Ejercicios 1 del curso "Álgebras de Conglomerado"

Lara Bossinger

semestre 2022-1

1. Historia y motivación

Ejercicio 1 (1.8)**.** Verifica que las expresiones que obtenemos de esta manera coinciden con las formulas del Ejemplo 1.4.

Ejercicio 2. [1.10] Calcula todos los menores de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Hay matrices totalmente positivas o totalmente no negativas entre ellas? ¿Cuantos menores hay de cada tamaño? ¿Cuántos menores tiene una matriz $n \times n$?

Ejercicio 3 (1.13)**.** Prueba el Corolario 1.12 usando el Teorema 1.11.

Ejercicio 4. [1.18]

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$. Calcula los menores maximales de A y de BA. ¿Cómo están relacionados?

2. Sea $V \in \mathrm{Gr}_2(\mathbb{R}^n)$ y A_V una matriz asociada. Prueba que para cada matriz $B \in GL_2(\mathbb{R})$ el producto BA_V también representa V. ¿Cuál es la relación entre los menores de A_V y los menores de BA_V? Si A_V tiene todos sus menores maximales positivos, ¿cuales son las condiciones necesarias en B tal que también BA_V tiene puros menores maximales positivos? (Recuerda el Corolario 1.12)

Ejercicio 5. [1.20] Sea $\mathrm{Mat}_{2\times n}^{\mathrm{tnn}}$ el conjunto de todas las matrices $2\times n$ cuyos menores maximales son no-negativos y sea $GL_2(\mathbb{R})_{\geq 0}$ el conjunto de todas las matrices totalmente no-negativas en $GL_2(\mathbb{R})$. Usando el Ejercicio 1.18 verifica que $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{R}^n)_{\geq 0}$ coincide con el cociente de $\mathrm{Mat}_{2\times n}^{\mathrm{tnn}}$ modula la acción de $GL_2(\mathbb{R})_{\geq 0}$ del lado izquierdo:

$$\mathrm{Gr}_2(\mathbb{R}^n)_{\geq 0} = GL_2(\mathbb{R})_{\geq 0} \backslash \mathrm{Mat}_{2\times n}^{\mathrm{tnn}}.$$

Ejercicio 6. [1.21] Prueba que para una matriz $2\times n$ tenemos para todos $1 \leq i < j < k < l \leq n$ la relación

$$p_{ij}p_{kl} + p_{il}p_{jk} = p_{ik}p_{jl}. \tag{1}$$

Se llama una *relación de Plücker*.

Ejercicio 7. [1.22] El politopo de la Figura 4 (y de la Figura 6) cuyos vértices son las triangulaciones del pentágono y cuyos aristas corresponden a los flips se llama el *associahedro* o *politopo de Stasheff* del tipo A_2 (nota que cada triangulación del pentágono tiene dos diagonales).

1. ¿Cuantos vértices, aristas y caras tiene el associahedro del tipo A_3?

2. ¿Cuál es la dimensión del associahedro del tipo A_3?

3. ¿Cuál puede ser la dimensión del associahedro del tipo A_n y porqué?

Ejercicio 8. [1.23] Generalizamos la regla del friso en la Definición **??** y consideramos las siguientes reglas del juego

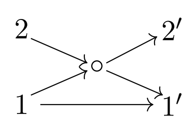
$$x_{k+1}x_{k-1} = \begin{cases} x_k^a + 1, & \text{si } k \text{ es par} \\ x_k^b + 1, & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

Nota que para $(a,b) = (1,1)$ la regla reproduce la regla del friso y determina las formulas que calculamos en el Ejemplo 1.4.

1. Calcula las expresiones para las variables $x_3, x_4, \ldots$ en términos de las variables x_1 y x_2 cuando $(a,b) \in \{(1,2),(1,3)\}$. ¿También se repite el patrón en algún momento? ¿Cuáles son los valores de las variables si fijamos $x_1 = x_2 = 1$?

2. Para $(a,b) = (1,4)$ y $x_1 = x_2 = 1$ calcula la secuencia $(x_i)_{i=1,\ldots 10}$. ¿Parece periódica?

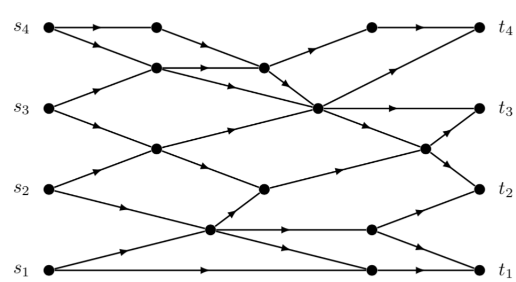
Ejercicio 9. [1.24] Una *red plana de orden* n es una gráfica plana orientada con $2n$ vértices marcados $1,\ldots,n$ y $1',\ldots,n'$, de los cuales i son fuentes e i' son pozos; con vértices interiores y aristas orientadas. Por ejemplo,



