Variedades toricas

Seminario Variedades de conglomerado

Febrero 9 2022

Bibliografia: Cox, Little, Schenck "Toric Varieties", capitulos 1, 2, 3

Toros algebraicos

$(\mathbb{C}^*)^n$ es una variedad afín y con la multiplicación:

$$(t_1, \dots, t_n) \cdot (s_1, \dots, s_n) = (t_1 s_1, \dots, t_n s_n)$$

es un grupo multiplicativo.

Definición: Un toro T es una variedad afín isomorfa a $((\mathbb{C}^*)^n, \cdot)$.

Los caracteres de un toro T son morfismos $\chi : T \longrightarrow \mathbb{C}^*$ que son homomorfismos de grupos.

Ejemplo: $m \in M \cong \mathbb{Z}^n$ define $\chi^m : (\mathbb{C}^*)^n \longrightarrow \mathbb{C}^*$, $\chi^m(t_1, \dots, t_n) = t_1^{m_1} \cdots t_n^{m_n}$

↳ todos los caracteres son de esta forma y forman un grupo libre abeliano de rango finito $\rightsquigarrow$ M es la latiz de caracteres.

Los cocaracteres o subgrupos de un parámetro son morfismos $\lambda : \mathbb{C}^* \longrightarrow T$ que son homomorfismos de grupos.

Ejemplo: $u \in N \cong \mathbb{Z}^n$ define $\lambda^u : \mathbb{C}^* \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^n$, $\lambda^u(t) = (t^{u_1}, \dots, t^{u_n})$

↳ todos los cocaracteres son de esta forma $\rightsquigarrow$ N latiz de co-caracteres

M y N son latices duales: para $m \in M$ y $u \in N$ tenemos

$$\chi^m \circ \lambda^u : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*, \quad t \longmapsto t^l \qquad l \in \mathbb{Z}$$

Definimos $\langle m, u \rangle := l$

Además: $T \cong N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$ definido por $u \otimes t \longmapsto \lambda^u(t)$, Notación: $T = T_N$

Variedades toricas

Definición: Una variedad algebraica irreducible V es tórica si contiene un toro $T_N \cong (\mathbb{C}^*)^n$ como un conjunto abierto (Zariski) tal que la acción de T_N es si mismo se extiende a un morfismo

$$T_N \times V \longrightarrow V$$

Ejemplos:

- $(\mathbb{C}^*)^n$, $\mathbb{C}^n$, $V(x^3-y^2) \subset \mathbb{C}^2$ que contiene $\{(t^2,t^3) : t \in \mathbb{C}^*\} \cong \mathbb{C}^*$

  ↳ variedades toricas afines

- $\mathbb{P}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \mathbb{C}^*$ donde $\lambda . (a_0, \dots, a_n) := (\lambda a_0, \dots, \lambda a_n)$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$

  contiene el toro

  $$T_{\mathbb{P}^n} = \mathbb{P}^n \setminus V(x_0 \cdots x_n) = \{(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{P}^n : a_0 \cdots a_n \neq 0\}$$
  $$= \{(1, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{P}^n : (t_1, \dots, t_n) \in (\mathbb{C}^*)^n\} \cong (\mathbb{C}^*)^n$$

  la latiz de caracteres es $\{(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} : \sum a_i = 0\}$

  latiz de cocaracteres es $\mathbb{Z}^{n+1} / \mathbb{Z}(1, \dots, 1)$

  ↳ variedad torica proyectiva

Construcciones de variedades toricas afines

I. Sea $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subset M$ y definimos $\Phi_{\mathcal{A}} : T_N \longrightarrow \mathbb{C}^s$
de $t \longmapsto (\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t))$

La variedad torica afin asociada a $\mathcal{A}$ es $Y_{\mathcal{A}} := \overline{\operatorname{Im}(\Phi_{\mathcal{A}})} \subset \mathbb{C}^s$

$\hookrightarrow$ $\Phi_{\mathcal{A}}(T_N) =: T = Y_{\mathcal{A}} \cap (\mathbb{C}^*)^s$ es su toro.

Proposición 1.1.8 La latiz de caracteres de T es $\mathbb{Z}\mathcal{A} \subseteq M$

II. $\mathbb{C}^s = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s] \Rightarrow Y_{\mathcal{A}} = V(I_{\mathcal{A}}) \subset \mathbb{C}^*$, $I_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]$

Tenemos $0 \longrightarrow L \longrightarrow \mathbb{Z}^s \longrightarrow \mathbb{Z}\mathcal{A} \subset M$

L: nucleo

$e_i \longmapsto m_i \quad 1 \leq i \leq s$

Entonces, $I_{\mathcal{A}} = \langle x^{\alpha} - x^{\beta} : \alpha, \beta \in \mathbb{N}^s, \alpha - \beta \in L \rangle$ es un ideal primo generado de binomios $\rightarrow$ ideal torico

Ejercicio: Dado un ideal torico I determina el conjunto $\mathcal{A} \subset M$ t.q. $I = I_{\mathcal{A}}$.

