\mathcal{X}$ (y A con una hipótesis extra).
$\{v_i\} \in$ cono fuertemente convexo

Estrategia ① Construir Θ, α, $\mathrm{mid}(V)$ para $\mathcal{A}_{prin}$

② Usar $\pi : \mathcal{A}_{prin} \longrightarrow T_M$ para aplicar a $\mathcal{A}_t := \pi^{-1}(t)$, $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_e$

③ $\mathcal{X} \cong \mathcal{A}_{prin}/T_{N^\circ}$ donde T_{N°-acción sobre $\mathcal{A}_{prin}$ es dada por

$$\begin{aligned} N^\circ &\longrightarrow N^\circ \oplus M \\ n &\longmapsto (n, p^*(n)) \end{aligned}$$

Se escoge $p^* : N \longrightarrow M^\circ$ para que

$(p^*|_{N^\circ} : N^\circ \longrightarrow M)$

$$\begin{tikzcd} & N_{uf} \arrow[dl] \arrow[dr, "p_1^*"] & \\ N \arrow[rr, "p^*"] \arrow[dr, "p_2^*"'] & & M^\circ \arrow[dl] \\ & M^\circ/N_{uf}^\perp & \end{tikzcd}$$

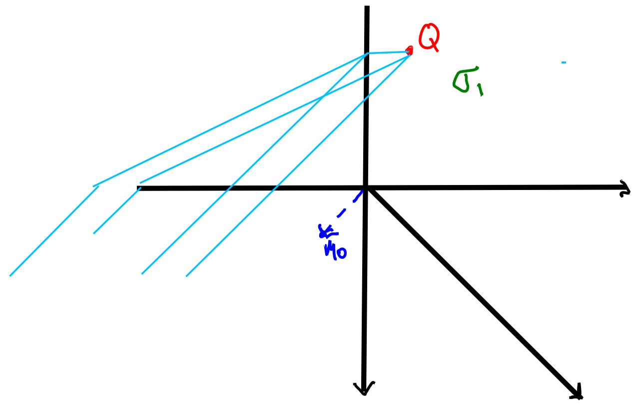
conmuta

Tecnología $\mathcal{A}^\vee_{prin}(\mathbb{R}^T) \cong \widetilde{M}^\circ_{\mathbb{R},\hat{s}}$, el espacio ambiente.

$\Delta^+ \cong \Delta^+_{\hat{s}} \subseteq \widetilde{M}^\circ_{\mathbb{R},\hat{s}}$ el complejo de conglomerado, consiste de cámaras separadas por las paredes de

$\mathrm{supp}(\mathfrak{D}_{\hat{s}}) \subseteq \widetilde{M}^\circ_{\mathbb{R},\hat{s}}$

$$\vartheta_{Q,m_0} = \sum_{\substack{\gamma \\ I(\gamma)=m_0 \\ b(\gamma)=Q}} c(\gamma)\, z^{F(z)}$$



F es de "final".

Prop. 7.1 Fija $m_0 \in \mathcal{A}^\vee_{prin}(\mathbb{Z}^T) \cong \widetilde{M}^\circ \subset \widetilde{M}^\circ_{\mathbb{R},s}$. Si existe $Q \in \sigma$, $\sigma \in \Delta^+$ tal que:

hay un numero finito de líneas quebradas con $I(\gamma) = m_0$, $b(\gamma) = Q$,

entonces es así para todo $Q \in \sigma' \in \Delta^+$ genérico. ($\Rightarrow$ ϑ_{Q,m_0} es un poli. de Laurent pos. y universal)

Definición 7.2 Sea $\Theta \subset \mathcal{A}^\vee_{prin}(\mathbb{Z}^T)$ el conjunto de m_0's t.q. existe $Q \in \Delta^+$,

$$\left|\{\gamma \text{ línea quebrada} \mid I(\gamma) = m_0,\ b(\gamma) = Q\}\right| < \infty$$

Breve resumen de sección 6

$\gamma : (-\infty, 0] \to \hat{M}^\circ_{\mathbb{R},s}$ (para A_{prin})

- $\Big|\overbrace{\{(\gamma_1,\gamma_2) \mid I(\gamma_1)=p_1,\ I(\gamma_2)=p_2,\ b(\gamma_i)=z,\ F(\gamma_1)+F(\gamma_2)=q\}}^{(*)}\Big| < \infty$

  ⇝ se define $\alpha_z(p_1,p_2,q) = \sum_{\substack{(\gamma_1,\gamma_2)\\ (*)}} c(\gamma_1)c(\gamma_2)$, pero de hecho es independiente de z (cerca de q).

  ⇝ $\alpha := \alpha_z$

- Los $\vartheta_{Q_\sigma,m}$ por distintos $Q_\sigma \in \sigma$ se pegan, y hay elementos $\vartheta_m \in \overbrace{\mathrm{up}(\bar{A}^s_{prin}) \otimes \underset{\mathbb{C}[N^s]}{\mathbb{C}[N]}}$ que son linealmente independientes y se restringen a éstas.

  $\mathrm{can}(A_{prin})$ ↳ compactificación parcial $\cup\ \mathrm{up}(A_{prin})$

Teorema 7.5 (0.3 para A_{prin}) Pongamos $\Delta^+(\mathbb{Z}) := \bigcup_{\sigma\in\Delta^+} \sigma \cap A^\vee_{prin}(\mathbb{Z}^T)$.

