LISTA DE EJERCICIOS 1
ÁLGEBRAS DE CONGLOMERADO

Ejercicio 1.8 Verificar que las expresiones que se obtiene utilizando el Teorema de Ptolomeo coinciden con las fórmulas del ejemplo 1.4.

Solución. Consideremos la triangulación del pentágono (de lado 1) mostrada en la Figura 1 formada por las diagonales x_1 y x_2.

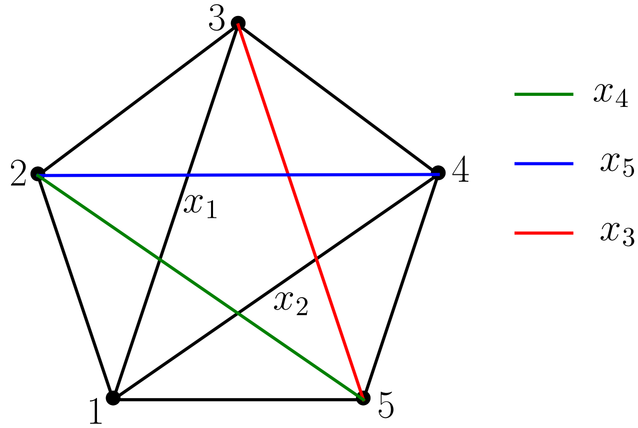


Figura 1: Triangulación del pentágono.

Calculemos las demás diagonales x_3, x_4 y x_5. Aplicando el teorema de Ptolomeo en los cuadriláteros 1345, 1234 y 1245 obtenemos que:

$$\begin{aligned} x_2x_3 &= 1 + x_1 \\ x_1x_5 &= 1 + x_2 \\ x_2x_4 &= 1 + x_5 = \frac{1 + x_1 + x_2}{x_1} \end{aligned}$$

Despejando x_5 y reemplazando en la última igualdad, se obtienen los valores deseados:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1 + x_1}{x_2} \\ x_5 &= \frac{1 + x_2}{x_1} \\ x_4 &= \frac{\frac{1+x_1+x_2}{x_1}}{x_2} = \frac{1 + x_1 + x_2}{x_1x_2} \end{aligned}$$

Si bien es cierto x_3 y x_5 no coinciden con las expresiones del ejemplo 1,4 (se puede cambiar las etiquetas para que esto sí suceda) x_3, x_4 y x_5 contienen las mismas fórmulas que las del ejemplo 1,4 (en un orden distinto quizás) y esto es válido para cualquier otra triangulación que consideremos en el pentágono.

Ejercicio 1.10 Calcula todos los menores de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Hay matrices totalmente positivas o totalmente no negativas entre ellas?¿Cuántos menores hay de cada tamaño?¿Cuántos menores tiene una matriz de orden $n \times n$?

Solución. Enunciaremos los menores, salvo repetición.

- Los menores de la primera matriz son $2, 1$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$.
- Los menores de rango 1 de la segunda matriz son $1, 2, 3, 4$. Los de rango 2 son:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

  que son: $4, -8, -2, 5, 1, 7, -1$. Y el menor de rango 3 es $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 9$.

- Los menores de rango 1 son simplemente 1 y 0, hay 36 menores de rango 2 pero todos ellos serán o bien 1 o bien 0. Caso análogo los menores de orden 3, en este caso hay 16 y toman valores de 0 o 1. La matriz tiene determinante nulo.

La primera matriz y la tercera son totalmente positivas y totalmente no negativas. La primera es TP pero la tercera no. Por el contrario la segunda no es ninguna de ellas.

Si fijamos una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $k \in [n]$. Entonces la cantidad de menores de orden k es simplemente:

$$\binom{n}{k}\binom{n}{k}$$

pues hay $\binom{n}{k}$ formas de elegir k filas o k columnas de las n. Notamos que si el orden de la matriz crece, los menores también.

Ejercicio 1.13 Pruebe que si $A, B \in \mathbb{R}^n$ son dos matrices totalmente positivas, entonces $C = AB$ es totalmente positiva.

Solución. Sea $C(I,J)$ un menor arbitrario de C, donde $I \subseteq [n], J \subseteq [n]$ y además $|I| = |J| = m$. Tenemos que:

$$C[I,J] = A[I,[n]]B[[n],J]$$

Como $A[I,[n]] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B[[n],J] \in \mathbb{R}^{n\times m}$ podemos aplicar el teorema de Cauchy-Binet, este nos dice que:

$$C(I,J) = \sum_{K\in\binom{[n]}{m}} A([m],K)B(K,[m])$$

Como A y B son totalmente positivas, se sigue que $A([m],K)$ y $B(K,[m])$ son positivos para cada K por lo que su producto y suma sobre todos los K sigue siendo positiva. De esto se concluye que $C(I,J) > 0$, como este menor fue arbitrario se concluye que C es totalmente positiva.

Ejercicio 1.18 Pruebe los siguientes items:

1) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Calcule los menores de A y de BA. ¿Cómo están relacionados?

2) Sea $V \in \mathrm{Gr}_2(\mathbb{R}^n)$ y A_V una matriz asociada cualquiera. Pruebe que para cada matriz $B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ el producto BA_V también representa V.¿Qué relación tienen los menores de A_V y BA_V? Si A_V tiene todos sus menores maximales positivos, ¿cuáles son las condiciones necesarias para B, tal BA_V también tenga todos sus menores maximales positivos?

Solución.

a) Los menores de orden 1×1 de cada matriz simplemente son todas sus entradas. Ahora calculemos los menores maximales, i.e los de orden 2×2. En el caso de A:

   - $p_{12}(A) = 1.$
   - $p_{13}(A) = 1.$
   - $p_{23}(A) = 1.$

   Si multiplicamos BA se obtiene $\begin{pmatrix} a & b & b-a \\ c & d & d-c \end{pmatrix}$ y sus menores maximales son:

   - $p_{12}(BA) = ad - bc.$
   - $p_{13}(BA) = ad - ac - bc + ac = ad - bc.$
   - $p_{23}(BA) = bd - bc - bd + da = ad - bc.$

Se nota que para $i < j$ se tiene $p_{ij}(BA) = \det(B)P_{ij}(A)$ y esta sería la relación, sencilla para este ejemplo.

b) Sea $V \in \mathrm{Gr}_2(\mathbb{R}^n)$ y A_V una matriz asociada, definida por la base $\{v_1, v_2\}$. Si denotamos por:

$$v_1 = (v_{11}, \ldots, v_{1m}), v_2 = (v_{21}, \ldots, v_{2m})$$

a los elementos de la base, tenemos que:

$$A_V = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & \cdots & v_{2n} \end{pmatrix}$$

Probaremos que:

$$BA_V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & \cdots & v_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av_{11} + bv_{21} & \cdots & av_{1n} + bv_{2n} \\ cv_{11} + dv_{21} & \cdots & cv_{1n} + dv_{2n} \end{pmatrix}$$

también representa a V. Para esto, resta ver que $\{w_1, w_2\} = \{av_1 + bv_2, cv_1 + dv_2\}$ es una base para V. En efecto, consideremos una combinación lineal nula:

$$\alpha(av_1 + bv_2) + \beta(cv_1 + dv_2) = 0$$

Agrupando v_1, v_2 y usando la independencia lineal de estos tenemos que:

$$(\alpha a + \beta c)v_1 + (\alpha b + \beta d)v_2 = 0 \implies \alpha a + \beta c = 0 \wedge \alpha b + \beta d = 0$$

Esto puesto en un sistema matricial nos da que:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como $ad - bc \neq 0$ se sigue que $\alpha = 0 = \beta$, probando la independencia lineal. Ahora veamos que genera V, de la definición de los w_j, para cada $i \in [n]$ se tiene:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1i} \\ v_{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{1i} \\ w_{2i} \end{pmatrix}$$

Luego, por la regla de Cramer (o simplemente multiplicando por la inversa de B y operar) obtenemos:

$$v_{1i} = \frac{dw_{1i} - bw_{2i}}{|B|} \quad ; \quad v_{2i} = \frac{aw_{2i} - cw_{1i}}{|B|}$$

Entonces tendríamos que:

$$v_1 = \frac{d}{|B|}w_1 - \frac{b}{|B|}w_2 \quad ; \quad v_2 = \frac{a}{|B|}w_2 - \frac{c}{|B|}w_1$$

Ahora, sea $v \in V$, existen α_1 y α_2 tales que $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$, reemplazando lo anterior se obtiene:

$$v = \alpha_1\left(\frac{d}{|B|}w_1 - \frac{b}{|B|}w_2\right) + \alpha_2\left(\frac{a}{|B|}w_2 - \frac{c}{|B|}w_1\right)$$

$$v = \left(\frac{\alpha_1 d - \alpha_2 c}{|B|}\right)w_1 + \left(\frac{\alpha_2 a - \alpha_1 b}{|B|}\right)w_2$$

Esto prueba que $v \in \langle w_1, w_2\rangle$ y así que $\{w_1, w_2\}$ es una base para V, por lo que BA_V representa también a V.