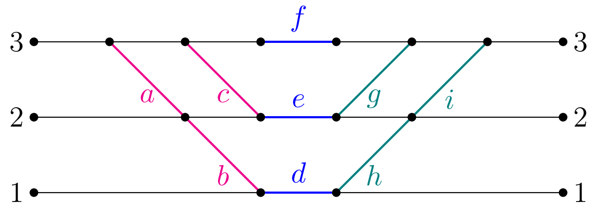
La *matriz* de caminos de una red plana de orden n es la matriz $W = (w_{ij})_{1\le i,j\le n}$ donde

$$w_{ij} := \text{número de caminos de } i \text{ a } j'.$$

Calcula la matriz de caminos de la siguiente red y prueba que es totalmente no-negativa:



Ejercicio 10. [1.25] Consideramos la siguiente red plana Γ_0



Un *camino* en Γ_0 es de un vértice i en la izquierda a un vértice j en la derecha con la restricción que cada arista se puede atravesar solamente de la izquierda a la derecha. El *peso de un camino* es el producto de todos los pesos $(a, \dots, i)$ de sus aristas (los pesos de las aristas sin etiqueta es 1).

1. Calcula la *matriz de caminos de* Γ_0, es la matriz 3×3 cuya entrada a_{ij} es la suma de todos los pesos de caminos de i a j.

2. Prueba que la matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ es totalmente positiva si y solo si $a, \dots, i \in \mathbb{R}_{>0}$.

De hecho, cada matriz 3×3 totalmente positiva es la matriz de caminos de la gráfica Γ_0 para alguna elección de pesos $a, \dots, i$. Este resultado es tema de Proyecto A.2.

2. Definiciones

Ejercicio 11. [2.6] Prueba que la mutación de un carcaj es una involución. Es decir, para cada carcaj Q y cada vértice mutable k de Q tenemos $\mu_k(\mu_k(Q)) = Q$.

Ejercicio 12. [2.8] Sea Q un carcaj y sean k y ℓ dos vértices mutables de Q sin flechas entre ellos. Muestra que

$$\mu_k(\mu_\ell(Q)) = \mu_\ell(\mu_k(Q)).$$

Solución: La mutación μ_k solo afecta a las flechas incidentes a k y flechas entre vértices i, j tal que existe un camino $i \to k \to j$. Lo mismo es válido para la mutación μ_ℓ. Distingimos dos casos:

Si k y ℓ no comparten vecinos, es decir no existen vértices que tienen simultáneamente flechas en común con k y l, entonces no existen vértices que son afectados por ambos mutaciones y hay nada que mostrar. Supongamos que existen vértices que son vecinos de k y ℓ. Consideramos el siguiente carcaj que incorpora das las combinaciones interesantes y las mutaciones $\mu_\ell \circ \mu_k$:

$$\begin{tikzcd}
k \arrow[r] & x \arrow[d] \arrow[r, "\mu_k"] & k \arrow[d] & x \arrow[l] \arrow[d] \arrow[r, "\mu_\ell"] & k \arrow[d] & x \arrow[l] \\
y \arrow[u] & \ell \arrow[l] & y \arrow[ur] & \ell \arrow[l] & y \arrow[r] & \ell \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Para las mutaciones en orden reversa obtenemos:

$$\begin{tikzcd}
k \arrow[r] & x \arrow[d] \arrow[r, "\mu_\ell"] & k \arrow[r] & x \arrow[dl] \arrow[r, "\mu_k"] & k \arrow[d] & x \arrow[l] \\
y \arrow[u] & \ell \arrow[l] & y \arrow[u] \arrow[r] & \ell \arrow[u] & y \arrow[r] & \ell \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Todos los demás casos salen igual.

Ejercicio 13. [2.12] Verifica el último paso en la prueba del Lema 2.11. Para convencerte de la prueba del Lema verifica para la triangulación del pentágono en el Ejemplo 1.6 que $Q_{flip_{25}(T)} = \mu_{25}(Q_T)$.

Ejercicio 14. [2.16] La gráfica subyacente del carcaj Q^{mut} del Ejemplo 2.10 es la *gráfica de Dynkin de tipo* $\mathtt{A}_3$. ¿Cuantos carcajes (sin vértices congelados) de tipo A_3 hay?

Ejercicio 15. [2.22] Prueba el Corolario 2.21 sin usar el Teorema de Caldero–Keller. Tipp: Usa inducción.

Ejercicio 16. [2.23] Definimos un *carcaj de una* $k \times n$*-cuadrícula* como una orientación de la cuadrícula tal que cada 4-ciclo es orientado y todos sus vértices son mutables. Muestra que cada carcaj de una cuadrícula es equivalente bajo mutación a su versión *triangulada* (ver Figura 1) y da una secuencia de mutación.

$$\begin{array}{ccccccc}
\bullet & \longrightarrow & \bullet & \longleftarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet \\
\uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
\bullet & \longleftarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longleftarrow & \bullet \\
\downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow \\
\bullet & \longrightarrow & \bullet & \longleftarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccccc}
\bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet \\
\uparrow & \swarrow & \uparrow & \swarrow & \uparrow & \swarrow & \uparrow \\
\bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet \\
\uparrow & \swarrow & \uparrow & \swarrow & \uparrow & \swarrow & \uparrow \\
\bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet
\end{array}$$

Figura 1: Un carcaj de la 3×4-cuadrícula y su versión triangulada.

