

g-vectores de coordenadas  
de Plücker

Carolina Melo Lopez



Mini-Taller  
"Álgebras de conglomerado"

Semestre 2021-2

Proyecto final

## \* Contexto

**Grassmanniana:**  $Gr_{n,k} = Gr_k(\mathbb{C}^n) = \{V \subset \mathbb{C}^n / \dim V = k\}$  ( $1 \leq k \leq n$ )

Ejemplo:  $V = \langle (1, 0, -1, -2), (0, 1, 3, 2) \rangle \in Gr_2(\mathbb{C}^4)$

$Gr_{k,n} = Mat_{k,n}^* / GL(k)$ , donde  $Mat_{k,n}^* = \{A_{k \times n} / \text{rango}(A) = k\}$  y  $GL(k) = \{A_{k \times k} / \det(A) \neq 0\}$

**Coordenada de Plücker:** Dado un subconjunto  $J$  de  $[n]$  de  $k$  elementos, la coordenada de Plücker  $P_J(A)$  es el menor de  $A$  de tamaño  $k \times k$  determinado por el conjunto  $J$







Ejemplo:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ,

$$P_{\{1,3\}} \cdot P_{\{2,4\}} = P_{\{1,2\}} \cdot P_{\{3,4\}} + P_{\{1,4\}} \cdot P_{\{2,3\}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Cada punto  $v \in \text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$  tiene un representante  $A_{k \times n}$

Ejemplo:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \end{bmatrix}$ <p style="text-align: center;">↓</p> 	$\begin{bmatrix} 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$ <p style="text-align: center;">↓</p> 	$\begin{bmatrix} 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ <p style="text-align: center;">↓</p> 
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$ <p style="text-align: center;">↓</p> 	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ <p style="text-align: center;">↓</p> 	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ <p style="text-align: center;">↓</p> 

$$\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n) = \bigsqcup_{J \in \binom{[n]}{k}} \Omega_J$$

donde  $\Omega_J = \{v \in \text{Gr}_k(\mathbb{C}^n) / \text{pivotes aparecen en las columnas } J\}$

## Diagramas de Young y coordenadas de Plücker

$\mathcal{P}_{k,n}$  es el conjunto de diagramas de Young que se pueden formar dentro de un rectángulo  $(n-k) \times k$ .

Sea  $\mu \in \mathcal{P}_{k,n} \Rightarrow \phi: \mathcal{P}_{k,n} \longrightarrow \binom{[n]}{n-k}$   
 $\mu \longmapsto \{\text{pasos sur de } \mu\}$

$\psi: \mathcal{P}_{k,n} \longrightarrow \binom{[n]}{k}$   
 $\mu \longmapsto \{\text{pasos oeste de } \mu\}$

Ejemplo:  $\mathcal{P}_{2,4}$ : diagramas de Young dentro de un rectángulo  $2 \times 2$ .

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ \hline 4 \ 3 \end{array} \Rightarrow \{1, 2\}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \Rightarrow \{1, 3\}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \Rightarrow \{2, 3\}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \Rightarrow \{2, 4\}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \Rightarrow \{1, 4\}$$

