Diagramos de difusión

Seminario Variedades de Conglomerado

[§1, GHKK] 1 marzo 2022

La hipótesis de la inyectividad:

$p_i^*: N_{mut} \longrightarrow M^\circ,\ n \longmapsto \{n, -\}$ es inyectiva

→ dado una semilla la matriz $\tilde{B}_s$ determina p_i^*

(por ejemplo, se satisface
con coef. principales)

Recuerda:

Γ datos fijos, $s = (e_i : i \in I)$

$\{\ ,\ \}: N \times N \longrightarrow \mathbb{Q}$

$N = (e_i : i \in I)$, $N_{mut} = (e_i : i \in I_{mut})$

$N^\circ = \langle d_i e_i : i \in I \rangle$

$M^\circ = \langle f_i : i \in I \rangle$ $\qquad f_i = d_i^{-1} e_i^*$

$M = \langle d_i f_i : i \in I \rangle$

$$v_i = \{e_i, -\} = \sum_{j \in I} \varepsilon_{ij} d_j f_j \in M^\circ$$

Monoides y álgebras de Lie

* $N^+ = N_s^+ := \{ \sum_{i\in I_{mut}} a_i e_i : a_i \geq 0 , \sum a_i > 0 \}$
* $d : N \to \mathbb{Z}$ tal que $d(n) > 0$ $\forall n \in N^+$
* $\sigma \subseteq M_{\mathbb{R}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ y $P := S_{\sigma^\vee} = \sigma \cap M^\circ$ tal que $p_1^*(e_i) \in P^\times =: J$

  $\hookrightarrow$ $J \subseteq k[P]$ define un ideal monomial
* $\widehat{k[P]} := \varprojlim k[P]/J^p$, para $u_1,\dots,u_s$ generadores primitivos de los rayos de σ $\quad \widehat{k[P]} = k[[X^{u_1},\dots,X^{u_s}]]$

Definición: $\Theta k[P] := k[P] \otimes_{\mathbb{Z}} N^\circ$ es el módulo de log-derivadas y un álgebra de Lie:

$$f\partial_n(z^m) = (f\otimes n)(z^m) := f\langle n,m\rangle z^m \quad , \quad f\in k[P],\ n\in N^\circ,\ m\in P$$

$$[z^m\partial_n, z^{m'}\partial_{n'}] = z^{m+m'}\partial_{\langle n,m'\rangle n' - \langle n',m\rangle n}$$

Nota: $\xi \in \Theta \widehat{k[P]} \Rightarrow \exp(\xi) \in Aut_k(\widehat{k[P]})$ (Taylor series)

Lie subalgebras: $\mathfrak{g} := \bigoplus_{n\in N^+} \mathfrak{g}_n$ donde $\mathfrak{g}_n = \langle z^{p_1^*(n)}\partial_n \rangle \subset \Theta k[P]$ 1-dim,

$\mathfrak{g}^{>k} := \bigoplus_{d(n)>k} \mathfrak{g}_n$ y $\mathfrak{g}^{\leq k} := \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{>k}$ nilpotent

Grupos de Lie: $G^{\leq k} := \exp(\mathfrak{g}^{\leq k})$ nilpotent, $G := \exp(\mathfrak{g}) = \varprojlim G^{\leq k}$ pro-nilpotent

Para $n_0 \in N^+$ definimos

$$\boxed{\begin{aligned} \mathfrak{g}^{\parallel}_{n_0} &= \bigoplus_{k>0} \mathfrak{g}_{k\cdot n_0} \subset \mathfrak{g} \\ G^{\parallel}_{n_0} &= \exp(\mathfrak{g}^{\parallel}_{n_0}) \subset G \end{aligned}}$$

Lie subalgebra

Lie subgrupo

Lema 1.3: Para $n_0 \in N^+$ el grupo $G^{\parallel}_{n_0} \subset Aut_k(\widehat{k[P]})$ es el subgrupo de automorfismos determinados por elementos $f = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{k m_0} \in \widehat{k[P]}$, $m_0 = p_1^*(n_0)$ $\quad p_f$

n_0' generador primitivo de $(\mathbb{R}_{\geq 0} n_0) \cap N^\circ$

$$\boxed{p_f(z^m) = f^{\langle n_0', m\rangle} z^m}$$

Paredes y diagramas de difusión

Definición 1.4 Una pared en $M_{\mathbb{R}}$ es una pareja $(\mathfrak{d}, g_{\mathfrak{d}})$