Solución: Etiquetamos los vértices de la $k \times n$-cuadrícula como si fuera una matriz: es decir, el vértice ij se encuentra en la fila i y la columna j de la cuadrícula. La idea es hacer mutaciones en las antidiagonales. Sin perder de generalidad podemos suponer que $k < n$. Empezamos con la cuadrícula triangulada y mutamos en la esquina $(1,1)$, luego en la siguiente antidiagonal $(2,1),(1,2)$ hasta $(k,1),(k-1,2),\ldots,(1,k)$. Después de esta secuencia hemos creado un carcaj que se ve como la cuadrículo triangulada excepto que todas los cuadrados con vértices $(i,j),(i-1,j),(i,j-1),(i-1,j-1)$ para (i,j) en la diagonal $(k,1),(k-1,2),\ldots,(1,k)$ o $(k,2),(k-1,3),\ldots,(1,k+1)$ no son triangulados. Por ejemplo, en la 3×4-cuadrícula triangulada este carcaj es

$$\begin{array}{ccccccc}
\bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longleftarrow & \bullet \\
\uparrow & \swarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\bullet & \longrightarrow & \bullet & \longleftarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \swarrow & \uparrow \\
\bullet & \longleftarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet
\end{array}$$

Ahora repetimos las misma secuencia hasta la antidiagonal $(k-1,1),(k-2,1),\ldots,(1,k-1)$ lo cual agrega otra diagonal de cuadrados orientados. Repitiendo el mismo padrón, cada vez con una diagonal menos deja todos los cuadrados con (i,j) tal que $i \in [k]$ y $j \in [i-1]$ orientados. Para orientar el resto del carcaj repetimos el procedimiento empezando en la contra esquina (k,n).

Ejercicio 17. [2.24] El carcaj del Ejemplo 2.14 es el carcaj triangulado de una 1×1-cuadrícula y es equivalente bajo mutación a un carcaj que es una orientación de un *árbol* (una gráfica sin ciclos). ¿Hay más carcajes de cuadrículas que estén en la misma clase de equivalencia de un árbol?

Solución: Si, por ejemplo el carcaj de la $2{\times}3$ cuadrícula (triangulada) tiene una orientación del diagrama de Dynkin de tipo $\mathtt{E}_6$ en su clase de muatción:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] \arrow[dl] & 3 \arrow[dl] \arrow[r, "\mu_4"] & \dots \arrow[r, "\mu_3"] & \dots \arrow[r, "\mu_5"] & 1 \arrow[d] & 2 & 3 \arrow[dl] \arrow[d] \\
4 \arrow[u] \arrow[r] & 5 \arrow[u] \arrow[r] & 6 \arrow[u] & & & 4 \arrow[r] & 5 \arrow[u] & 6
\end{tikzcd}$$

De manera similar uno puede obtener una orientación del digrama de Dynkin de tipo $\mathtt{E}_8$ en la clase de muatción de la 2×4-cuadrícula.

Ejercicio 18. [2.25] En la página web del matemático Bernhard Keller se encuentra su aplicación para la mutación de carcajes llamada `MutationApp`:

`https://webusers.imj-prg.fr/~bernhard.keller/quivermutation/`

Si puedes, baja la aplicación (tu computadora necesita el "Java runtime environment (JRE)"la liga también se encuentra el página del `MutationApp`). Como calentamiento con la aplicación pon el carcaj de la 3-cuadrícula de la Figura 1 y verifica tu secuencia de mutación del Ejercicio 16. También puedes utilizar la aplicación para resolver el Ejercicio 17.

Ejercicio 19. [2.29] Prueba el Lema 2.28.

Ejercicio 20. [2.31] Convéncete que el Lema 2.30 es correcto, primero para Q y $\mu_2(Q)$ como en el Ejemplo 2.5 y luego en general.

Ejercicio 21. [2.35] Prueba las afirmaciones 2. y 4. de la Proposición 2.34 (recuerda los Ejercicios 11 y 12).

Ejercicio 22. [2.38] En este ejercicio probamos la Proposición 2.37. Sea $\tilde{B}$ de tamaño $n+m \times n$ una matriz extendida casi-simetrizable y $k \in [n]$.

1. Muestra que para cualquier signo $\epsilon \in \{1, -1\}$ la formula de la mutación (8) es

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij}, & k \in \{i,j\} \\ b_{ij} + [-\epsilon b_{ik}]_+ b_{kj} + b_{ik}[\epsilon b_{kj}]_+, & \text{por lo demás.} \end{cases} \tag{2}$$