La relación entre los menores de orden 1 de $A_V = (v_{ij})$ y $BA_V = (w_{ij})$ es simplemente la definición del producto de matrices:

$$w_{1i} = av_{1i} + bv_{2i} \quad ; \quad w_{2i} = cv_{1i} + dv_{2i}$$

En el caso de los menores de orden 2 se tiene que:

$$p_{ij}(BA_V) = \det\begin{pmatrix} av_{1i} + bv_{2i} & av_{1j} + bv_{2j} \\ cv_{1i} + dv_{2i} & cv_{1j} + dv_{2j}\end{pmatrix}$$

$$= |B|(v_{1i}v_{2j} - v_{1j}v_{2i})$$

$$= |B|\det\begin{pmatrix} v_{1i} & v_{1j} \\ v_{2i} & v_{2j}\end{pmatrix}$$

$$= |B|p_{ij}(A_V)$$

Así, si $p_{ij}(A_V) > 0$ para todo $i < j$ la condición que necesita B para que BA_V tenga sus menores maximales positivos es que $|B| > 0$.

Ejercicio 1.20 Sea $\mathrm{Mat}_{2\times n}^{\mathrm{tnn}}$ el conjunto de todas las matrices de orden $2 \times n$ cuyos menores maximales son no negativos y sea $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_{\geq 0}$ el conjunto de todas las matrices totalmente no negativas en $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Pruebe que $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{R}^n)_{\geq 0}$ coincide con el cociente de $\mathrm{Mat}_{2\times n}^{\mathrm{tnn}}$ módulo la acción de multiplicación por izquierda de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_{\geq 0}$.

Solución. En la solución del problema asumiré que el resultado es cierto considerando que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_{\geq 0}$ es el subconjunto de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ formado por las matrices con determinante positivo. La acción de multiplicación por izquierda de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_{\geq 0}$ define una relación de equivalencia, dada por:

$$A \sim B \Leftrightarrow A = XB, X \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_{\geq 0}$$

Definimos la función $\varphi : \mathrm{Gr}_2(\mathbb{R}^n)_{\geq 0} \to \dfrac{\mathrm{Mat}_{2\times n}^{\mathrm{tnn}}}{\sim}$ asignando a cada subespacio V la clase $[A_V]$, donde A_V es cualquier matriz que representa a V y cumple que $p_{ij}(A_V) \geq 0$. Note que esta matriz siempre existe por la misma definición de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_{\geq 0}$.

- **La función está bien definida.** Para ver esto, tomemos otra matriz B_V que representa a V y que cumpla lo pedido. Como las filas de ambas matrices generan V ambas tienen el mismo rango, por lo que mediante operaciones elementales podemos transformar una en otra, esto puesto de otra forma quiere decir que:

  $$B_V = CA_V$$

  donde $C \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Por el ejercicio anterior tenemos que $p_{ij}(B_V) = |C|p_{ij}(A_V)$, como $p_{ij}(B_V) \geq 0$ y $p_{ij}(A_V) > 0$ se concluye que $|C| \geq 0$. Así $[B_V] = [A_V]$ por lo que la función está bien definida.

- **La función es inyectiva.** En efecto, si $\varphi(V) = \varphi(W)$ entonces $[A_V] = [A_w]$ por lo que $A_V = CA_W$ para algún $C \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ con determinante positivo. Nuevamente por el ejercicio anterior se tiene que A_V representa a W por lo que $V = W$.

- **La función es sobreyectiva.** Dado $[A] \in \dfrac{\mathrm{Mat}_{2\times n}^{\mathrm{tnn}}}{\sim}$, denotamos a las filas de A por los vectores $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$. Consideramos $V = \langle a_1, a_2 \rangle$, claramente $V \in \mathrm{Gr}_2(\mathbb{R}^2)_{\geq 0}$ y $\varphi(V) = [A]$.

Hemos probado entonces que φ es una biyección y así que ambos conjuntos coinciden.

Ejercicio 1.21 Dada A una matriz de orden $2 \times n$, pruebe que para cualesquiera $1 \leq i < j < k < l \leq n$ se tiene la siguiente relación:

$$p_{ij}p_{kl} + p_{il}p_{jk} = p_{ik}p_{jl}$$

Este tipo de relaciones se denominan las relaciones de Plücker.

Solución. Consideremos una matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}$$

Probaremos lo pedido calculando cada uno de los extremos, escribiremos simplemente $p_i j$ para $p_{ij}(A)$. Tenemos:

$$\begin{aligned} p_{ij} &= a_{1i}a_{2j} - a_{1j}a_{2i} \\ p_{kl} &= a_{1k}a_{2l} - a_{1l}a_{2k} \\ p_{il} &= a_{1i}a_{2l} - a_{1l}a_{2i} \\ p_{jk} &= a_{1j}a_{2k} - a_{1k}a_{2j} \\ p_{ik} &= a_{1i}a_{2k} - a_{1k}a_{2i} \\ p_{jl} &= a_{1j}a_{2l} - a_{1l}a_{2j} \end{aligned}$$

Luego:

$$p_{ij}p_{kl} = a_{1i}a_{2j}a_{1k}a_{2l} - a_{1i}a_{2j}a_{1l}a_{2k} - a_{1j}a_{2i}a_{1k}a_{2l} + a_{1l}a_{2k}a_{1j}a_{2i}$$

$$p_{il}p_{jk} = a_{1i}a_{2l}a_{1j}a_{2k} - a_{1i}a_{2l}a_{1k}a_{2j} - a_{1l}a_{2i}a_{1j}a_{2k} + a_{1l}a_{2i}a_{1k}a_{2j}$$

Sumamos estas expresiones obtenemos lo pedido:

$$p_{ij}p_{kl} + p_{il}p_{jk} = (a_{1i}a_{2k} - a_{1k}a_{2i})(a_{1j}a_{2l} - a_{1l}a_{1j}) = p_{ik}p_{jl}$$

Ejercicio 1.22 El politopo cuyos vértices son las triangulaciones del polígono regular de n lados y cuyas aristas son los flips entre diagonales, se denomina el associahedro o politopo de Stasheff y se denota por A_n.

1) ¿Cuántos vértices, aristas y caras tiene el associahedro A_3?

2) ¿Cuál es la dimensión del associahedro A_3?

3 ¿Cuál puede ser la dimensión del associahedro A_n y porqué?

Solución. El hexágono tiene 14 triangulaciones (ver Figuras abajo). Por comodidad numeraré las 14 triangulaciones. La numeración la escogí arbitrariamente (la verdad fue el orden en el que fui encontrando las triangulaciones).

Estas 14 triangulaciones serán nuestros vértices, para hallar las aristas debemos encontrar como se relacionan nuestras triangulaciones mediantes flip's. Manualmente encontré el siguiente grafo que nos muestra estas relaciones (ver Figura 4).