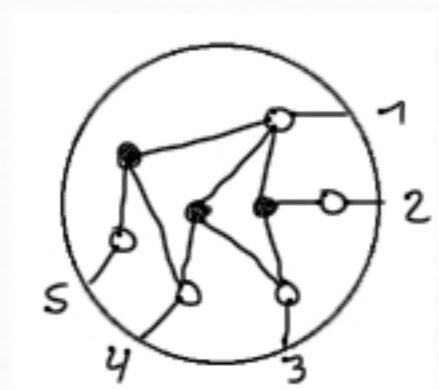
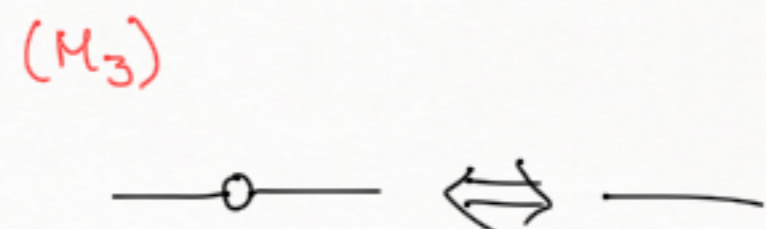
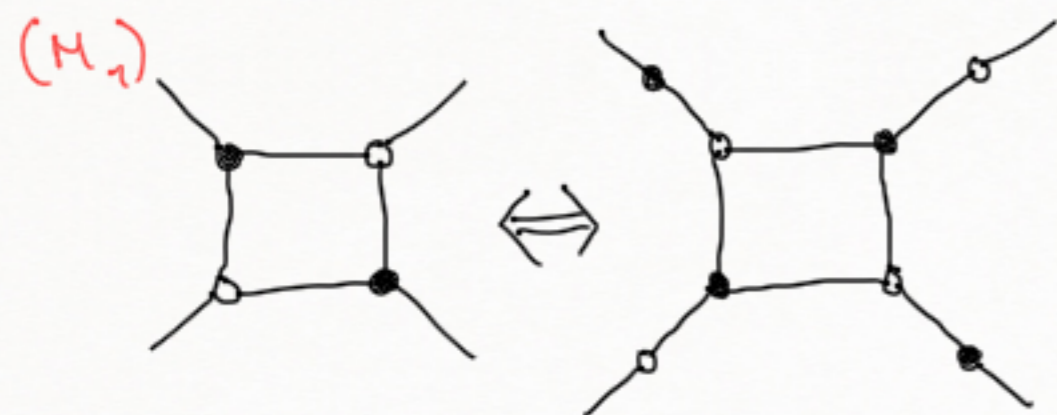
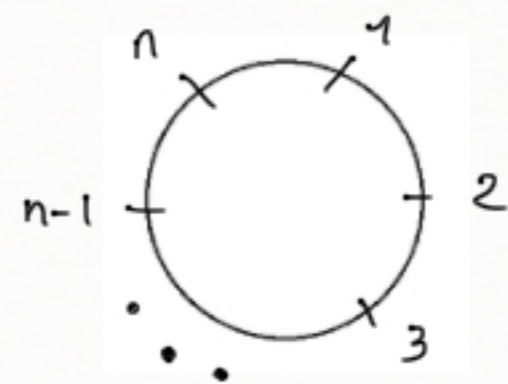
$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \Rightarrow \{3, 4\}$$

# Gráfica plábica (Grafo planar bicolorado)

\* Se dibuja dentro de un disco

\* Tiene  $n$  vértices en la frontera del disco, etiquetados con  $1, \dots, n$  en orden de las manecillas del reloj


\* Todos los vértices internos se colorean usando negro o blanco.