2. Sea $\mathbf{1}_\ell$ la matriz de identidad de tamaño $\ell \times \ell$ y $E^\ell_{i,j}$ la $\ell \times \ell$-matriz elemental cuya única entrada no cero es un 1 en la posición (i,j). Definimos $J_{\ell;k} := \mathbf{1}_\ell - 2E^\ell_{k,k}$ y $C_k = (c_{ij})_{1 \le i,j \le n+m}$ la matriz cuya única columna no cero es la columna k con entradas $c_{ik} = [-\epsilon b_{ik}]_+$ y $F_k = (f_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ la matriz cuya única fila no cero es la fila k con entradas $f_{kj} = [\epsilon b_{kj}]_+$. Verifica que

$$\mu_k(\tilde{B}) = (J_{m+n;k} + C_k)\ \tilde{B}\ (F_k + J_{n;k}). \tag{3}$$

3. Deduce que $\operatorname{rang}(\tilde{B}) = \operatorname{rang}(\mu_k(\tilde{M}))$.

4. En el caso que $m = 0$ deduce que $B := \tilde{B}$ y $\mu_k(B)$ tienen el mismo determinante.

Ejercicio 23. [2.41] Verifica que la mutación de semillas es una involución, es decir $\mu_k(\mu_k(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{B})) = (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{B})$.

Ejercicio 24. [2.46] Calcula más mutaciones de las semillas en el Ejemplo 2.45 hasta que encuentras el primer $t < 0$ y el primer $t > 0$ con $Q(t) = Q(0)$ y $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0)$. Muestra que todas las variables de conglomerado ya aparecen en las semillas asociadas a los vértices $t \in [0, 4]$.

Ejercicio 25 (2.49)**.** Dada una semilla inicial $s_0 = (\tilde{\mathbf{x}}(0), \tilde{B}(0))$ definimos el conjunto $\tilde{\mathbf{X}} := \bigcup_{s_t \sim s_0} \tilde{\mathbf{x}}(t)$ donde $s_t = (\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{B}(t))$ es cualquier semilla que se obtiene de s_0 de una secuencia finita de mutaciones. Sea $\mathcal{P}_n$ el patrón de semillas dado por s_0. Entonces,

$$\mathcal{A}_{\mathcal{P}_n} = \mathbb{C}[\tilde{\mathbf{X}}] \subset \mathcal{F}.$$

Solución: Recuerda la definición del álgebra de conglomerado:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{P}_n} := \mathbb{C}[x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}][\mathbf{X}] \subset \mathcal{F}$$

donde $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ son las variables congeladas y $\mathbf{X} := \bigcup_{t \in \mathbb{T}_n} \mathbf{x}(t)$ con $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ las variables mutables de la semilla en t. En particular, $\mathbf{X} \subset \tilde{\mathbf{X}}$. Calculamos

$$\mathbb{C}[x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}][\mathbf{X}] = \mathbb{C}\left[\{x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}\} \cup \mathbf{X}\right].$$

Las variables congeladas nunca cambian con la mutación, pues $\{x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}\} \subset \tilde{\mathbf{x}}(t)$ para todas las $t \in \mathbb{T}_n$. Entonces $(\{x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}\} \cup \mathbf{X}) \subseteq \tilde{\mathbf{X}}$. Para verificar la inclusión opuesta basta observar que

$$\bigcap_{t \in \mathbb{T}_n} \tilde{\mathbf{x}}(t) = \{x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}\},$$

pues también $\tilde{\mathbf{X}} \subseteq \{x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}\} \cup \mathbf{X}$.

Ejercicio 26 (2.53)**.** Definimos una relación de equivalencia alternativa en el árbol n-regular. Sea $\{(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{B}(t))\}_{t \in \mathbb{T}_n}$ un patrón de semillas. Definimos

$$t = t' \quad \text{si y solo si} \quad (\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{B}(t)) = (\tilde{\mathbf{x}}(t'), \tilde{B}(t')). \tag{4}$$

Es decir, dos vértices $t, t' \in \mathbb{T}_n$ están en la misma clase de equivalencia si y solo si las semillas etiquetadas asociadas son *iguales*. Llamamos a la gráfica cuyos vértices representen las clases de equivalencia de "="la *gráfica de intercambio etiquetada*.

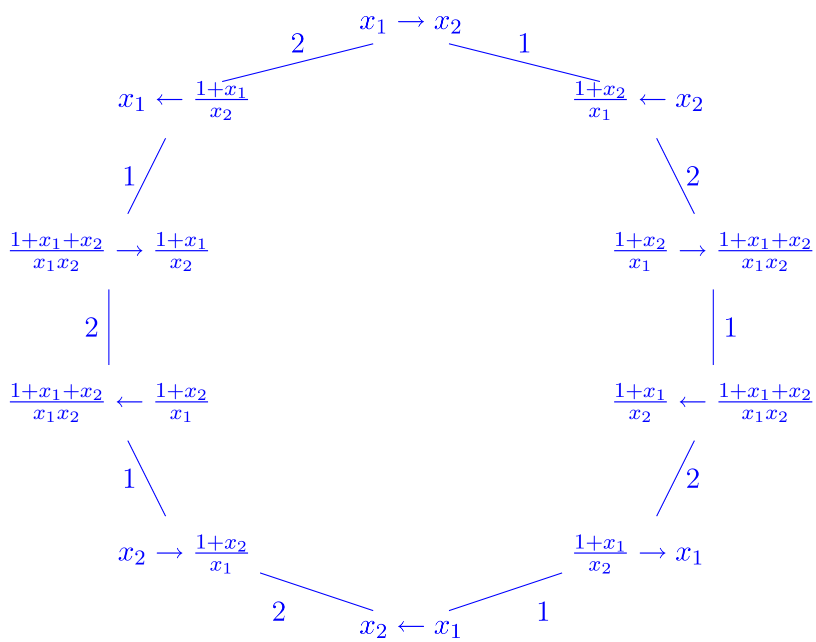
1. ¿Cuál es la gráfica de intercambio para el carcaj $1 \to 2$ y cuál es su gráfica de intercambio etiquetada?