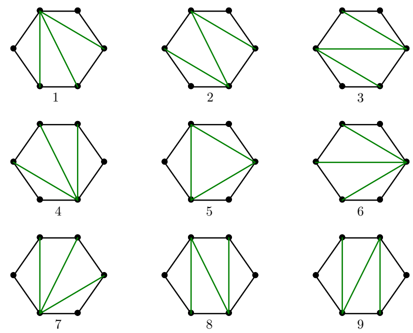


Figura 2: Triangulaciones del hexágono.

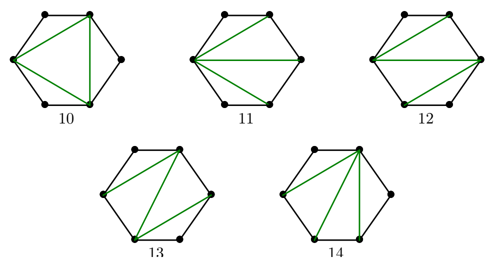


Figura 3: Triangulaciones del hexágono.

Este grafo lo podemos modificar y encontrar que A_3 es un eneadro (tiene 9 caras). Esto se puede observar en la Figura 5.

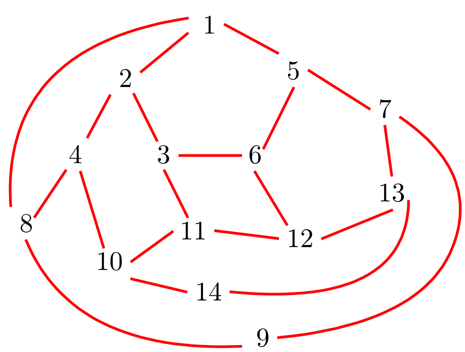


Figura 4: Grafo.

a) Tiene 14 vértices, 9 caras y 21 aristas.

b) Su dimensión es 3.

c) Recordar que la dimensión de un politopo es la dimensión del espacio euclidiano más pequeño que lo contiene. Así por ejemplo el eneadro tiene dimensión 3 por que está contenido en $\mathbb{R}^3$. A simple vista, podría decir que la dimensión de A_n es n, pues cada vértice tendría n direcciones posibles en las que seguir mutando. Esas n direcciones me darán $\mathbb{R}^n$ como el ambiente espacio.

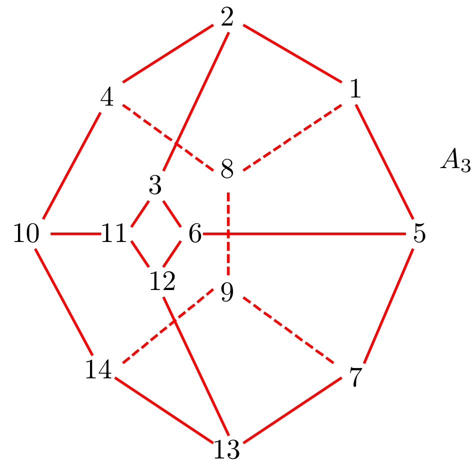


Figura 5: Politopo.

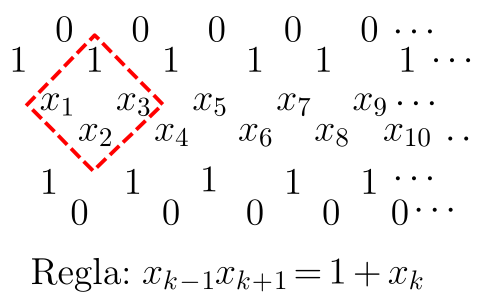
Ejercicio 1.23 Generalizamos la regla del friso en la definición 1.1 y consideramos las siguientes reglas del juego:

$$x_{k-1}x_{k+1} = \begin{cases} x_k^a + 1 & \text{si } k \text{ es par} \\ x_k^b + 1 & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

1) Calcule $x_3, x_4, \ldots$ como expreseiones en términos de las variables x_1 y x_2 cuando $(a,b) \in \{(1,2),(1,3)\}$.¿También se repite el patrón en algún momento?¿Cuáles son los valores de las variables si fijamos $x_1 = x_2 = 1$?

2) Para $(a,b) = (1,4)$ y $x_1 = x_2 = 1$ calcular la secuencia (x_i) para $i = 1, \ldots, 10$.¿Es periódica?

Solución. Recordamos la regla del friso en la Figura.



a) Consideremos el caso $a = 1$ y $b = 2$, la regla quedaría:

$$x_{k-1}x_{k+1} = \begin{cases} x_k + 1 & \text{si } k \text{ es par} \\ x_k^2 + 1 & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

Tenemos entonces:

$$
\begin{aligned}
x_1x_3 = 1 + x_2 &\implies x_3 = \frac{1+x_2}{x_1} \\
x_2x_4 = 1 + x_3^2 &\implies x_4 = \frac{1+\left(\frac{1+x_2}{x_1}\right)^2}{x_2} = \frac{1+x_1^2+x_2^2+2x_2}{x_1^2x_2} \\
x_3x_5 = 1 + x_4 &\implies x_5 = \frac{1+\left(\frac{1+x_1^2+x_2^2+2x_2}{x_1^2x_2}\right)}{\frac{1+x_2}{x_1}} = \frac{1+x_1^2+x_2}{x_1x_2} \\
x_4x_6 = 1 + x_5^2 &\implies x_6 = \frac{1+\left(\frac{1+x_1^2+x_2}{x_1x_2}\right)^2}{\frac{1+x_1^2+x_2^2+2x_2}{x_1^2x_2}} = \frac{1+x_1^2}{x_2} \\
x_5x_7 = 1 + x_6 &\implies x_7 = \frac{1+\left(\frac{1+x_1^2}{x_2}\right)}{\frac{1+x_1^2+x_2}{x_1x_2}} = x_1
\end{aligned}
$$

Así $x_8 = x_2$ y a partir de este momento se empiezan a repetir las variables x_i, por lo que sí es periódica. Si ponemos $x_1 = x_2 = 1$ obtenemos la sucesión: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 5, x_5 = 3, x_6 = 2, x_7 = 1, x_8 = 1, \ldots$.

b) Calculamos:

$$
\begin{aligned}
x_1x_3 = 1 + x_2 &\implies x_3 = 2 \\
x_2x_4 = 1 + x_3^4 &\implies x_4 = 17 \\
x_3x_5 = 1 + x_4 &\implies x_5 = 9 \\
x_4x_6 = 1 + x_5^4 &\implies x_6 = 386 \\
x_5x_7 = 1 + x_6 &\implies x_7 = 43 \\
x_6x_8 = 1 + x_7^4 &\implies x_8 = 8857 \\
x_7x_9 = 1 + x_8 &\implies x_9 = 206 \\
x_8x_10 = 1 + x_9^4 &\implies x_{10} = 203321
\end{aligned}
$$

Las expresiones en función de x_1 y x_2 no son nada amigables y por lo anterior se ve que no es periódica.

Ejercicio 1.24 - 1.25 Una red plana de orden n es un grafo plano orientado con $2n$ vértices marcados por $1, \ldots, n$ y $1', \ldots, n'$, de los cuales i son fuentes e i' son pozos o sumideros, con vértices interiores y aristas orientadas (de izquierda a derecha generalmente).

Consideramos la red plana Γ_0 mostrada en la Figura 6:

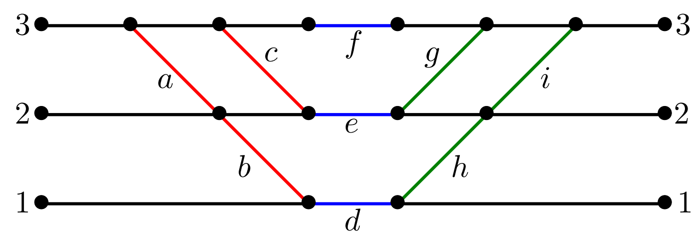


Figura 6: Red plana Γ_0.