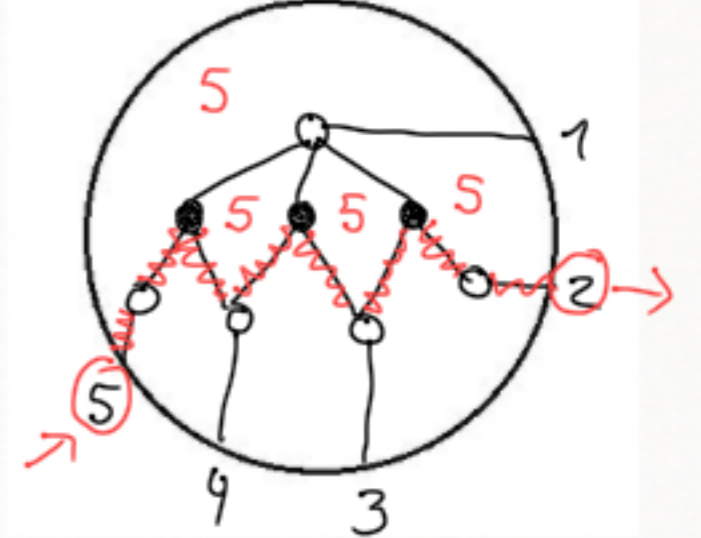
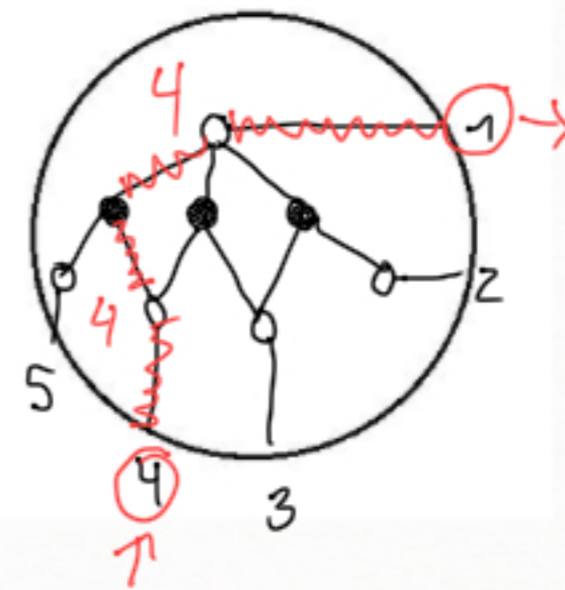
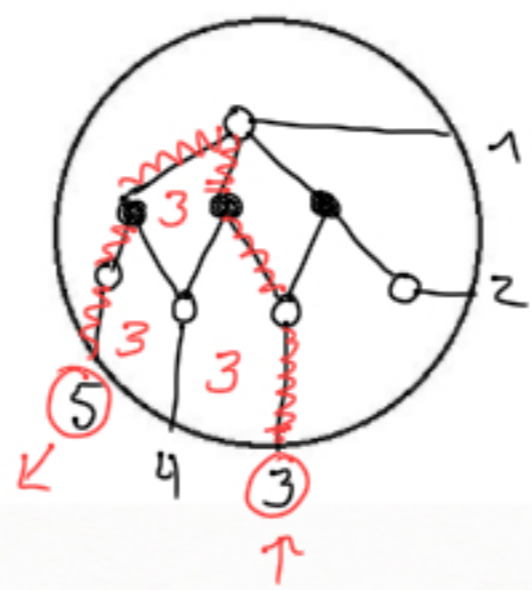
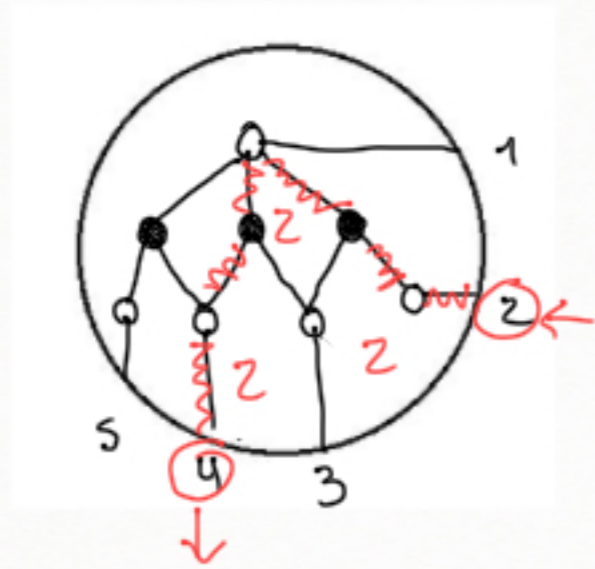
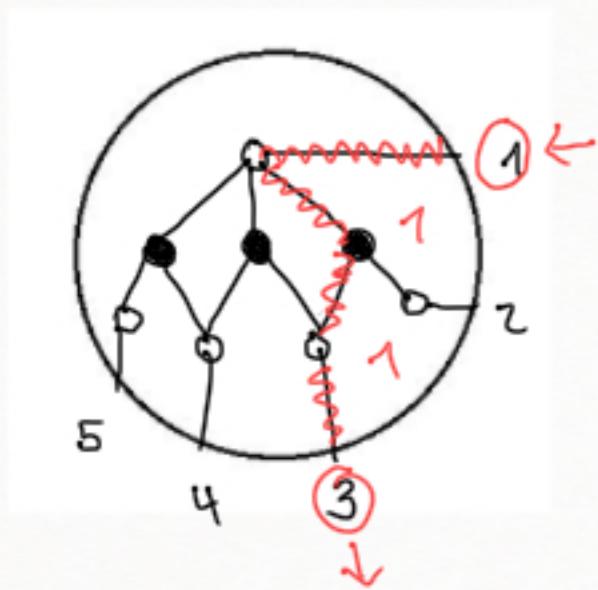