2. Sea $Q = 1 \to 2 \to 3$. Calcula la gráfica de intercambio asociada. ¿Te parece conocida?

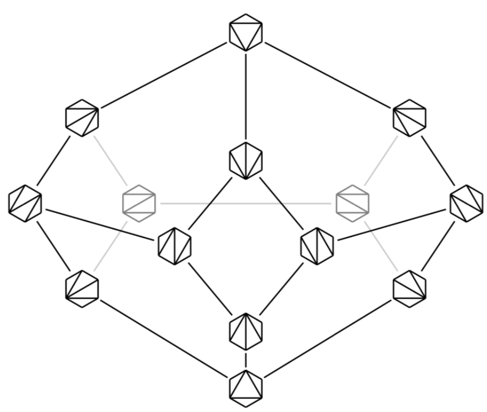
3. ¿Cómo cambia la gráfica de intercambio en 2. si consideras semillas etiquetadas? Por ejemplo, ¿qué pasa con las caras que tienen 5 vértices?

Solución:

1. La gráfica de intercambio del carcaj $1 \to 2$ es un pentágono como lo vimos, por ejemplo, en las Figuras 4 y 6. La gráfica de intercambio etiquetada es un 10-ágono:

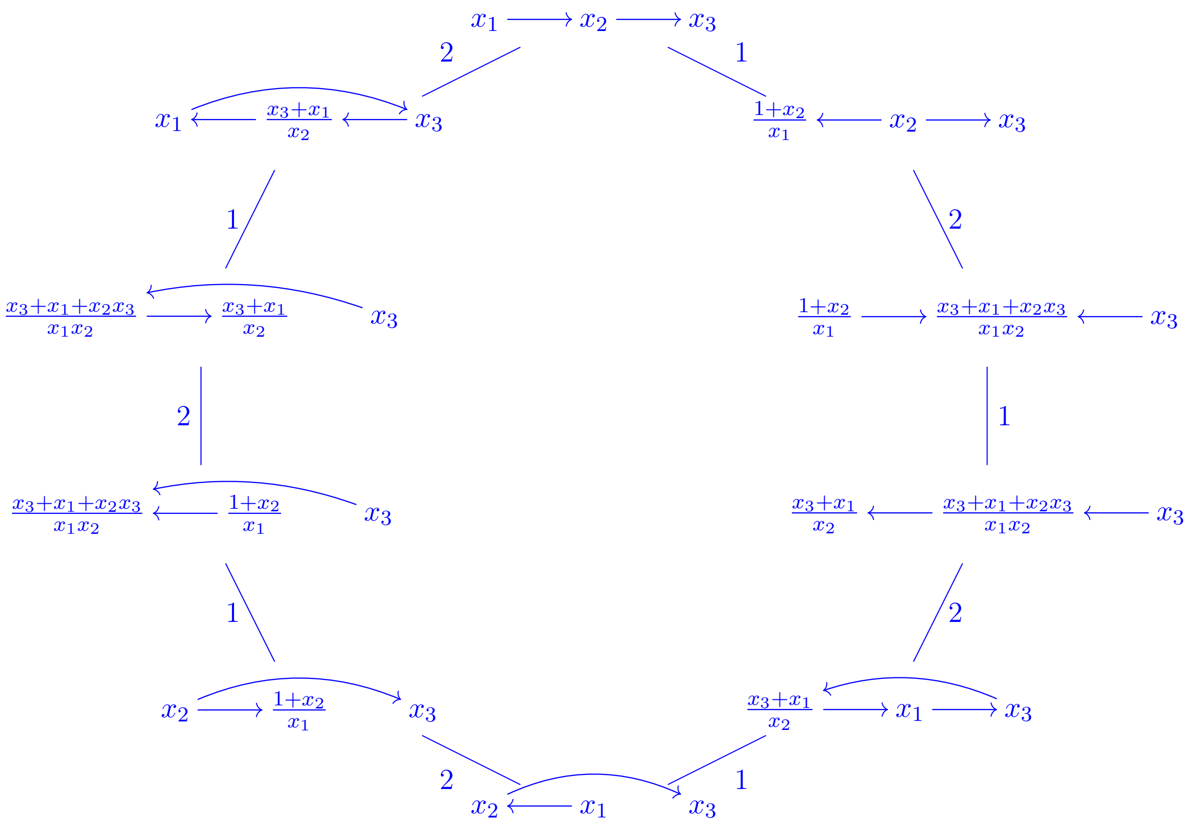


2. La gráfica de intercambio es el associahedro:

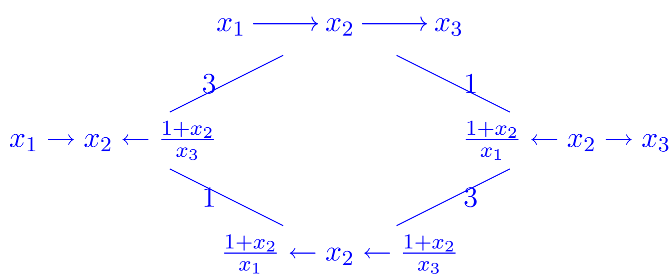


3. Observa que el associahedro tiene dos tipos de facetas (caras de dimensión 2): los pentágonos (caras con 5 vértices) y los cuadrados (caras con 4 vértices). Los pentágonos