(1) $g_{\mathfrak{d}} \in G_{n_0}^{\parallel}$ para algún $n_0 \in N^+$ $\longrightarrow$ la función de la pared

(2) $\mathfrak{d} \subset n_0^{\perp} \subset M_{\mathbb{R}}$ es un cono poliedral convexo de dim. $\operatorname{rank}(N)-1$ ↪ no nec. estrictamente

↪ el soporte de la pared

Definición 1.6 Un diagrama de difusión $\mathfrak{D}$ para N^+ y g es una colección de paredes t.q. para cada $k>0$ $\exists$ un número finito $(\mathfrak{d}, g_{\mathfrak{d}}) \in \mathfrak{D}$ con el imagen de $g_{\mathfrak{d}}$ en $G^{\leq k} \neq$ identidad

El soporte de $\mathfrak{D}$ es $\operatorname{Supp}(\mathfrak{D}) := \bigcup_{\mathfrak{d} \in \mathfrak{D}} \mathfrak{d}$

y el loco singular es $\operatorname{Sing}(\mathfrak{D}) = \bigcup \operatorname{frontera}(\mathfrak{d}) \cup \bigcup_{\dim(\mathfrak{d}_1 \cap \mathfrak{d}_2) = n-2} (\mathfrak{d}_1 \cap \mathfrak{d}_2)$

Una conjunta es una celula de dim $n-2$ t.q. $\operatorname{Sing}(\mathfrak{D}) = \bigcup$ conjuntas

Producto ordenado de caminos y coherencia

Sea $\gamma : [0,1] \longrightarrow M_{\mathbb{R}} \setminus \mathrm{Sing}(\mathfrak{D})$ una inmersión suave, $\gamma(0), \gamma(1) \notin \mathrm{Supp}(\mathfrak{D})$
y $\gamma \perp \mathfrak{d}$ $\forall\, \mathfrak{d} \in \mathfrak{D}$

$\forall\, k > 0$ $\exists$ $0 < t_1 \leq \cdots \leq t_s < 1$ y $\mathfrak{d}_i \in \mathfrak{D}$ tal que $g_{\mathfrak{d}_i} \in G^{\leq k} \setminus \{id\}$, $\gamma(t_i) \in \mathfrak{d}_i$

definimos $\quad p^k_{\gamma,\mathfrak{D}} := g_{\mathfrak{d}_s}^{\varepsilon_s} \cdots g_{\mathfrak{d}_1}^{\varepsilon_1}$ $\qquad \varepsilon_i = -\mathrm{sgn}\left(\langle n_0, \gamma'(t_i) \rangle \right)$
$n_0 \in N^+$ t.q. $\mathfrak{d} \subset n_0^{\perp}$

y $\quad p_{\gamma,\mathfrak{D}} := \lim\limits_{k \to \infty} p^k_{\gamma,\mathfrak{D}} \in G$

Definición 1.8 ⋆ $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$ diagramas de difusión son equivalentes si $p_{\gamma,\mathfrak{D}} = p_{\gamma,\mathfrak{D}'}$ $\forall \gamma$

⋆ $x \in M_{\mathbb{R}}$ es general si existe a lo mejor un $n_0 \in N^+$: $x \in n_0^{\perp}$

definimos $\quad g_x(\mathfrak{D}) := \prod\limits_{\mathfrak{d} \ni x} g_{\mathfrak{d}} \in G_{n_0}^{\parallel}$

Lema 1.9 $\mathfrak{D} \sim \mathfrak{D}' \iff g_x(\mathfrak{D}) = g_x(\mathfrak{D}')$ $\forall\, x \in M_{\mathbb{R}}$ general