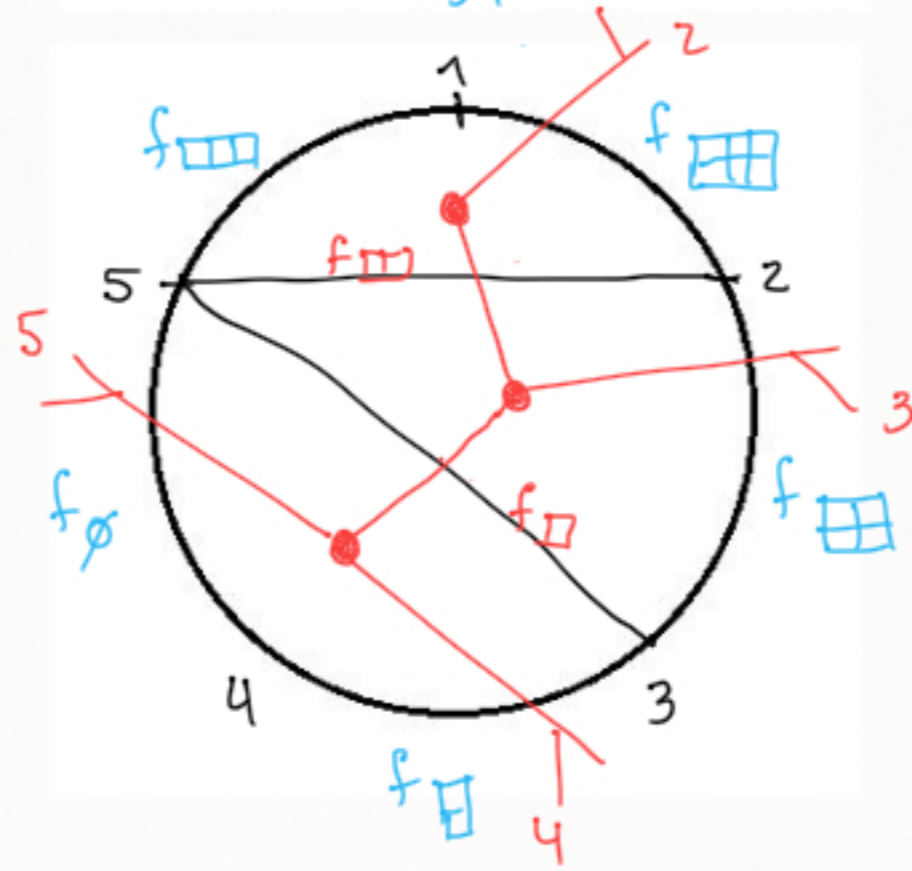
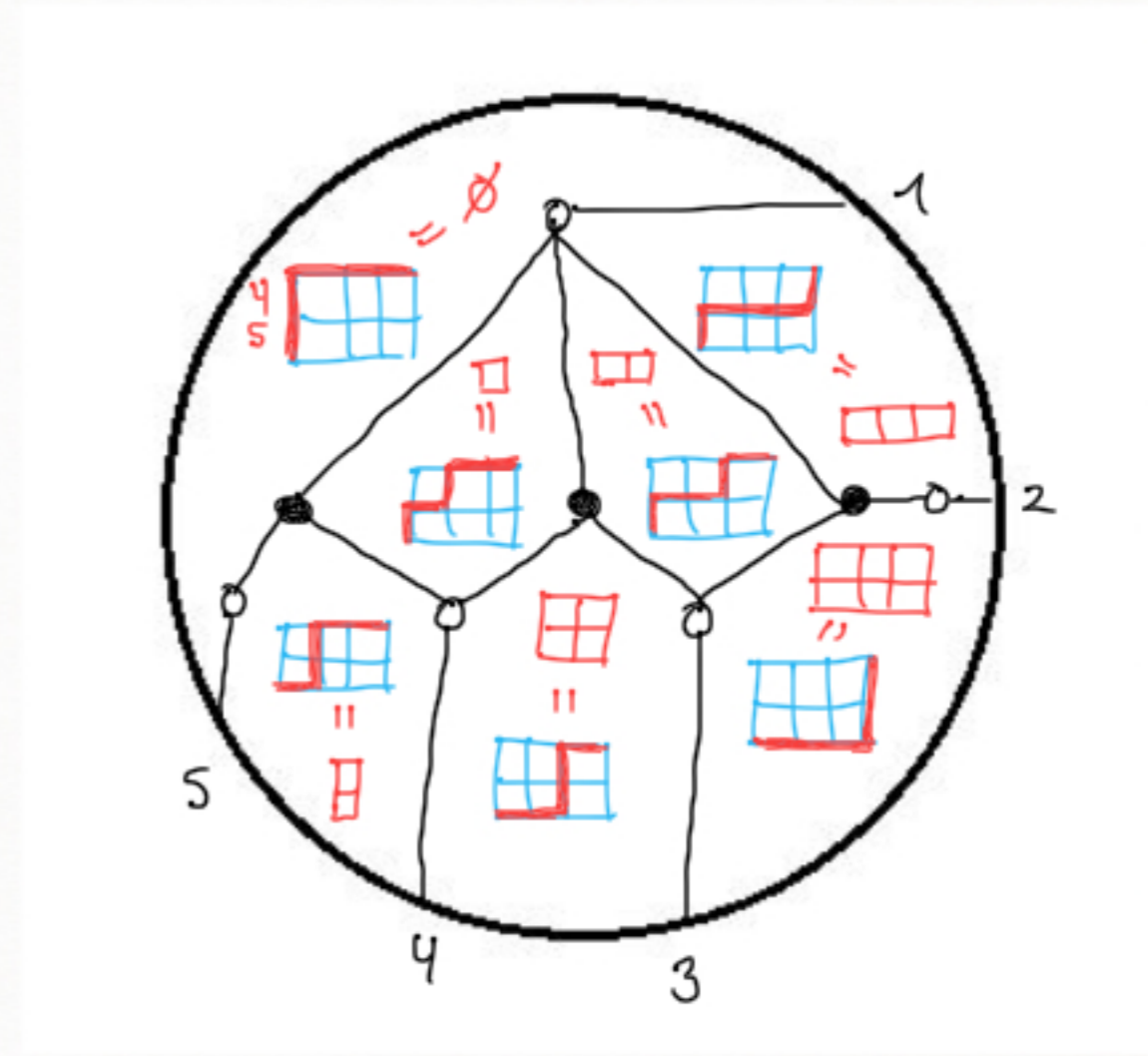
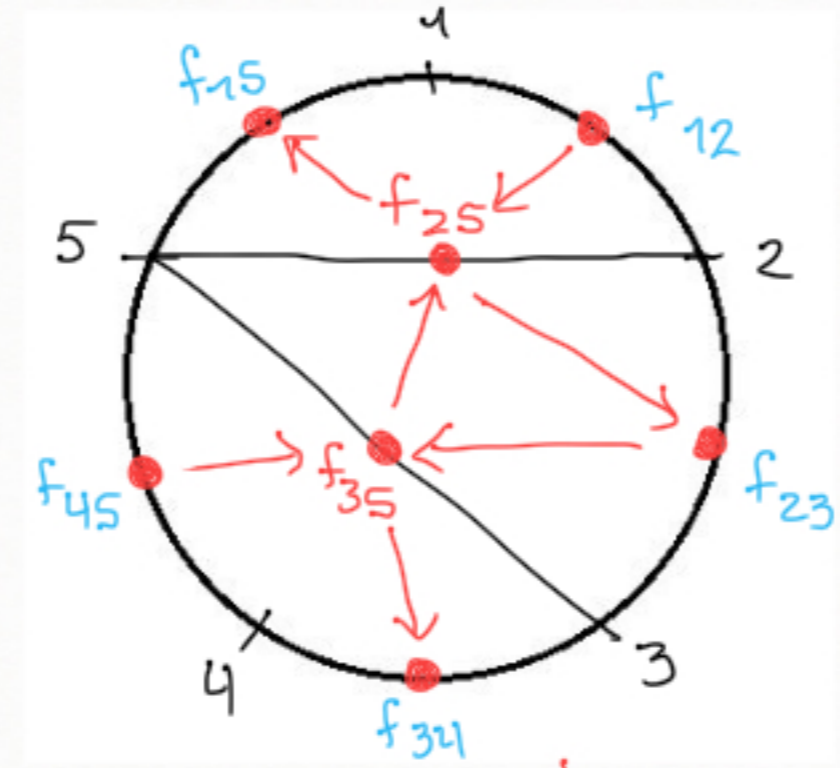