Un camino en Γ_0 lo tomaremos como un camino que liga un vértice i de la izquierda con un vértice j de la derecha, tal que cada arista se puede atravesar solamente de izquierda a derecha. El peso de un camino es el producto de todos los pesos de sus aristas (los pesos de las aristas sin etiquetas se consideran 1).

1) Calcule la matriz de caminos de Γ_0, esta es la matriz de orden 3 tal que cada entrada a_{ij} es la suma de los pesos de todos los caminos que ligan i con j.

2) Pruebe que la matriz $A = (a_{ij})$ es totalmente positiva si y solo si $a, b, \ldots, i > 0$.

Solución.

1) Analizando todos los posibles caminos, la matriz pedida es:

$$A = \begin{pmatrix} d & dh & dhi \\ bd & bdh + e & bhdi + e(i+g) \\ abd & abdh + e(a+c) & (a+c)e(g+i) + f \end{pmatrix}$$

b) ($\Rightarrow$) Si A es totalmente positiva sus entradas son positivas, en particular tenemos que $d > 0$. Con esto, utilizándolo progresivamente en las demás entradas se prueba lo pedido.

($\Leftarrow$) Podríamos calcular todos los menores de la manera usual, pero estos menores los podemos expresar en función de los caminos. Por ejemplo, consideremos $I = \{1, 2\}, J = \{2, 3\}$ entonces el menor asociado es:

$$\det \begin{pmatrix} dh & dhi \\ bdh + e & bhdi + e(i+g) \end{pmatrix} = egdh$$

Para nosotros un camino que une I con J es una upla de caminos ligando cada coordenada de I con la respectiva coordenada de J. Si vemos en Γ_0 los caminos de pesos eg y dh ligan 2 con 3 y 1 con 2 respectivamente (ver Figura 7), ¿serán estos caminos los únicos que unen I con J?.

La respuesta es no, podemos considerar por ejemplo el camino de peso dh, como antes, y el camino de peso ei. En este caso, los caminos siguen ligando I con J sin embargo comparten un vértice en común.

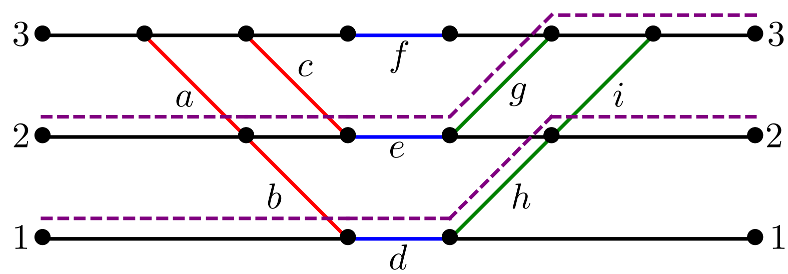


Figura 7: Caminos ligando I con J.

Entonces, podríamos decir que el menor asociado a I y J es la suma de todos los productos de pesos de caminos que unen I con J y no comparten ningún vértice en común. En efecto, esto es un lema denominado el Lema de Lindstrom's. Los menores de A son:

* De orden 1 son las entradas, si $a, b, \ldots, i > 0$ entonces estos serán positivos.
* De orden 2 son:
  - Asociado a $I = \{1,2\}$ y $J = \{1,2\}$: **de**.
  - Asociado a $I = \{1,2\}$ y $J = \{1,3\}$: **e(i+g)d**.
  - Asociado a $I = \{1,2\}$ y $J = \{2,3\}$: **dehg**.
  - Asociado a $I = \{1,3\}$ y $J = \{1,2\}$: **de(a+c)**.
  - Asociado a $I = \{1,3\}$ y $J = \{1,3\}$: **d(f+(a+c)e(g+i))**.
  - Asociado a $I = \{1,3\}$ y $J = \{2,3\}$: **dh(f+(a+c)eg)**.
  - Asociado a $I = \{2,3\}$ y $J = \{1,2\}$: **bdec**.
  - Asociado a $I = \{2,3\}$ y $J = \{1,3\}$: **bd(f+ce(g+i))**.
  - Asociado a $I = \{2,3\}$ y $J = \{2,3\}$: **ef+bdh(ceg+f)**.

  Se nota que cada uno de estos es positivo si es que $a, b, \ldots, i > 0$. Así hemos probado que A es totalmente positivo, más aún se puede probar que cualquier otra matriz TP es de este tipo.

Ejercicio 2.6 Pruebe que la mutación de un carcaj es una involución. Es decir, para cada carcaj Q y cada vértice mutable k de Q tenemos $u_k(u_k(Q)) = Q$.

Solución. Basta analizar localmente nuestro quiver, vamos a suponer que existe algún camino de la forma $i \to k \to j$. Si es que no existiera ningún camino, entonces al mutar solo invertiríamos las orientaciones que contienen a k y al volver a mutar volveríamos a Q probando lo pedido. Hay tres posibles casos para el camino $i \to k \to j$, todos se muestran en la Figura 8, note que tras mutar dos veces se llega a lo que había inicialmente.

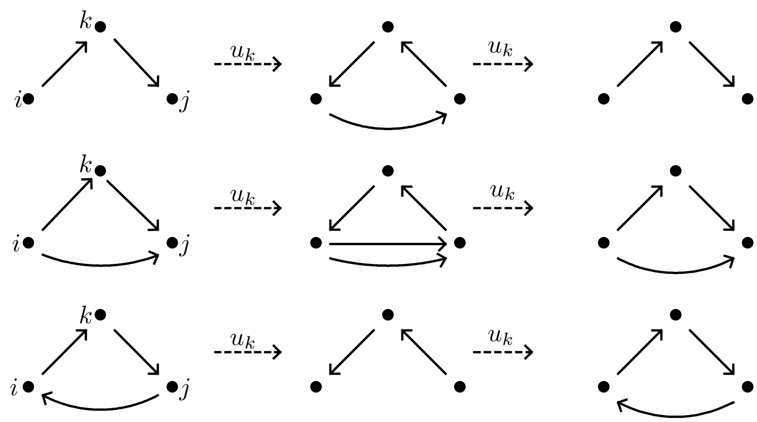


Figura 8: Mutación.

Cabe decir, que pueden haber muchas aristas de un vértice a otro, pero al aplicar la mutación simplemente se sumarán o restarán más de ellas por lo que se aplica la misma idea el número de veces que sean necesarias. Esto prueba lo pedido.

Ejercicio 2.12 Verifica el último paso en la prueba del Lema 2.11.

Solución. Si bien es cierto, solo debemos analizar en el caso del cuadrilátero pueden haber muchos casos para este. Analizamos cada uno, aunque los carcajes se parecen en mucho.

- **Caso 1.** El cuadrilátero esta determinado por tres lados y una diagonal.

  En este caso las restricciones de los quivers $Q(T)$ y $Q(T')$ a este cuadrilátero se muestran en la Figura 9 (estamos tomando una diagonal inicial, esta elección es arbitaria).

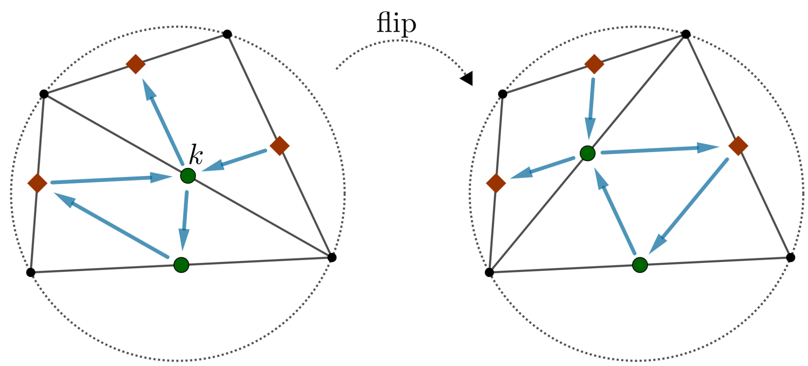


Figura 9: Quiver asociados $Q(T)$ y $Q(T')$.