Construcciones de variedades afines

III. $\mathcal{A}=\{m_1,\dots,m_s\}$ determina un semigrupo afín [conjunto con una operación binaria asociativa y conmutativa y finitamente generado]

$\hat{M}$

$$\mathbb{N}\mathcal{A}=\left\{\sum_{i=1}^{s} a_m m_i : a_m\in\mathbb{N}\right\}$$

Su álgebra del semigrupo es $\mathbb{C}[\mathbb{N}\mathcal{A}]:=\mathbb{C}[X^{m_1},\dots,X^{m_s}]$

Ejemplo: M es un semigrupo afín y dada una base $\{e_1,\dots,e_n\}$

$$\mathbb{C}[M]=\mathbb{C}[t_1^{\pm1},\dots,t_n^{\pm1}] \quad \text{con } X^{e_i}=t_i$$

Proposición: $S\subset M$ un semigrupo afín:

- $\mathbb{C}[S]$ es un dominio y finitamente generado como $\mathbb{C}$-algebra.
- $\operatorname{Spec}(\mathbb{C}[S])$ es una variedad afín tórica cuyo toro tiene la latiz de caracteres $\mathbb{Z}S$.
- Si $S=\mathbb{N}\mathcal{A} \Rightarrow \operatorname{Spec}\mathbb{C}[S]=Y_{\mathcal{A}}$.

Ejemplo: • T_N tiene latiz de caracteres M: $\quad T_N=\operatorname{Spec}\mathbb{C}[M]$

$\Rightarrow$ M define la base de monomios de $\mathbb{C}[M]$ y $\mathbb{C}[M]$ es el anillo de funciones en T_N

Conos y variedades tóricas afines

- $V = V(xy - zw) \subset \mathbb{C}^4$ es una variedad tórica afín pues $(xy - zw) \subset \mathbb{C}[x,y,z,w]$ es un ideal tórico
  $\rightsquigarrow$ $(1, 1, -1, -1)$ genera una subálaliz $L \subset \mathbb{Z}^4$.
  Queremos $A : \mathbb{Z}^4 \longrightarrow M \cong \mathbb{Z}^3$ t.q. $0 \to L \to \mathbb{Z}^4 \xrightarrow{A} M$
  $\rightsquigarrow$ e.g. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $V = Y_{\mathcal{A}}$ con $\mathcal{A} = \{e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2 - e_3\}$

Definición:

Sea $\sigma \subset N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ un cono poliedral y fin. generado.
Su cono dual es

$$\sigma^\vee = \{ m \in M : \langle m, u \rangle \geq 0 \ \forall u \in \sigma \}$$

$(\sigma^\vee)^\vee = \sigma$, $\tau \subset \sigma$ una cara $\Rightarrow$ $\tau^\vee \supset \sigma^\vee$

Definimos $S_\sigma := \sigma^\vee \cap M$ un semigrupo afín (finitamente generado si σ es racional, es decir $\exists\, S \subset N$ t.q. $\sigma = \mathrm{Cono}(S)$)

$\Rightarrow$ $U_\sigma := \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma])$ es una variedad tórica afín.

Variedades tóricas y abanicos

Def: Un abanico $\Sigma \subset N_\mathbb{R}$ es una colección finita de conos $\sigma \subset N_\mathbb{R}$:

(1) σ es estrictamente convexo y racional
(2) $\sigma \in \Sigma$ y $\tau \subset \sigma$ una cara $\Rightarrow$ $\tau \in \Sigma$
(3) $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma \Rightarrow \sigma_1 \cap \sigma_2$ es una cara común de σ_1 y σ_2

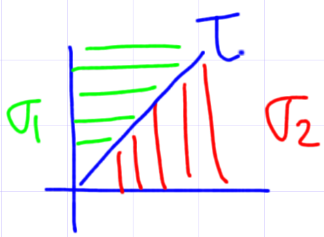
Idea: Pegar las variedades tóricas afines $\{U_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$

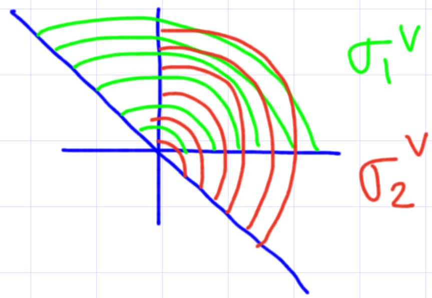
Proposición: Sea $\tau \leq \sigma$ una cara tal que $\tau = \sigma \cap H_m$, $m \in \sigma^\vee$ y $H_m = \{u \in N_\mathbb{R} : \langle u, m \rangle = 0\}$. Entonces,

$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}(-m)$ y $\mathbb{C}[S_\tau] = \mathbb{C}[S_\sigma]_{\chi^m}$ es la localización.