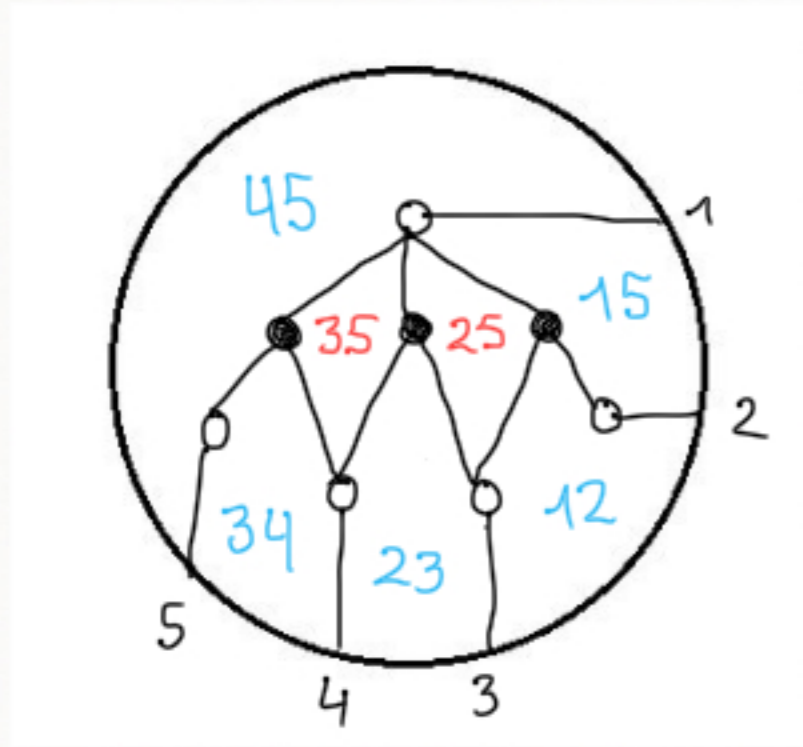
## Diagramas de Young y gráficas plábicas