Definición 1.10 $\mathfrak{D}$ es coherente si $p_{\gamma,\mathfrak{D}}$ solo depende de $\gamma(0)$ y $\gamma(1)$

Definición 1.11 Una pared $\mathfrak{d} \in n_0^{\perp}$ es entrando si $p_1^*(n_0) \in \mathfrak{d}$
de lo contrario es saliendo

la dirección de $\mathfrak{d}$

Unicidad de diagramas de difusión coherentes

Para Γ datos fijos y s una semilla definimos

$$\mathfrak{D}_{in,s} := \{ (e_i^{\perp}, 1+z^{v_i}) : i \in I_{mut} \}$$

$$v_i = \{e_i, -\} \in M^{\circ} = \sum_{j \in I} \varepsilon_{ij} d_j f_j$$

Teorema 1.12

Existe un diagrama de difusión $\mathfrak{D}_s$ tal que

(1) $\mathfrak{D}_s$ es coherente

(2) $\mathfrak{D}_s \supset \mathfrak{D}_{in,s}$

(3) $\mathfrak{D}_s \setminus \mathfrak{D}_{in,s}$ solo consiste de paredes salientes

Además, todos los $\mathfrak{D}_s$ que cumplen (1)-(3) son equivalentes

Teorema 1.13

$\mathfrak{D}_s$ es equivalente a un diagrama de difusión con la propiedad que todas las paredes $(\mathfrak{d}, f_{\mathfrak{d}})$ satisfacen

$$f_{\mathfrak{d}} = (1+z^m)^c, \quad m = p^*(n) \quad n \in N^+ \quad c > 0$$

$\hookrightarrow$ todos los coeficientes de $f_{\mathfrak{d}}$ son positivos.

Ejemplo

$N = \mathbb{Z}^2 = N^\circ = N_{mut}$, $d_1 = d_2 = 1$ y $\{\cdot,\cdot\} : N \times N \longrightarrow \mathbb{Q}$ definida por $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\{e_1, e_2\}$ base de N y $\{f_1, f_2\}$ base dual

$$\Rightarrow \quad \mathfrak{D}_{in,s} = \{(e_1^\perp, 1+A_2), (e_2^\perp, 1+A_1^{-1})\} \qquad A_i = z^{f_i}$$

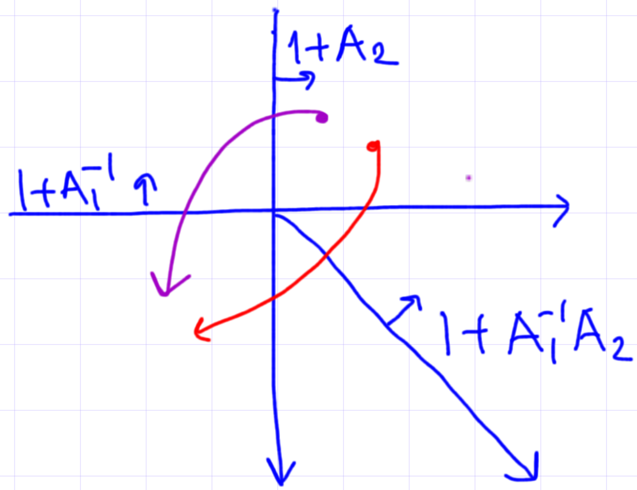
$p_1^*(e_1) = \binom{0}{1} \in e_1^\perp$

$\rightsquigarrow$ dirección $-\binom{0}{1}$

$p_1^*(e_2) = \binom{-1}{0} \in e_2^\perp$

$\to$ dirección $\binom{1}{0}$

$p_1^*(e_1+e_2) = \binom{-1}{1} \notin \mathbb{R}_{\geq 0}\binom{1}{-1}$



$N^+ = \mathbb{R}_{\geq 0}\{e_1, e_2\}$

$\widehat{k[P]} = k[[A_1^{-1}, A_2]]$

$\langle n, n_0\rangle \cdot (-\langle \gamma'(t), n_0\rangle)$

$$\mathfrak{D}_s = \mathfrak{D}_{in,s} \cup \{(\mathbb{R}_{\geq 0}\tbinom{1}{-1}, 1+A_1^{-1}A_2)\}$$