cambian como lo vimos en 1. Por ejemplo,



Los cuadrados corresponden a semillas donde la mutación conmuta (ver el Ejercio 12(2.8)). Para ver que pasa consideramos el siguiente ejemplo:



Ejercicio 27. [2.55] Sea $B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{pmatrix}$. Si $a = b = 0$, ¿qué es el patrón de semillas que uno obtiene de B?

Solución. B se llama de tipo $\mathtt{A}_1 \times \mathtt{A}_1$ como corresponde a un carcaj con dos vértices y sin flechas. Dado una semilla inicial $(\mathbf{x}, B)$ con $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ calculamos el patrón de semillas. Nota que la mutación no cambia la matriz B y como $b_{12} = b21$ según la Proposición 2.34 tenemos

$\mu_1 \circ \mu_2 = \mu_2 \circ \mu_1$, pues basta calcular la semillas para $i > 0$. Recuerda que el árbol 2-regular:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
\cdots -1 & \overset{2}{\overline{\qquad}} & 0 & \overset{1}{\overline{\qquad}} & 1 & \overset{2}{\overline{\qquad}} & 2 & \overset{1}{\overline{\qquad}} & 3 & \overset{2}{\overline{\qquad}} & 4 & \overset{1}{\overline{\qquad}} & 5 & \overset{2}{\overline{\qquad}} & 6 \cdots \\
(x_1, \frac{2}{x_2}) & & (x_1, x_2) & & (\frac{2}{x_1}, x_2) & & (\frac{2}{x_1}, \frac{2}{x_2}) & & (x_1, \frac{2}{x_2}) & & (x_1, x_2) & & (\frac{2}{x_1}, x_2) & & (\frac{2}{x_1}, x_2)
\end{array}
$$

Nota que semillas etiquetadas y no-etiquetadas coinciden. Además el patrón es 4-periódico con cuatro semillas distintas:

$$(x_1, x_2), (\frac{2}{x_1}, x_2), (\frac{2}{x_1}, \frac{2}{x_2}), (x_1, \frac{2}{x_2}).$$

Ejercicio 28. [2.58] Continuamos con el caso que la matriz $B = B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ no corresponde a ningún carcaj. Es decir, $a \neq b$. Seguimos con la notación como en el Ejemplo 2.57. Las variables de conglomerado satisfacen la relación de intercambio

$$x_{k-1} x_{k+1} = \begin{cases} x_k^a + 1 & \text{si } k \text{ es impar,} \\ x_k^b + 1 & \text{si } k \text{ es par.} \end{cases}$$

1. Sea $a = 1$ y $b = 2$. Calcula el patrón se semillas. ¿Es periódico?
2. Considera la matriz extendida de intercambio

   $$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$$

   para $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$ y repite el calculo del patrón de semillas.

3. El fenómeno de Laurent

Ejercicio 29 (3.4)**.** Sean $x_{1;d}, \ldots, x_{n;d}$ las variables de conglomerado de la semilla $(\tilde{\mathbf{x}}(t_d), \tilde{B}(t_d))$ en $\mathcal{A}(\tilde{B}(0))$ y $x'_{1;d}, \ldots, x'_{n;d}$ las variables de conglomerado correspondientes en $\mathcal{A}(\tilde{B}'(0))$. Por inducción tenemos expresiones

$$x_{i;d} = \frac{f_{i;d}(x_1, \ldots, x_{n+m})}{g_{i;d}(x_1, \ldots, x_{n+m})}, \quad \text{tal que} \quad x'_{i;d} = \left. \frac{f_{i;d}(x_1, \ldots, x_{n+m})}{g_{i;d}(x_1, \ldots, x_{n+m})} \right|_{x_j = 1, \forall j \in I} \tag{5}$$

Para nuestra variable x entonces tenemos $x = \mu_{k_{d+1}}(x_{i;d})$ para algún $i \in [n]$. Si $i \neq k_{d+1}$ no hay nada que probar. Prueba que en el caso $i = k_{d+1}$ el Lema es verdadero usando (5) y la misma idea que en la base de la inducción.