(1) $\Delta^+(\mathbb{Z}) \subseteq \Theta$

(2) Por $p_1, p_2 \in \Theta$, $\alpha(p_1,p_2,r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, es $\neq 0$ por finitos r's y $\alpha(p_1,p_2,r) \neq 0 \Rightarrow r \in \Theta$

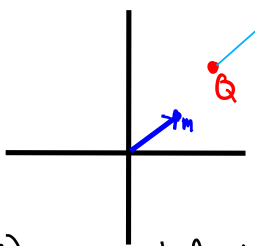
(3) $\Theta \subset \hat{\tilde{M}}^\circ_s$ es un monoide saturado

(4) La pareja $(\{\vartheta_q\}_{q\in\Theta}, \alpha)$ define un álgebra $\mathrm{mid}(A_{prin})$,

$\mathrm{ord}(A_{prin}) \subset \mathrm{mid}(A_{prin}) \subset \mathrm{up}(A_{prin})$

$m \mapsto \vartheta_{q(m)}$

Dem (1) Cor. 3.9 dice que $\vartheta_{Q,m} = z^m$ por todo $m \in \sigma \cap M^\circ$, $\sigma \in \Delta^+$, y $Q \in \mathrm{Int}(\sigma)$ ⇝ para $m \in \Delta^+$ tenemos un Q t.q. hay una sola lin. quebr.



(2) $\alpha \geq 0$ por definición 6.2, y el producto de polinomios pos. es un polinomio pos. (de Laurent).

(3) Finitas líneas quebradas para kq ⇒ finitas líneas quebradas para q.

m monomio final para q ⇒ km monomio final para kq

(4) Prop 6.4

Con $K = \ker p_2^*$, $K^\circ := K \cap N^\circ$, y la inclusion $K^\circ \hookrightarrow N^\circ$ induce una acción $T_{K^\circ} \curvearrowright \mathcal{A} = \bigcup_s T_{N^\circ,s}$.

Con coeficientes principales $\tilde{K}^\circ$ es el núcleo del aplicación

$$\tilde{N}^\circ = N^\circ \oplus M \to N_{uf}^*$$
$$(n,m) \mapsto p_2^*(n) - m$$

$\rightsquigarrow \tilde{K}^\circ \hookrightarrow \tilde{N}^\circ$ induce $T_{\tilde{K}^\circ} \curvearrowright \mathcal{A}_{prin} = \bigcup_s T_{\tilde{N}^\circ,s}$

Prop 7.7 Los $\vartheta_q \in up(\mathcal{A}_{prin})$ para $q \in \Theta$ son eigenfunciones para la acción de $T_{\tilde{K}^\circ}$

Para un monomio de conglomerado, el g-vector $g(f)$ era el T_{N°-peso de su extensión a $\mathcal{A}_{prin}$ determinado por s.

$\hookrightarrow \mathcal{A} \in up(\mathcal{A})$

Lemma 7.10 (a) El g-vector de f como elemento de $\mathcal{V}^\vee(\mathbb{Z}^T) = M^\circ_s$ no depende de semilla

Se define $w : \mathcal{A}^\vee_{prin}(\mathbb{Z}^T) \to M^\circ$
$\quad (m,n) \mapsto m - p^*(n)$

$\mathcal{A}^\vee_{prin}(\mathbb{Z}^T) \cong \tilde{M}^\circ = M^\circ \oplus N$

(b) Para $m \in \Delta^+_{\mathcal{A}_{prin}}(\mathbb{Z}) \cap w^{-1}(0)$, ϑ_m es T_{N° invariante $\rightsquigarrow$ define un monomio global de $up(\mathcal{X})$ $= up(\mathcal{A}_{prin})^{T_{N^\circ}}$ y todos surgen así

$\mathcal{X} = \mathcal{A}_{prin}/T_{N^\circ}$

$\rightsquigarrow$ $\boxed{\Theta(\mathcal{X}) := \Theta(\mathcal{A}_{prin}) \cap w^{-1}(0), \quad mid(\mathcal{X}) := \bigoplus_{m \in \Theta(\mathcal{X})} \mathbb{C}\vartheta_m = mid(\mathcal{A}_{prin})^{T_{N^\circ}}}$

Para $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_t$ usamos $\rho^T : \mathcal{A}^\vee_{prin}(\mathbb{Z}^T) \to \mathcal{A}^\vee(\mathbb{Z}^T)$
$\quad (m,n) \mapsto m$

$\boxed{\Theta(\mathcal{A}) := \rho^T(\Theta(\mathcal{A}_{prin})), \quad mid(\mathcal{A}_t) = mid(\mathcal{A}_{prin}) \otimes_{\mathbb{C}[N]} \mathbb{C} = \bigoplus_{m \in \Sigma(M^\circ)} \mathbb{C}\vartheta_m}$

$\Sigma : \mathcal{A}^\vee(\mathbb{Z}^T) \to \mathcal{A}^\vee_{prin}(\mathbb{Z}^T)$
$M^\circ \quad m \mapsto (m,0) \quad M^\circ \oplus N$

Question 7.17 ¿Es $\mathrm{mid}(\Lambda_{prin}) = \mathrm{vp}(\Lambda_{prin})$ siempre?

Pasaría si $\Theta = \Lambda^{\vee}_{prin}(Z^T)$, pero a la vez esto implica que $\Theta(X) = \ell^{\vee}(Z^T)$, lo cual no es muy común.

Adelante Condiciones que garantizan que $\Theta = \Lambda^{\vee}_{prin}(Z^T)$, $\mathrm{mid} = \mathrm{vp}$