Dada una gráfica plábica, un viaje para un vértice  $i$  de la frontera cumple:

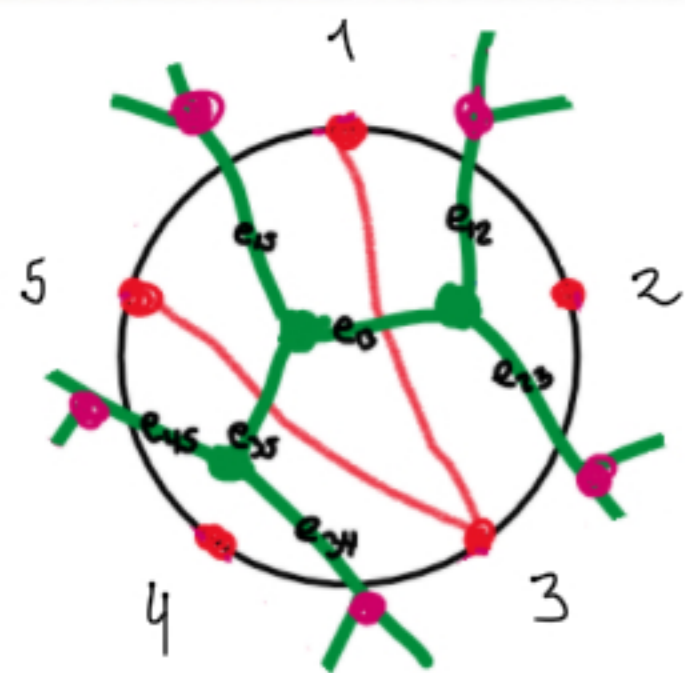
 Se gira maximalmente a la derecha en los vértices negros.

 se gira maximalmente a la izquierda en los vértices blancos.





g-vectores:



$$\sigma_{i \rightarrow j}^{ab} \in \{-1, 1, 0\}$$

- 1) Si  $i \rightarrow j$  no pasa por  $e_{ab}$ , o pasa por  $e_{ab}$  girando a la derecha (izq) en  $v_{abc}$  y girando a la derecha (izq) en  $v_{abd}$ :

$$\sigma_{i \rightarrow j}^{ab} = 0$$

- 2) Si gira a la izquierda y luego a la derecha:  
 $\sigma_{i \rightarrow j}^{ab} = +1$

- 3) Si gira a la derecha y luego a la izquierda:  
 $\sigma_{i \rightarrow j}^{ab} = -1$ .