Solución: Calculamos

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{x_{i;d}}\left(\prod_{\substack{b_{ji}>0\\ \text{en } \tilde{B}(t_d)}} x_{j;d}^{b_{ji}} + \prod_{\substack{b_{ji}<0\\ \text{en } \tilde{B}(t_d)}} x_{j;d}^{-b_{ji}}\right)\\
&= \frac{1}{x_{i;d}}\left(\prod_{\substack{b_{ji}>0\\ \text{en } \tilde{B}(t_d)}} \frac{f_{j;d}(x_1,\ldots,x_{n+m})}{g_{j;d}(x_1,\ldots,x_{n+m})}^{b_{ji}} + \prod_{\substack{b_{ji}<0\\ \text{en } \tilde{B}(t_d)}} \frac{f_{j;d}(x_1,\ldots,x_{n+m})}{g_{j;d}(x_1,\ldots,x_{n+m})}^{-b_{ji}}\right)
\end{aligned}
$$

En el álgebra $\mathcal{A}(\tilde{B}'(0))$ tenemos la variable correspondiente $x' = \mu_{k_{d+1}}(x_i)$:

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{1}{x'_{i;d}}\left(\prod_{\substack{b_{ji}>0\\ \text{en } \tilde{B}'(t_d)}} {x'}_{j;d}^{b_{ji}} + \prod_{\substack{b_{ji}<0\\ \text{en } \tilde{B}'(t_d)}} {x'}_{j;d}^{-b_{ji}}\right)\\
&\overset{(5)}{=} \frac{1}{x'_{i;d}}\left(\prod_{\substack{b_{ji}>0\\ \text{en } \tilde{B}'(t_d)}} \left.\frac{f_{j;d}(x_1,\ldots,x_{n+m})}{g_{j;d}(x_1,\ldots,x_{n+m})}\right|_{x_j=1,\forall j\in I}^{b_{ji}} + \prod_{\substack{b_{ji}<0\\ \text{en } \tilde{B}'(t_d)}} \left.\frac{f_{j;d}(x_1,\ldots,x_{n+m})}{g_{j;d}(x_1,\ldots,x_{n+m})}\right|_{x_j=1,\forall j\in I}^{-b_{ji}}\right)
\end{aligned}
$$

Comparando las expresiones de x y x' vemos que la expresión de x' se obtiene de la expresión de x evaluando $x_j = 1$ para todos las $j \in I$.

Corolario 30. [3.5] Si el álgebra de conglomerado $\mathcal{A}(\tilde{B}(0))$ satisface el fenómeno de Laurent, entonces también el álgebra de conglomerado $\mathcal{A}(\tilde{B}'(0))$ lo satisface.

Ejercicio 31. [3.6] Prueba el Corolario 3.5.

Solución Si $\mathcal{A}(\tilde{B}(0))$ satisface el fenómeno de Laurent y x es una variable de conglomerado entonces su expresión en las variables $x_1, \ldots, x_{n+m}$ de cualquier semilla es un polinomio de Laurent:

$$x = \frac{f(x_1,\ldots,x_{n+m})}{x_1^{g_1}\cdots x_{n+m}^{g_{n+m}}}.$$

Sea entonces x' la variable correspondiente en $\mathcal{A}(\tilde{B}'(0))$. Dado el Lema tenemos

$$x' = \left.\frac{f(x_1,\ldots,x_{n+m})}{x_1^{g_1}\cdots x_{n+m}^{g_{n+m}}}\right|_{x_j=1,\forall j\in I}$$

lo cual también es un polinomio de Laurent.

Ejercicio 32. [3.8] Muestra que x'_{k_1} y x'_{k_2} son elementos de $\mathbb{Z}[x_1^{\pm1},\ldots,x_{n+m}^{\pm1}]$.

Solución: Calculamos

$$x'_{k_1} = \frac{1}{x_{k_1}} \left(\prod_{\substack{b_{ik_1}>0 \\ \text{en } \tilde{B}(0)}} x_i^{b_{ik_1}} + \prod_{\substack{b_{ik_1}<0 \\ \text{en } \tilde{B}(0)}} x_i^{-b_{ik_1}} \right)$$

Sean b'_{ij} las entradas de la matriz $\tilde{B}(t_1)$. Para x'_{k_2} obtenemos

$$x'_{k_2} = \frac{1}{x_{k_2}} \left({x'_{k_1}}^{[b'_{k_1k}]_+} \prod_{\substack{b'_{ik}>0 \\ i\neq k_1}} x_i^{b'_{ik}} + {x'_{k_1}}^{-[-b'_{k_1k}]_+} \prod_{\substack{b'_{ik}<0 \\ i\neq k_1}} x_i^{-b'_{ik}} \right)$$

Combinando con las expresión para x'_{k_1} vemos que x'_{k_2} también es un polinomio de Laurent en $x_1, \ldots, x_{n+m}$.

Ejercicio 33. [3.9] Verifica que se reduce al argumento del caso $d = 2$.

Ejercicio 34. [3.10] Muestra que las variables de conglomerado de $\mathcal{A}(\tilde{B}(0))$ y de $\mathcal{A}(-\tilde{B}(0))$ son iguales.

Ejercicio 35. [3.11] Prueba que los binomios $M_1 + M_2$ y $M'_1 + M'_2$ son coprimos (es decir, no tienen factores irreducibles en común) para terminar la prueba del Caso 1. *Tipp:* Recuerda el Lema 3.2.