Además, si $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2 \Rightarrow U_{\sigma_1} \supseteq U_\tau \subseteq U_{\sigma_2}$ y $S_\tau = S_{\sigma_1} + S_{\sigma_2}$

Ejemplo:





$\tau^\vee = \sigma_1^\vee \cup \sigma_2^\vee$

$\mathbb{C}[S_{\sigma_1}] = \mathbb{C}[t_1, t_1^{-1}t_2]$

$\mathbb{C}[S_{\sigma_2}] = \mathbb{C}[t_2, t_1, t_2^{-1}]$

$$\mathbb{C}[S_{\sigma_1}]_{t_1^{-1}t_2} = \mathbb{C}[S_{\sigma_1} - \tbinom{-1}{1}M] \cong \mathbb{C}[S_\tau] \cong \mathbb{C}[S_{\sigma_2} - \tbinom{1}{-1}M] = \mathbb{C}[S_{\sigma_2}]_{t_1 t_2^{-1}}$$

nos da un isomorfismo $g_{\sigma_1,\sigma_2} : (U_{\sigma_1})_{\chi^m} \simeq (U_{\sigma_2})_{\chi^{-m}}$

La variedad torica de un abanico

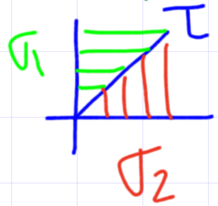
Teorema.

Sea $\Sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ un abanico. La variedad X_Σ obtenida de pegar las variedades toricas afines $\{ U_\sigma : \sigma \in \Sigma \}$ por los morfismos $g_{\sigma_1,\sigma_2} : (U_{\sigma_1})_{\chi^m} \xrightarrow{\sim} (U_{\sigma_2})_{\chi^{-m}}$ definidos anteriormente para σ_1, σ_2 t.q. $\sigma_1 \cap \sigma_2$ es una faceta en común, es una variedad torica normal y separada.

normal $\to$ los anillos locales $\mathcal{O}_{X,p}$, $p \in X$ son normales

separada $\to$ $\mathrm{Im}(X \to X \times X) \subset X \times X$ es cerrado (Hausdorff)

Ejemplo:

$\Sigma =$ 

$$X_\Sigma = U_{\sigma_1} \cup_{U_\tau} U_{\sigma_2}$$

$\to$ pegados a lo largo de $U_{\sigma_1} \hookleftarrow U_\tau \hookrightarrow U_{\sigma_2}$

Variedades tóricas proyectivas: construcciones

I. $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subset M$ y $\Phi_{\mathcal{A}} : T_N \longrightarrow \mathbb{C}^s$ puede ser compuesto con la proyección $\pi : (\mathbb{C}^*)^s \longrightarrow T_{\mathbb{P}^{s-1}} \subset \mathbb{P}^{s-1}$

Entonces, $X_{\mathcal{A}} := \overline{\operatorname{Im}(\pi \circ \Phi_{\mathcal{A}})} \subset \mathbb{P}^{s-1}$ es una variedad tórica proyectiva definida por
$$T_N \longrightarrow \mathbb{P}^{s-1}$$
$$t \longmapsto (t^{m_1}, \dots, t^{m_s})$$

Sea $\widehat{X_{\mathcal{A}}}$ el cono afín de $X_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{P}^{s-1}$ entonces los siguientes son equiv.:

(a) $Y_{\mathcal{A}} = \widehat{X_{\mathcal{A}}}$

(b) $I_{\mathcal{A}} = I(X_{\mathcal{A}})$

(c) $I_{\mathcal{A}}$ es homogeneo

(d) $\exists\, u \in N$ y $k > 0$: $\langle m_i, u \rangle = k \quad \forall\, i = 1, \dots, s$

Ejemplo: $\binom{1}{m_1}, \dots, \binom{1}{m_s} \in \mathbb{Z} \times M$

La latiz de characteres del toro de $X_{\mathcal{A}}$ es $\mathbb{Z}'\mathcal{A} := \{\sum a_i m_i : a_i \in \mathbb{Z}, \sum a_i = 0\}$

Las pieza afines de $X_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{P}^{s-1}$: recuerda $U_i = \{x \in \mathbb{P}^{s-1} : x_i \neq 0\}$ entonces $U_i \cap X_{\mathcal{A}} = Y_{\mathcal{A}_i} = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[\mathbb{N}\mathcal{A}_i])$ donde $\mathcal{A}_i = \mathcal{A} - m_i$

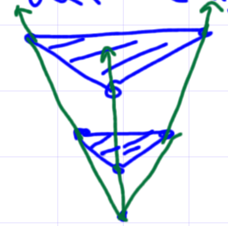
Politopos y variedades tóricas proyectivas

Def: Un politopo $P \subset M_{\mathbb{R}}$ es equivalentemente la envolvente convexa de un conjunto $S \subset M_{\mathbb{R}}$ finito $\rightsquigarrow P = \mathrm{Conv}(S)$, o la intersección de un número finito de semiespacios cerrados y hiperplanos.