  Calculemos $u_k(Q(T))$, hay tres caminos que tienen a k como vértice medio por lo que se agregan tres aristas. Una de ellas tiene como extremos a vértices congelados por lo que no se toma en cuenta. Otra de ellas forma un 2-ciclo por lo que la eliminamos en el tercer paso. El quiver $u_k(Q(T))$ se muestra en la Figura 10.

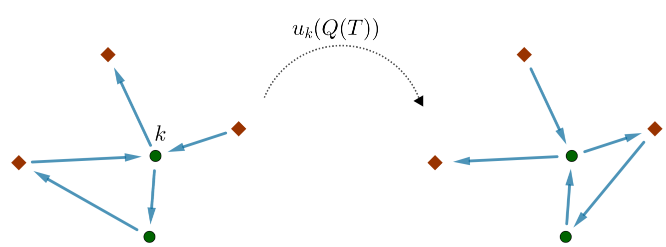


Figura 10: Mutación de $Q(T)$ vía k.

- **Caso 2.** El cuadrilátero está formado por dos lados y dos diagonales.

  En este caso las restricciones de los quivers $Q(T)$ y $Q(T')$ a este cuadrilátero se muestran en la Figura 11 (estamos tomando una diagonal inicial, esta elección es arbitaria).

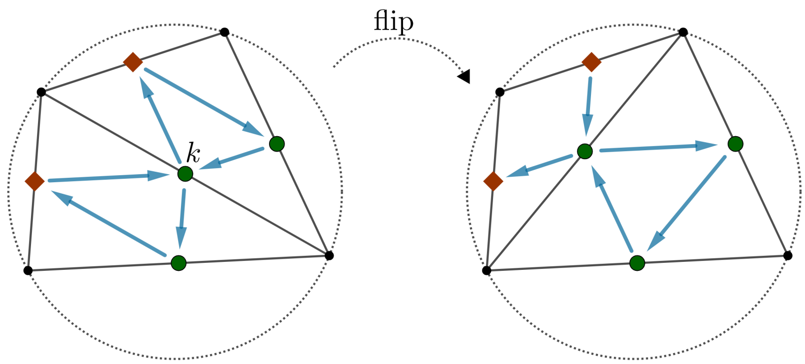


Figura 11: Quiver asociados $Q(T)$ y $Q(T')$.

Calculemos $u_k(Q(T))$, hay cuatro caminos que tienen a k como vértice medio, por lo que se agregan cuatro aristas. Una de ellas tiene como extremos a vértices congelados por lo que no se toma en cuenta. Dos de ellas forman un 2-ciclo por lo que las eliminamos en el tercer paso. El quiver $u_k(Q(T))$ se muestra en la Figura 12, se nota que este coincide con $Q(T')$.

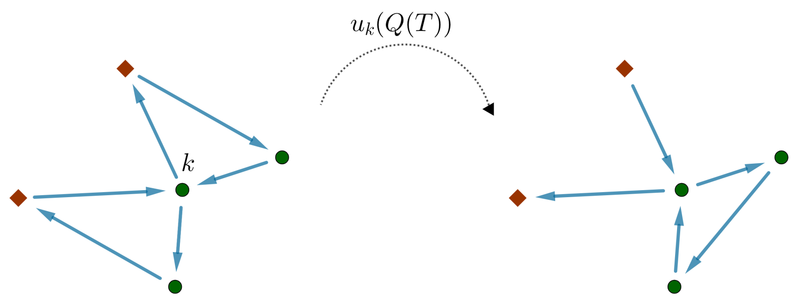


Figura 12: Mutación de $Q(T)$ vía k.

c) **Caso 3.** El cuadrilátero está formado por un lado y tres diagonales.

En este caso las restricciones de los quivers $Q(T)$ y $Q(T')$ a este cuadrilátero se muestran en la Figura 13 (estamos tomando una diagonal inicial, esta elección es arbitaria).

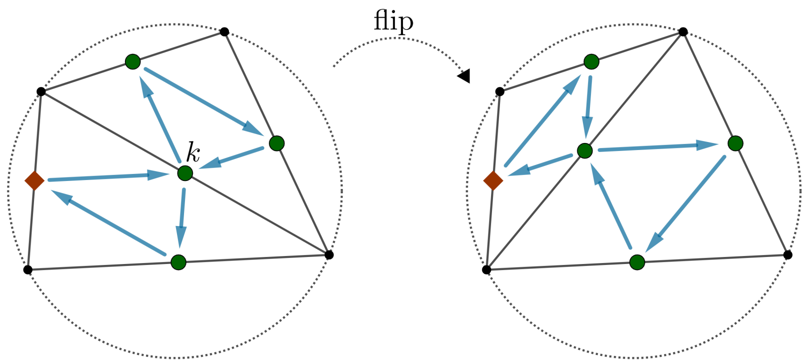


Figura 13: Quiver asociados $Q(T)$ y $Q(T')$.

Calculemos $u_k(Q(T))$, hay cuatro caminos que tienen a k como vértice medio, por lo que se agregan cuatro aristas. Dos de ellas forman un 2-ciclo por lo que las eliminamos. El quiver $u_k(Q(T))$ se muestra en la Figura 14, se nota que este coincide con $Q(T')$.

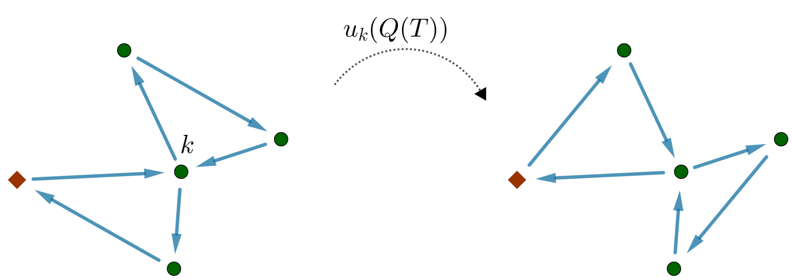


Figura 14: Mutación de $Q(T)$ vía k.

d) **Caso 4.** El cuadrilátero está formado por cuatro lados, en este caso $n = 4$ necesariamente, pues en otro caso esto es imposible.

Los quiver asociados $Q(T)$ y $Q(T')$ se muestran en la Figura 15. Al calcular $u_k(Q(T))$, como no hay ningún camino que contenta a k, solo se intercambia la orientación de todas las aristas, obteniendo $Q(T')$.

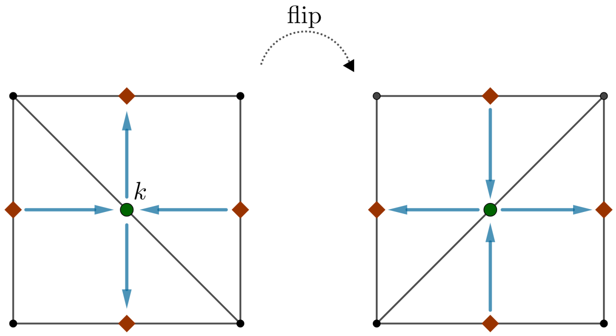


Figura 15: Quiver asociados $Q(T)$ y $Q(T')$.

e) **Caso 5.** El cuadrilátero está formado por cuatro diagonales. Este caso en esencia es lo mismo que el caso 3, ya que los quiver $Q(T)$ y $Q(T')$ tendrán las mismas aristas que los de la Figura 13, la única diferencia será que todos sus vértices son mutables. Al mutar respecto a k, se obtendrá lo mismo que la Figura **??** ya que el vértice congelado que se muestra en aquella imagen cumple el mismo papel que si fuera mutable.

Ejercicio 2.16 ¿Cuántos carcajes (sin vértices congelados) de tipo A_3 existen?