$A_1 \longmapsto A_1(1+A_2) = A_1 + A_1A_2$

$\longmapsto A_1 + A_1A_2(1+A_1^{-1})$

$= \boxed{A_1 + A_1A_2 + A_2}$

$A_1 \mapsto A_1 \mapsto A_1(1+A_1^{-1}A_2)$

$= A_1 + A_2$

$\longmapsto \boxed{A_1(1+A_2) + A_2}$ ✓

$A_2 \mapsto A_2 \mapsto A_2(1+A_1^{-1}) = \boxed{A_2 + A_1^{-1}A_2}$

$A_2 \mapsto A_2(1+A_1^{-1}) = A_2 + A_1^{-1}A_2$ $\quad \langle \binom{-1}{1}, \binom{1}{1}\rangle = 0$

$\mapsto A_2(1+A_1^{-1}A_2) + A_1^{-1}A_2 = A_2 + A_1^{-1}A_2^2 + A_1^{-1}A_2$

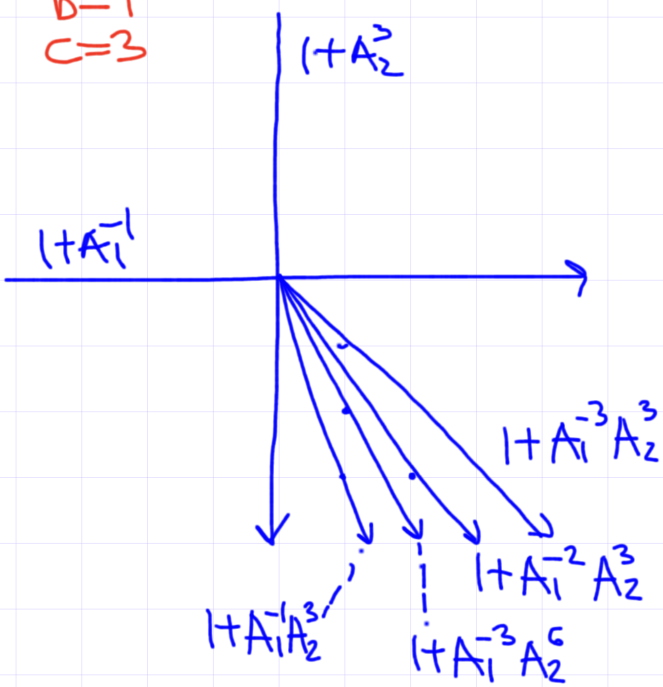
$\mapsto A_2 + A_1^{-1}A_2^2(1+A_2)^{-1} + A_1^{-1}A_2(1+A_2)^{-1} = \boxed{A_2 + A_1^{-1}A_2}$ ✓

Ejemplo

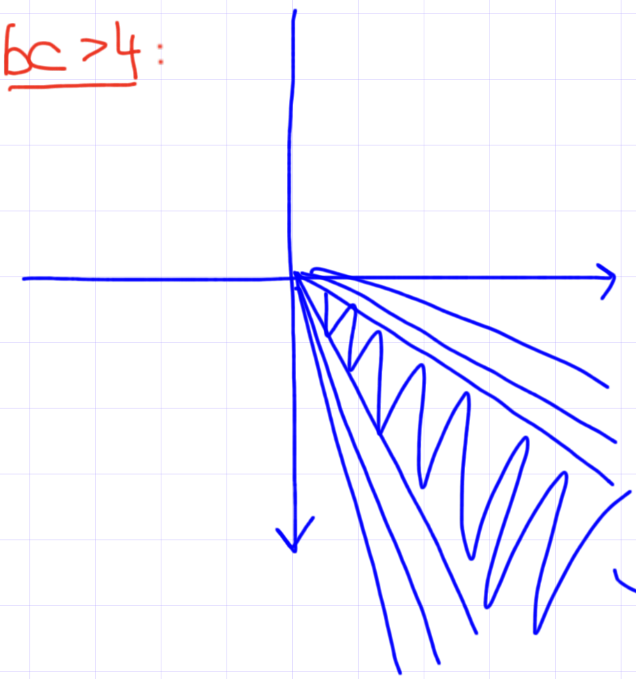
$N = \mathbb{Z}^2 = N_{uf}$, $N^\circ = \{be_1, ce_2\}$, $d_1 = b$, $d_2 = c$, $s = (e_1, e_2)$