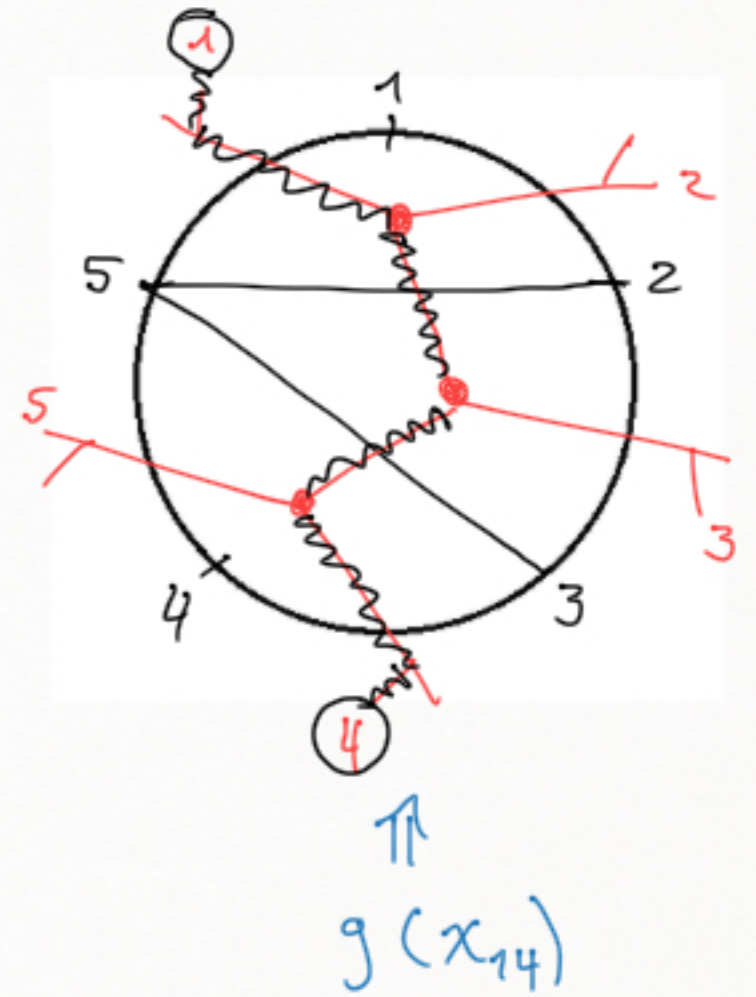
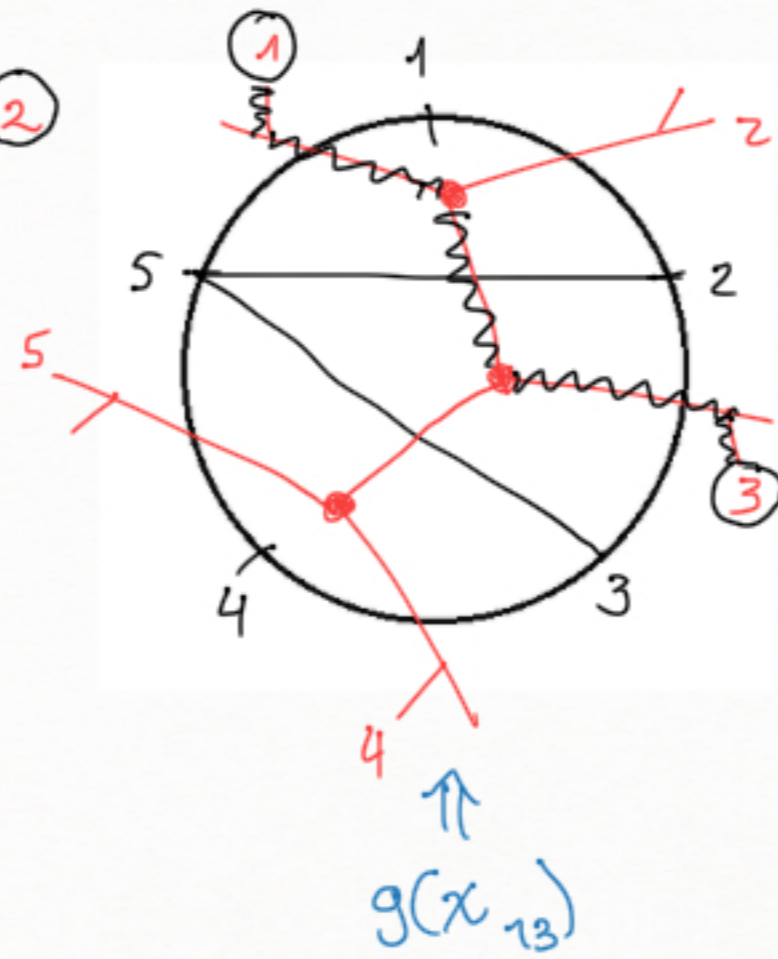
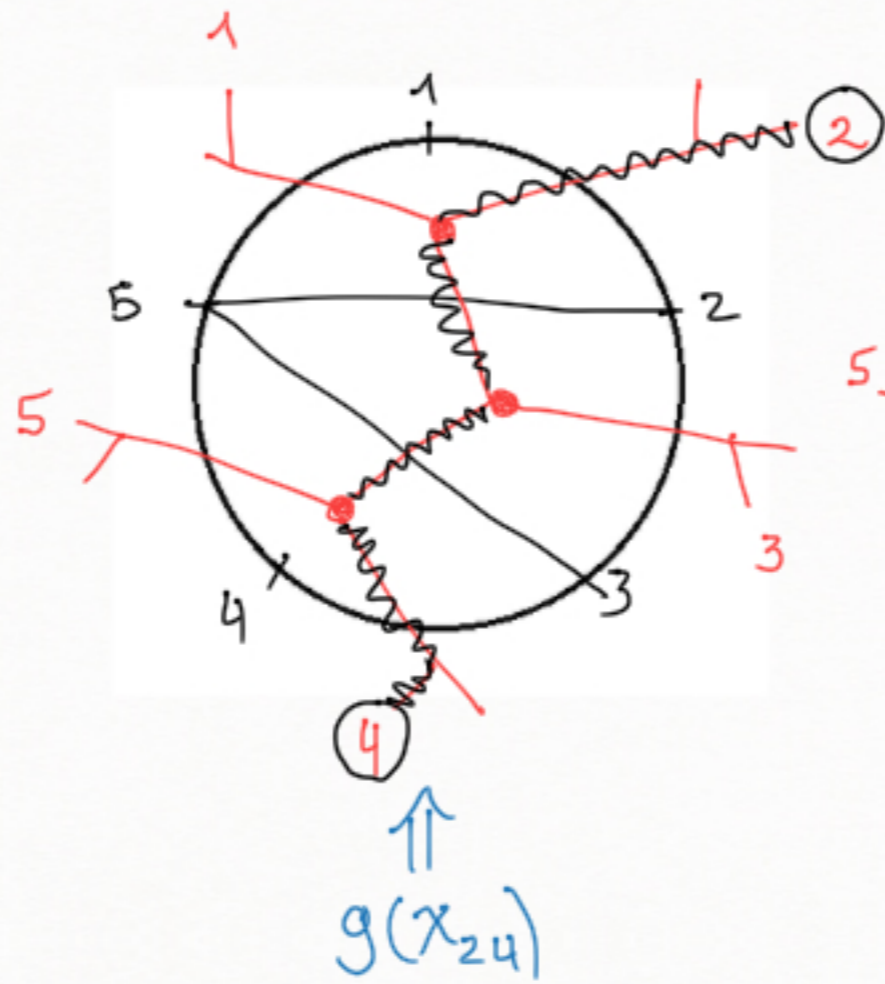
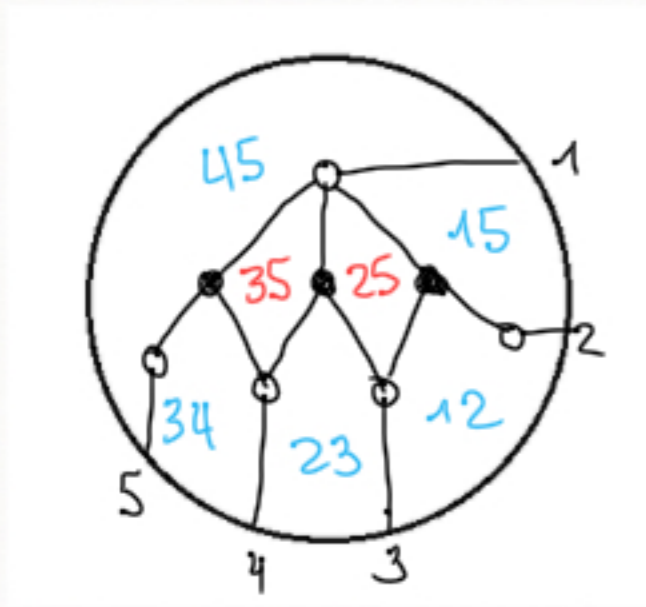
Sea  $\{f_{ab}\}_{\overline{ab} \in T}$  la base estándar de  $\mathbb{Z}^{2^n - 3}$ .