Solución. Vamos a considerar al quiver $Q : 1 \to 2 \to 3$. Para poder encontrar todos los carcajes del mismo tipo tenemos que hallar $[Q]$, en realidad de su parte mutable pero al no tener vértices congelados da igual. Para calcular su clase, mutaremos en las tres direcciones posibles y encontraremos que tras ciertos pasos los carcajes se empiezan repetir. Las tres mutaciones se muestran en la Figura 16.

$$u_1(Q) \quad \begin{tikzcd} 1 & 2 \arrow[l] \arrow[r] & 3 \end{tikzcd}$$

$$u_2(Q) \quad \begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, bend left] & 2 \arrow[l] & 3 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$$u_3(Q) \quad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 & 3 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Figura 16: Mutaciones.

Ahora, vamos a mutar cada una de estas mutaciones en las tres direcciones posibles. Esto se muestra en las Figura 17, 18 y 19.

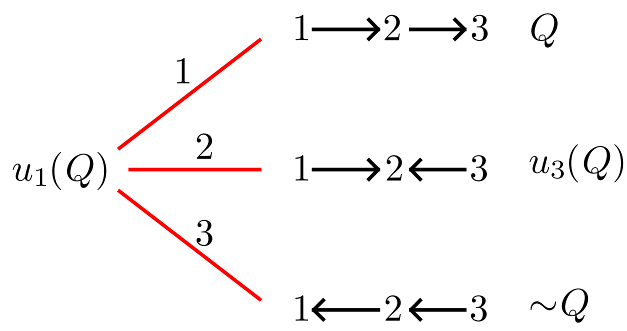


Figura 17: Mutaciones de $u_1(Q)$.

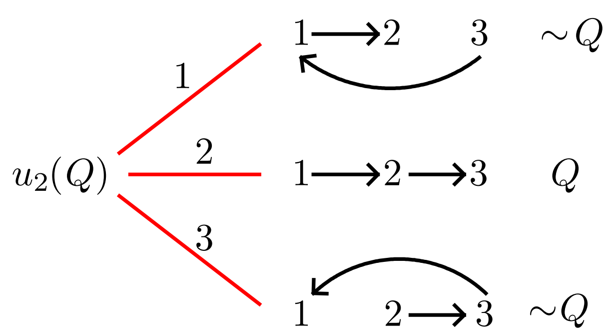


Figura 18: Mutaciones de $u_2(Q)$.

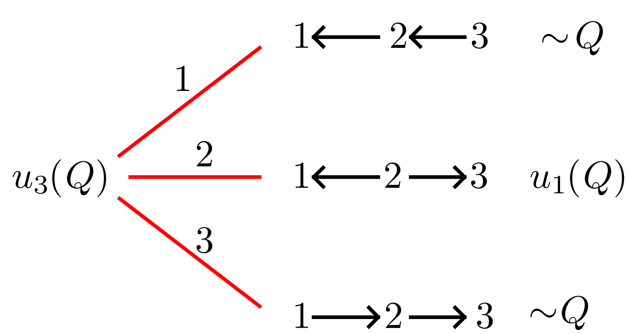


Figura 19: Mutaciones de $u_3(Q)$.

Así tenemos que $[Q] = \{Q, u_1(Q), u_2(Q), u_3(Q)\}$ por lo que estos cuatro carcajes son los únicos que tienen el tipo A_3.

Ejercicio 2.22 Pruebe el corolario 2.21 sin usar el Teorema de Calder-Keller.

Solución. Procederemos por inducción sobre el número de vértices, los casos $n = 1$ y $n = 2$ son evidentes. Supongamos que vale para árboles de n vértices y consideremos un árbol de $n + 1$ vértices.

Sean Q y Q' dos orientaciones en nuestro árbol. Se sabe que todo árbol tiene por lo menos un vértice de grado 1, denotamos a este vértice por v_1 y a v el único vértice al que está ligado. Se sabe que el grafo obtenido al eliminar v y la arista que lo contiene, se obtiene otro árbol de n vértices. Denotamos por Q_1 y Q'_1 a las orientaciones inducidas en estos árboles, que se obtienen de las orientaciones de Q y Q' (ver Figura 20). Por inducción, podemos transformar Q en Q' tras una secuencia finita de mutaciones en pozos y fuentes, a estos los denotamos por $a_1, \ldots, a_n$.

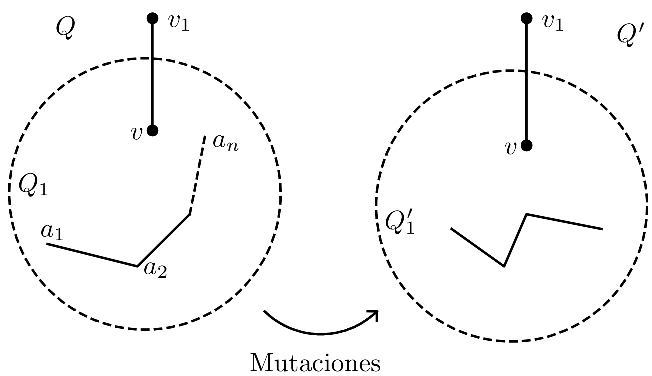


Figura 20: Árboles Q y Q'.

Tenemos casos:

a) Si $a_i \neq v$ para todo i. En este caso los a_i seguirán siendo pozos o fuentes en Q y al realizar la mutación en Q se obtendrá Q' salvo posiblemente por la orientación de la arista vv_1, que si no es la misma se invierte (que sería mutar en v_1 que es una fuente o un sumidero).

b) Si $a_i = v$ para algún i. En este caso se puede dar dos casos más:

   - La flecha que contiene a v_1 hace que v_i deje ser de pozo o fuente. En este caso lo que se hace es invertir su orientación (que es mutar en v_1), luego realizamos la secuencia de mutaciones que transforman Q_1 en Q'_1 y finalmente se invierte, si fuera necesario, la flecha que contiene a v_1.
   - La flecha que contiene a v_1 no causa ningún cambio en v_i. En este caso se procede de la misma forma que en el caso a).

Así en cualquier caso, hemos probado que tras una secuencia finita de mutaciones se puede obtener Q' a partir de Q, solo mutando en pozos o fuentes.

Ejercicio 2.29 Pruebe el Lema 2.28.

Solución. En este ejercicio doy una correción y es que probaré que:

$$\begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix} \widetilde{B}(Q)A_1 = \widetilde{B}(Q')$$

Recordar que si tenemos una permutación $\pi : [n] \to [n]$ la matriz asociada se define como $A = (a_{ij})$ donde $a_{ij} = 1$ si $\pi(i) = j$ y $a_{ij} = 0$ en cualquier otro caso. Sean A_1 y A_2 las matrices asociadas a π_1 y π_2, cabe decir que $\pi_2 : \{n+1, \ldots, n+m\} \to \{n+1, \ldots, n+m\}$ pero se puede considerar de $[m]$ a $[m]$.

Podemos dividir $\widetilde{B}(Q)$ en su matriz de intercambio $B(Q)$ y la parte congelada C, operando:

$$\begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix} \left(\frac{B(Q)}{C}\right) A_1 = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix} \left(\frac{B(Q)A_1}{CA_1}\right) = \left(\frac{A_1^{-1}B(Q)A_1}{A_2^{-1}CA_1}\right)$$

Ahora operaremos cada submatriz y veremos que coincide con $\widetilde{B}(Q')$. Antes de esto, por la definición de las permutacion para cada $i \in [n]$ existe $k_i \in [n]$ tal que $\pi_1(k_i) = i$. De igual forma, para cada $j \in \{n+1, \ldots, m\}$ existe $j \in \{n+1, \ldots, m\}$ tal que $\pi_2(k_j) = j$.