$$\mathfrak{D}_{in,s} = \{(e_1^\perp, 1 + A_2^c), (e_2^\perp, 1 + A_1^{-b})\}$$

G_2:
$b = 1$
$c = 3$



$bc > 4$:



$\mathfrak{D}_s \setminus \mathfrak{D}_{in,s}$ es invariante bajo $\begin{pmatrix} -1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = S_1$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & -1 \end{pmatrix} = S_2$

es decir $(\mathfrak{d}, f_\mathfrak{d}) \in \mathfrak{D}_s \Rightarrow (S_i(\mathfrak{d}), f_\mathfrak{d}(z^{S_i(m)})) \subset \mathfrak{D}_s$

También $S_2(e_1^\perp, 1 + A_1^{-b})$ y $S_1(e_2^\perp, 1 + A_2^c)$ son paredes de $\mathfrak{D}_s$

$bc < 4 \Rightarrow \mathfrak{D}_s$ es finito

$bc \geq 4 \Rightarrow \mathfrak{D}_s$ es infinito y los rayos convergen a $-(bc \pm \sqrt{bc(bc-4)})/2b$

Construcción del diagrama de difusión coherente

$\mathcal{C}^+ := \{ m \in M_{\mathbb{R}} : m|_{N^+} \geq 0 \}$ y $\mathcal{C}^- = \{ m \in M_{\mathbb{K}} : m|_{N^+} \leq 0 \}$

recuerda: paredes generan hiperplanos en $n_0^\perp$, $n_0 \in N^+ \Rightarrow \operatorname{Supp}(\mathfrak{D}) \cap (\mathcal{C}^\pm)^\circ = \phi$

$\mathfrak{D}$ coherente $\Rightarrow p_{\gamma,\mathfrak{D}}$ para γ camino de $\mathcal{C}^+$ a $\mathcal{C}^-$ no depende de $\gamma \to$ ni de $\gamma(0), \gamma(1)$
(se muestra con una descomposición de $\mathfrak{g}$ y mod $\mathfrak{g}^{>k}$)

$\Rightarrow$ así se obtiene un elemento bien definido $p_{+,-} \in G$ (solo depende de $\mathfrak{D}$)

Teorema 1.17 (Kontsevich-Soibelman) $\left\{ \begin{matrix} \text{clases de equiv.} \\ \text{de diag. de difusión} \\ \text{coherentes} \end{matrix} \right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{matrix} \text{asignaturas} \\ p_{+,-} \text{ a } \mathfrak{D} \end{matrix} \right\}$

Proposición 1.20 $\exists$ una biyección de conjuntos $G \xrightarrow{\Psi} \prod_{n_0 \in N^+ \text{ primitivo}} G_{n_0}^{\parallel}$

Teorema 1.21 Sea $\mathfrak{D}$ un diagrama de difusión coherente para $p_{+,-} \in G$
(2:) $\mathfrak{D} \sim \mathfrak{D}'$ con una sola pared en $n_0^\perp \supset p^*(n_0)$ $\forall\, n_0 \in N^+$ cuya función es $\Psi(p_{+,-})_{n_0}$
(3) Sea $\mathfrak{D}_{in} := \{ (n_0^\perp, \Psi(p_{+,-})_{n_0}) : n_0 \in N^+ \text{ primitivo} \}$
$\Longrightarrow$ $\mathfrak{D} \sim \mathfrak{D}'$ coherente t.q. $\mathfrak{D}' \supset \mathfrak{D}_{in}$ y $\mathfrak{D}' \setminus \mathfrak{D}_{in}$ solo contiene paredes salientes. Además, $\mathfrak{D}'$ es único con esta propiedad
(4) Clases de equivalencia ~~de~~ diagramas de difusión coherentes son determinadas de las paredes entrante.