Para  $\tilde{P}_{ij}$  se considera  $i \rightarrow j$ , entonces el g-vector de  $\tilde{P}_{ij}$  con respecto a  $T$  está definido como

$$\tilde{g}_{ij} := \sum_{\overline{ab} \in T} \sigma_{i \rightarrow j}^{ab} f_{ab}$$

$$g_{ij} = f_{ij} \quad \text{para } \overline{ij} \in T$$





$$* g(x_{24}) = g(x_{\begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}}) = g(x_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}}) = f_{25} - f_{35} + f_{34} = f_{\begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}} - f_{\begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}} + f_{\begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}} \Rightarrow \begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}$$

$$* g(x_{13}) = g(x_{\begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}}) = g(x_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}}) = f_{15} - f_{25} + f_{23} = f_{\begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}} - f_{\begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}} + f_{\begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}} \Rightarrow \begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}$$

$$* g(x_{14}) = g(x_{\begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}}) = g(x_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}}) = f_{15} - f_{35} + f_{34} = f_{\begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}} - f_{\begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}} + f_{\begin{smallmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{smallmatrix}}$$

## Formula de ganchos para g-vectores

Sea  $G = G_{k,n}^{\text{rec}}$  la gráfica plábrica rectangular y sea  $J \in \binom{[n]}{k}$ . Sean  $i_1 \times j_1, \dots, i_s \times j_s$  los rectángulos que corresponden a las esquinas del camino asociado a  $J$ . Entonces

$$g_{SG}(P_J) = \sum_{p=1}^s f_{i_p \times j_p} - f_{i_p \times j_{p+1}} \quad \text{con} \quad f_{i_s \times j_{s+1}} = 0.$$

$$\mathcal{A} = UT_{N^0} \quad \text{y} \quad \mathcal{X} = UT_M, \quad M^0 = \langle f_1, \dots, f_n \rangle \Rightarrow g_s(x) = \sum_{i=1}^n g_i(x) f_i \in M^0.$$

Corolario 5.40: (Notas del curso) Sean  $t_0 \xrightarrow{\kappa} t_1$  dos vértices adyacentes en  $\mathbb{T}_n$  y sea  $B^1 = \mu_\kappa(B^0)$ . Entonces para cada  $t \in \mathbb{T}_n$  y cada  $j \in [n]$ , los g-vectores

$$g_{j;t}^{B^0, t_0} = (g_1, \dots, g_n) \quad \text{y} \quad g_{j;t}^{B^1, t_1} = (g'_1, \dots, g'_n)$$

se relacionan a partir de la siguiente fórmula

$$g'_i = \begin{cases} -g_\kappa, & i = \kappa \\ g_i + [b_{i\kappa}]_+ g_\kappa - b_{i\kappa} \min\{0, g_\kappa\}, & i \neq \kappa \end{cases}$$