Dado $i, j \in [n]$ se tiene:

$$\begin{aligned}
(A_1^{-1}B(Q)A_1)_{ij} &= \sum_{l=1}^{n} (A_1^{-1})_{il} \left(\sum_{p=1}^{n} (B(Q))_{lp}(A_1)_{pj} \right) \\
&= \sum_{l=1}^{n} (A_1^{-1})_{il}(B(Q))_{l,k_j} = (B(Q))_{k_i,k_j}
\end{aligned}$$

Si es que hay r flechas de k_i a k_j (o viceversa) también lo habrá de i a j (basta considerar π_1) y se tendrá que $(\widetilde{B}(Q'))_{ij} = r = (A_1^{-1}B(Q)A_1)_{ij}$ para $i, j \in [n]$. Ahora para $i \in \{n+1, \ldots, m\}$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene:

$$\begin{aligned}
(A_2^{-1}CA_1)_{ij} &= \sum_{l=1}^{m} (A_2^{-1})_{il} \left(\sum_{p=1}^{n} (C)_{lp}(A_1)_{pj} \right) \\
&= \sum_{l=1}^{m} (A_2^{-1})_{il}(C)_{l,k_j} = (C)_{k_i,k_j}
\end{aligned}$$

Si es que hay r flechas de k_i a k_j (o viceversa) también lo habrá de i a j (basta considerar π_1 para k_j y π_2 para k_i) y se tendrá que $(\widetilde{B}(Q'))_{ij} = r = (A_2^{-1}CA_1)_{ij}$ para $i \in \{n+1, \ldots, m\}$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$. Esto prueba lo pedido.

Ejercicio 2.31 Convéncete que el Lema 2.30 es correcto.

Solución. Procederemos caso por caso.

- Si $i = k$ o $j = k$, veamos $i = k$ el otro caso es análogo. Si hay $p \geq 0$ aristas que ligan k con j entonces $b_{ij} = p$. Tras una mutación, el paso 1 no genera ninguna arista nueva que contenga a k. El paso 2 intercambia las orientaciones de las p aristas anteriores. En el paso 3 si se eliminara algún ciclo, este no contendría ninguna de las p aristas. Así, tras la mutación vía k tendríamos que $b'_{ij} = -p = -b_{ij}$.

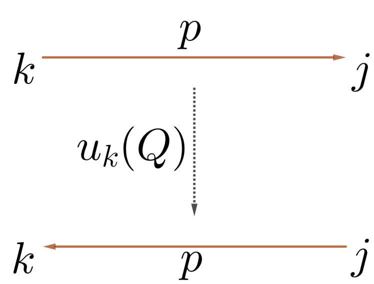


Figura 21: Caso $i = k$.

  En el caso que hallan $p \geq 0$ aristas que ligan j con k entonces $b_{ij} = -p$, tras la mutación siguiendo los mismos pasos anteriores tenemos que hay p caminos ligando k con j por lo que $b'_{ij} = p = -(-p) = -b_{ij}$.

- Si $b_{ik} > 0$, $b_{kj} > 0$, digamos que $b_{ik} = m$ y $b_{kj} = n$. Entonces existen m aristas que ligan i con k y n aristas que ligan k con j. Supongamos que hay $p \geq 0$ aristas que ligan i con j tenemos que $b_{ij} = p$. Tras aplicar la mutación vía el vértice k, agregamos mn aristas ligando i con j. Al invertir las orientaciones de las aristas que contienen a k no se genera ningún 2-ciclo.

  Entonces tenemos que:

$$b'_{ij} = p + mn = b_{ij} + b_{ik}b_{kj}$$

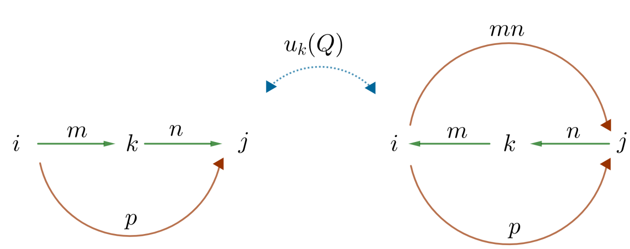


Figura 22: Caso $b_{ik} > 0, b_{kj} > 0$.

Análogamente si se supone ahora que hay $p \geq 0$ aristas que ligan j con i tenemos que $b_{ij} = -p$. Tras aplicar la mutación vía el vértice k, agregamos mn aristas ligando i con j. Se generan entonces 2-ciclos por lo que los eliminamos.

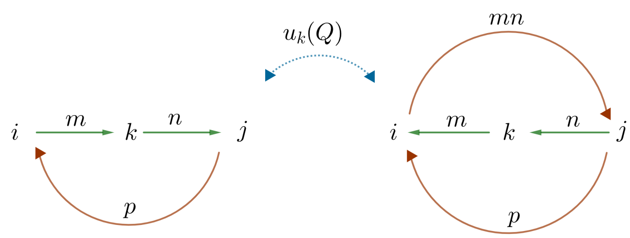


Figura 23: Caso $b_{ik} > 0, b_{kj} > 0$.

Entonces, si $mn > p$ el número de aristas que ligan i con j será $mn - p$. Si $mn < p$ el número de aritas que ligan j con i será $p - mn$. En cualquier caso se tiene que:

$$b'_{ij} = mn - p = b_{ij} + b_{ik}b_{kj}$$

- Si $b_{ik} < 0$, $b_{kj} < 0$, digamos que $b_{ik} = -m$ y $b_{kj} = -n$. Entonces existen m aristas que ligan k con i y n aristas que ligan j con k. Supongamos que hay $p \geq 0$ aristas que ligan j con i tenemos que $b_{ij} = -p$. Tras aplicar la mutación vía el vértice k, agregamos mn aristas ligando j con i. Al invertir las orientaciones de las aristas que contienen a k no se genera ningún 2-ciclo. Entonces tenemos que:

$$b'_{ij} = -(mn + p) = b_{ij} - b_{ik}b_{kj}$$

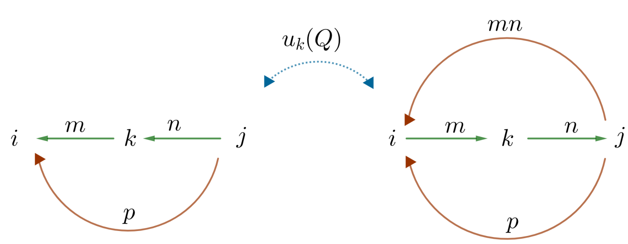


Figura 24: Caso $b_{ik} < 0, b_{kj} < 0$.

Análogamente si se supone ahora que hay $p \geq 0$ aristas que ligan i con j tenemos que $b_{ij} = p$. Tras aplicar la mutación vía el vértice k, agregamos mn aristas ligando j con i. Se generan entonces 2-ciclos por lo que los eliminamos.

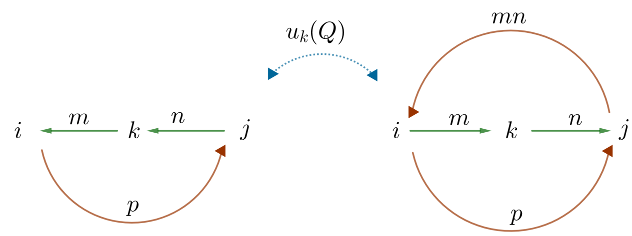


Figura 25: Caso $b_{ik} < 0, b_{kj} < 0$.

Entonces, si $mn > p$ el número de aristas que ligan j con i será $mn - p$. Si $mn < p$ el número de aristas que ligan i con j será $p - mn$, en cualquier caso se tiene que:

$$b'_{ij} = p - mn = b_{ij} - b_{ik} b_{kj}$$

- Si no se cumple ninguno de los casos anteriores, tras aplicar la mutación las aristas que ligan i con j (o viceversa) no sufren ningún cambio. Entonces $b'_{ij} = b_{ij}$.

Ejercicio 2.35 Pruebe las afirmaciones 2 y 4 de la Proposición 2.34.

Solución.

2) Pongamos $u_k(u_k(\widetilde{B})) = (c''_{ij})$, $u_k(\widetilde{B}) = c'_{ij}$ y $\widetilde{B} = c_{ij}$.