Un politopo $P \subset M_{\mathbb{R}}$ es

- **latiz** si $S \subset M$
- **normal** si $\underbrace{kP \cap M + lP \cap M}_{\text{suma de Minkowski } A+B := \{a+b \,:\, a\in A,\, b\in B\}} = (k+l)P \cap M$

P es normal $\iff$ $(P \cap M) \times \{1\}$ son los generadores del semigrupo $C(P) \cap M \times \mathbb{Z}$ donde $C(P)$ es el cono sobre P : $2P$



- **muy amplio** si $\forall\, m \in P$ vértice $\mathbb{N}(P \cap M - m)$ (el semigrupo generado por $\{m' - m : m' \in P \cap M\}$) es **saturado** $\longrightarrow$ S saturado si $km \in S \Rightarrow m \in S$ $(k \in \mathbb{N})$

Proposición: latiz y normal $\Rightarrow$ muy amplio

Definición: Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un politopo de dim. n que es muy amplio y latiz. Definimos

$$X_P := X_{P \cap M} \subset \mathbb{P}^{s-1} \quad \text{donde } |P \cap M| = s.$$

El abanico normal y variedades tóricas proyectivas

Sea $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un politopo latiz de dim. n.

Definimos Σ_P el abanico normal de P como el abanico cuyos conos maximales son los conos $\sigma_v \subset N_{\mathbb{R}}$ duales de

$$\sigma_v^{\vee} := \mathrm{Cono}(P \cap M - v) \quad \text{para cada } v \in P \cap M \text{ vértice.}$$

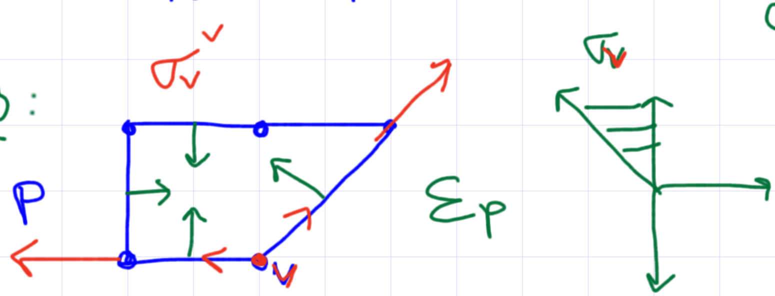
Lema: $\forall k \in \mathbb{N}_{>0}$ $\Sigma_P = \Sigma_{kP}$

$$\{\text{vértices de } P\} \xleftrightarrow{1:1} \{\text{vértices de } kP\}$$

$$v \longmapsto kv$$

además: $\sigma_v = \sigma_{kv}$

Ejemplo:



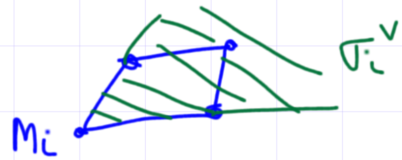
Proposición: Sea $P \subset N_{\mathbb{R}}$ un politopo latiz n-dimensional. Entonces

$$X_P \cong X_{\Sigma_P}.$$

Teorema:

(a) $\forall\, m_i \in P\cap M$ vértice: $X_P \cap U_i = U_{\sigma_i} = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\sigma_i^\vee \cap M])$
es una pieza afín de X_P, donde $\sigma_i \subset N_{\mathbb{R}}$ es un cono n-dim.
y el cono dual de

$$\sigma_i^\vee = \mathrm{Cone}(P\cap M - m_i)$$



(b) el toro de X_P es T_N y
su latíz de caracteres es M

↳ cada politopo n-dim., latíz y muy amplio $P \subset N_{\mathbb{R}}$ define una compactificación de T_N

Definición: $P \subset M_{\mathbb{R}}$ un politopo de dim. n y latíz. Definimos
$X_P = X_{kP\cap M}$ donde kP es muy amplio.

↳ $\dim P \geq 2 \Rightarrow kP$ muy amplio $\forall\, k \geq n-1$

Corolario: Si kP y lP son muy amplios, $k \neq l$
entonces $X_{kP} \subset \mathbb{P}^{|kP\cap M|-1}$ y $X_{lP} \subset \mathbb{P}^{|lP\cap M|-1}$
pero son pegados de las mismas piezas afines U_{σ_i}, $m_i \in P$ vértice