Del caso general al caso de conglomerado

Teorema 1.21 (3) $\Rightarrow$ Teorema 1.12 Sea $g_i = 1 + z^{v_i} \in G$ para $i \in I_{mut}$

$\Rightarrow \mathfrak{D}_{in,s} = \{(e_i^{\perp}, g_i) : i \in I_{mut}\}$

Prop. 1.20 $\Rightarrow \exists!\ g \in G$ tal que $\varphi(g)_n = \begin{cases} g_i & n = e_i,\ i \in I_{mut} \\ 1 & \text{de lo contrario} \end{cases}$

Sea $p_{+,-} = g$ y aplica Teorema 1.21 (3), entonces $\mathfrak{D}_{in} = \mathfrak{D}_1$

Construcción algorítmica de diagramas de difusión

Definición: ⋆ $\mathfrak{D}_k \subset \mathfrak{D}$ el conjunto finito de paredes (∂, f_∂) t.q. f_∂ en $G^{\leq k}$ no es trivial $\to$ diagrama de difusión para N^+ y $g^{\leq k}$

⋆ $\mathfrak{D} \sim_k \mathfrak{D}'$ son equivalentes hasta el orden k si $\mathfrak{D}_k \subset \mathfrak{D}$ y $\mathfrak{D}'_k \subset \mathfrak{D}'$ son equivalentes para $g^{\leq k}$

Objetivo: Construir el diagrama $\mathfrak{D}$ del Teorema 1.21

IDEA: Construir una secuencia $\tilde{\mathfrak{D}}_1 \subset \tilde{\mathfrak{D}}_2 \subset \cdots$ de diagramas finitos tal que $\tilde{\mathfrak{D}}_k \sim_k \mathfrak{D}_k \subset \mathfrak{D}$ y $\tilde{\mathfrak{D}} := \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{\mathfrak{D}}_k$ es equiv. a $\mathfrak{D}$.

Fijamos $\tilde{\mathfrak{D}}_1 = (\mathfrak{D}_{in})_1$ y $\tilde{\mathfrak{D}}_{k+1} = \tilde{\mathfrak{D}}_k \cup \left((\mathfrak{D}_{in})_{k+1} \setminus (\mathfrak{D}_{in})_k \right) \cup \bigcup_{j \text{ junta } \perp} \mathfrak{D}[j]$

La mutación de diagramas de difusión

Γ datos fijos, s semilla, $k \in I_{mut}$, $s' = \mu_k(s)$, $\mathfrak{g}_s$ y $\mathfrak{g}_{s'}$ las algebras de Lie

Definición 1.22: $H_k^+ = \{ m \in M_{\mathbb{R}} : \langle e_k, m \rangle \geq 0 \}$ y $H_k^- = \{ m \in M_{\mathbb{R}} : \langle e_k, m \rangle \leq 0 \}$

definimos $T_k : M^\circ \to M^\circ$

$$T_k(m) = \begin{cases} m + v_k \langle d_k e_k, m \rangle & m \in H_k^+ \\ m & m \in H_k^- \end{cases}$$

tropicaliza

$$\boxed{\begin{array}{l} \mu_{k,A}^*(z^m) = z^m (1 + z^{v_k})^{-\langle d_k e_k, m \rangle} \\ \mu_{k,A} : T_{N^\circ} \dashrightarrow T_{N^\circ} \end{array}}$$

Sean $T_k^\pm$ los mapeos lineales

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Definimos } T_k(\mathfrak{D}_s) \ni \partial_k' = (e_k^\perp, 1 + z^{-v_k}) \text{ y } \forall (\partial, f_\partial) \in \mathfrak{D}_s \\ \dim \partial \cap H_k^\pm \neq \operatorname{rank} N - 1 \quad (T_k^\pm(\partial \cap H_k^\pm), T_k^\pm(f_\partial)) \in T_k(\mathfrak{D}_s) \end{array}}$$

$$e_i' = \begin{cases} e_i + [\varepsilon_{ik}]_+ e_k & i \neq k \\ -e_k & i = k \end{cases} \qquad f_i' = \begin{cases} f_i & i \neq k \\ -f_k + \sum [-\varepsilon_{kj}]_+ f_j, & i = k \end{cases}$$