Solución: Aplicamos el siguiente truco: sea $\tilde{B}^*(0)$ la matriz obtenida de $\tilde{B}(0)$ agregando una fila al final, es decir con índice $n+m+1$ cuya entrada en la posición k_1 es 1 y todas las demás son 0. En el álgebra de conglomerado $\mathcal{A}(\tilde{B}^*(0))$ el binomio $M_1 + M_2$ es de grado 1 en la nueva variable x_{n+m+1}, pues es irreducible. Por el otro lado tenemos el monomio $M'_1 + M'_2$ que no depende de x_{n+m+1}. Entonces, $M_1 + M_2$ no puede ser factor irreducible de $M'_1 + M'_2$. En particular, la expresión reducida de $x \in \mathcal{A}(\tilde{B}^*(0))$ en $x_1, \ldots, x_{n+m+1}$ es un polinomio de Laurent con coeficientes enteros. Gracias al Lema **??** sabemos que la expresión reducida de $x \in \mathcal{A}(\tilde{B}(0))$ se obtiene de la expresión en $x_1, \ldots, x_{n+m+1}$ evaluando $x_{n+m+1} = 1$, pues también esta expresión es un polinomio de Laurent con coeficientes enteros.

Ejercicio 36. [3.12] Muestra que la variable x'_{k_1} es coprimo a las variables x'_{k_2} y x''_{k_1} (es decir, como polinomios de Laurent en $x_1, \ldots, x_{n+m}$ no tienen factores en común). *Tipp:* Podemos suponer que existen dos filas con índices p_1 y p_2 en $\tilde{B}(0)$ tal que $b^\circ_{p_1i} = \delta_{ik_1}$ y $b^\circ_{p_2i} = \delta_{ik_2}$ (Corolario 30).

1. Calcula las expresiones de $x'_{k_1}, x'_{k_2}, x''_{k_1}$.

2. Muestra que x'_{k_1} y x'_{k_2} son irreducibles.

3. Verifica que x''_{k_1} evaluado en $x_{p_2} = 0$ es coprimo a x'_{k_1} evaluado en $x_{p_2} = 0$.

Solución: Sean $b^\circ_{k_1k_2} = -b$ y $b^\circ_{k_2k_1} = c$ para $b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$. Nos fijamos en las filas $k_1 < k_2 < p_1 < p_2$ y las columnas $k_1 < k_2$ de las matrices de intercambio extendidas $\tilde{B}(0), \tilde{B}(t_1), \tilde{B}(t_2)$. Observamos

$$\tilde{B}(0) : \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \overset{\mu_{k_1}}{\longrightarrow} \quad \tilde{B}(t_1) : \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \overset{\mu_{k_2}}{\longrightarrow} \quad \tilde{B}(t_2) : \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Las relaciones de intercambio entonces tienen la siguiente forma

$$\begin{aligned} x'_{k_1} &= x_{k_1}^{-1}(x_{k_2}^c x_{p_1} M_1 + M_2), \\ x'_{k_2} &= x_{k_2}^{-1}((x'_{k_1})^b x_{p_2} M_3 + M_4), \\ x''_{k_1} &= (x'_{k_1})^{-1}(x_q M_5 + (x'_{k_2})^c M_6), \end{aligned}$$

donde $M_1, \ldots, M_6$ son monomios en las variables x_i con $i \notin \{k_1, k_2, p_1, p_2\}$. Observa que x'_{k_1} es lineal en x_{p_1}, pues es irreducible. Además como x'_{k_1} no depende de x_{p_2} también x'_{k_2} es irreducible, pues es lineal en x_{p_2}. Nota que eso ya implica que x'_{k_1} y x'_{k_2} son coprimos.

Falta verificar que x'_{k_1} y x''_{k_1} también son coprimos. Pensamos en x'_{k_2} y x''_{k_1} como polinomios en x_{p_2} y sean $x'_{k_2}(0)$ y $x''_{k_1}(0)$ su evaluaciones en $x_{p_2} = 0$. Si $x''_{k_1}(0)$ y $x'_{k_1} = x'_{k_1}|_{x_{p_2}=0}$ son coprimos, también x''_{k_1} y x'_{k_1} lo son. Nota que $x'_{k_2}(0) = x_{k_2}^{-1} M_4$. Entonces,

$$x''_{k_1}(0) = x_{k_1} \frac{x_{p_1} M_5 + x_{k_2}^{-c} M_6^c M_6}{x_{k_2}^c x_{p_1} M_1 + M_2}$$

Nota que ambos, el numerador y el denominador son lineales en x_{p_1}. En particular, si el denominador divide el numerador solo puede ser a lo más una vez. Recuerda que x'_{k_1} es irreducible. Además si $x''_{k_1}(0)$ y x'_{k_1} no son coprimos tenemos dos expresiones para x''_{k_1}, la primera viene de la relación de intercambio:

$$x''_{k_1} = (x'_{k_1})^{-1} P \quad \text{y} \quad x''_{k_1} = x'_{k_1} Q$$

entonces $P = (x'_{k_1})Q$ y x'_{k_1} divide $x''_{k_1}(0)$ al menos dos veces, una contradicción pues la afirmación es verdadera.