$\Rightarrow (e_k')^\perp = \partial_k^\perp$ y $v_k' = -v_k$ pues $v_k' = \{ \partial_k', - \} = \sum_{i \in I} \varepsilon_{ki}' d_i f_i' = -\sum_{i \in I} \varepsilon_{ki} d_i f_i$

Teorema 1.24 Sup. que p_1^* sea inyectiva $\Rightarrow$ $T_k(\mathfrak{D}_s)$ es un diagrama de difusión coherente para $\mathfrak{g}_{s'}$ y $N_{s'}^+$. Además, $T_k(\mathfrak{D}_s) \sim \mathfrak{D}_{s'}$ → fácil

porque $\mathfrak{D}_s$ lo es

tienen las mismas paredes entrantes (Teorema 1.12)

Problema: las funciones f_∂ viven en $\widehat{k[P]}$ resp. $\widehat{k[P']}$ $P \neq P'$

se necesita un monoide $\overline{P}$ que contiene P y P'

La estructura de cámaras

Recuerda: $\mathcal{C}_s^{\pm} = \{m \in M_{\mathbb{R}} : \langle e_i, m \rangle \overset{\leq}{\geq} 0 \ i \in I_{mut}\}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{C}_s^{\pm}$ son cerraduras de componentes conexas en $M_{\mathbb{R}} \setminus \mathrm{Supp}(\mathfrak{D}_s)$

$\mathcal{C}_{\mu_k(s)}^{\pm}$ ———— " ———— $M_{\mathbb{R}} \setminus \mathrm{Supp}(\mathfrak{D}_{\mu_k(s)})$

$\Rightarrow T_k^{-1}(\mathcal{C}_{\mu_k(s)}^{\pm})$ ———— " ———— $M_{\mathbb{R}} \setminus \mathrm{Supp}(\mathfrak{D}_s)$

Entonces $T_k^{-1}(\mathcal{C}_{\mu_k(s)}^{+})$ y $\mathcal{C}_s^{+}$ comparten una faceta en $e_k^{\perp} = (e_k')^{\perp}$

Recuerda: $\vec{\mathfrak{T}}_s$ el árbol $|I_{mut}|$-valente orientado con fuente en $0 \leftrightarrow s$

$\forall v \in \vec{\mathfrak{T}}_s$ vértice $\exists!$ camino $0 \xrightarrow{k_1} \cdots \xrightarrow{k_r} v$ que define

$T_v := T_{k_r} \circ \cdots \circ T_{k_1} : M^{\circ} \longrightarrow M^{\circ}$ la tropicalización de $\mu_{k_r} \circ \cdots \circ \mu_{k_1}$

Teorema 1.24 $\Rightarrow$ $T_v(\mathfrak{D}_s) = \mathfrak{D}_{s_v}$ s_v semilla en $v \in \vec{\mathfrak{T}}_s$

Definimos $\boxed{\mathcal{C}_v^{\pm} := T_v^{-1}(\mathcal{C}_{s_v}^{\pm})} \subset M_{\mathbb{R}} \setminus \mathrm{Supp}(\mathfrak{D}_s)$ cerradura de comp. con.

Ejercicio: Aún $\mu_k(\mu_k(s)) \neq s$ tenemos una correspondencia 1:1 entre $\mathcal{C}_v^{\pm}$ y v

Comentario: En general $\bigcup_{v \in \mathfrak{T}_s} \mathcal{C}_v^{\pm} \subset M_{\mathbb{R}} \setminus \mathrm{Supp}(\mathfrak{D}_s)$ no es denso.

Definición 1.32: $\Delta_s^{\pm} = \{\mathcal{C}_v^{\pm} \subset M_{\mathbb{R}} \setminus \mathrm{Supp}(\mathfrak{D}_s) : v \in \vec{\mathfrak{T}}_s\}$

el conjunto de las cámaras de conglomerado