   - Si $i = k$ o $j = k$, entonces $c''_{ij} = -c'_{ij} = c_{ij}$.
   - Si $c'_{ik}, c'_{kj} > 0$ entonces se tiene que $c_{ik}, c_{kj} < 0$, luego:

   $$c''_{ij} = c'_{ij} + c'_{ik} c'_{kj} = (c_{ij} - c_{ik} c_{kj}) + c_{ik} c_{kj} = c_{ij}$$

   - Si $c'_{ik}, c'_{kj} < 0$ entonces se tiene que $c_{ik}, c_{kj} > 0$, luego:

   $$c''_{ij} = c'_{ij} - c'_{ik} c'_{kj} = (c_{ij} + c_{ik} c_{kj}) - c_{ik} c_{kj} = c_{ij}$$

   - Cualquier otro caso se tiene $c''_{ij} = c'_{ij} = c_{ij}$.

   Esto prueba que $u_k(u_k(\widetilde{B})) = \widetilde{B}$.

4) Por la definición de mutación y usando el hecho que $b_{ij} = 0 = b_{ji}$ se tiene que:

$$(u_j(\widetilde{B}))_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{si } k = j \\ b_{ik} & \text{caso contrario} \end{cases} \qquad (u_j(\widetilde{B}))_{li} = \begin{cases} 0, & \text{si } l = j \\ b_{li} & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$(u_i(\widetilde{B}))_{lj} = \begin{cases} 0, & \text{si } l = i \\ b_{lj} & \text{caso contrario} \end{cases} \qquad (u_i(\widetilde{B}))_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{si } k = i \\ b_{jk} & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$(u_i(u_j(\widetilde{B})))_{lk} = \begin{cases} -(u_j(\widetilde{B}))_{lk}, & \text{si } l = i, k = i \\ (u_j(\widetilde{B}))_{lk} + (u_j(\widetilde{B}))_{li}(u_j(\widetilde{B}))_{ik}, & \text{si } (u_j(\widetilde{B}))_{li}, (u_j(\widetilde{B}))_{ik} > 0 \\ (u_j(\widetilde{B}))_{lk} - (u_j(\widetilde{B}))_{li}(u_j(\widetilde{B}))_{ik}, & \text{si } (u_j(\widetilde{B}))_{li}, (u_j(\widetilde{B}))_{ik} < 0 \\ (u_j(\widetilde{B}))_{lk}, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

$$(u_j(u_i(\widetilde{B})))_{lk} = \begin{cases} -(u_i(\widetilde{B}))_{lk}, & \text{si } l = j, k = j \\ (u_i(\widetilde{B}))_{lk} + (u_i(\widetilde{B}))_{lj}(u_i(\widetilde{B}))_{jk}, & \text{si } (u_i(\widetilde{B}))_{lj}, (u_i(\widetilde{B}))_{jk} > 0 \\ (u_i(\widetilde{B}))_{lk} - (u_i(\widetilde{B}))_{lj}(u_i(\widetilde{B}))_{jk}, & \text{si } (u_i(\widetilde{B}))_{lj}, (u_i(\widetilde{B}))_{jk} < 0 \\ (u_i(\widetilde{B}))_{lk}, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Ahora procederemos por casos para probar que $(u_i(u_j(\widetilde{B})))_{lk} = (u_j(u_i(\widetilde{B})))_{lk}$, supongamos que $k \neq l$, pues si son iguales la igualdad se cumple trivialmente.

- Si $l = i$ o $k = i$. Supongamos que $l = i$, entonces $k \neq i$ y $l \neq j$. Tenemos dos casos, que $k = j$ o que $k \neq j$, veamos el primero:

  $$\begin{aligned} (u_j(u_i(\widetilde{B})))_{lk} &= -(u_i(\widetilde{B}))_{lk} \\ &= -(u_j(\widetilde{B}))_{lk} \end{aligned}$$

  El segundo caso:

  $$\begin{aligned} (u_j(u_i(\widetilde{B})))_{lk} &= (u_i(\widetilde{B}))_{lk} \\ &= -b_{lk} = -(u_j(\widetilde{B}))_{lk} \end{aligned}$$

  En ambos casos tenemos que $(u_j(u_i(\widetilde{B})))_{lk} = (u_i(u_j(\widetilde{B})))_{lk}$.

- Si $(u_j(\widetilde{B}))_{li}, (u_j(\widetilde{B}))_{ik} > 0$. Entonces necesariamente $l \neq j$ y $k \neq j$, caso contrario ambos serían nulos. Luego tendríamos que $b_{li}, b_{ik} > 0$.

  Supongamos que $(u_i(\widetilde{B}))_{lj}, (u_i(\widetilde{B}))_{jk} > 0$, entonces tendríamos que $b_{lj}, b_{jk} > 0$ y así operando:

  $$\begin{aligned} (u_j(u_i(\widetilde{B})))_{lk} &= (u_i(\widetilde{B}))_{lk} + (u_i(\widetilde{B}))_{lj}(u_i(\widetilde{B}))_{jk} \\ &= (b_{lk} + b_{li}b_{ik}) + b_{lj}b_{jk} \\ &= (u_j(\widetilde{B}))_{lk} + b_{li}b_{ik} \\ &= (u_j(\widetilde{B}))_{lk} + (u_j(\widetilde{B}))_{li}(u_j(\widetilde{B}))_{ik} \\ &= (u_i(u_j(\widetilde{B})))_{lk} \end{aligned}$$

Si suponemos que $(u_i(\widetilde{B}))_{lj}, (u_i(\widetilde{B}))_{jk} < 0$ el procedimiento es análogo:

$$\begin{aligned}
(u_j(u_i(\widetilde{B})))_{lk} &= (u_i(\widetilde{B}))_{lk} - (u_i(\widetilde{B}))_{lj}(u_i(\widetilde{B}))_{jk} \\
&= (b_{lk} + b_{li}b_{ik}) - b_{lj}b_{jk} \\
&= (u_j(\widetilde{B}))_{lk} + b_{li}b_{ik} \\
&= (u_j(\widetilde{B}))_{lk} + (u_j(\widetilde{B}))_{li}(u_j(\widetilde{B}))_{ik} \\
&= (u_i(u_j(\widetilde{B})))_{lk}
\end{aligned}$$

En ambos casos tenemos que $(u_j(u_i(\widetilde{B})))_{lk} = (u_i(u_j(\widetilde{B})))_{lk}$.

- Si $(u_j(\widetilde{B}))_{li}, (u_j(\widetilde{B}))_{ik} < 0$ se procede de manera análoga.
- Si no se cumple ninguno de los casos anteriores, tenemos que $(u_i(u_j(\widetilde{B})))_{lk} = (u_j(\widetilde{B}))_{lk}$. Ahora, debemos analizar cada uno de los casos posibles para $(u_j(u_i(\widetilde{B})))_{lk}$.
  - Si $l = j$ o $k = j$, entonces:

$$\begin{aligned}
(u_j(u_i(\widetilde{B})))_{lk} &= -(u_i(\widetilde{B}))_{lk} \\
&= -b_{lj} = (u_j(\widetilde{B}))_{lk}
\end{aligned}$$

  - Si $(u_i(\widetilde{B}))_{lj}, (u_i(\widetilde{B}))_{jk} > 0$ entonces $b_{lj}, b_{jk} > 0$ y así:

$$\begin{aligned}
(u_j(u_i(\widetilde{B})))_{lk} &= (u_i(\widetilde{B}))_{lk} + (u_i(\widetilde{B}))_{lj}(u_i(\widetilde{B}))_{jk} \\
&= b_{lk} + b_{lj}b_{jk} \\
&= (u_j(\widetilde{B}))_{lk}
\end{aligned}$$

  - Si $(u_i(\widetilde{B}))_{lj}, (u_i(\widetilde{B}))_{jk} < 0$ se procede de manera análoga.
  - Si no se cumple ninguna entonces:

$$\begin{aligned}
(u_j(u_i(\widetilde{B})))_{lk} &= (u_i(\widetilde{B}))_{lk} \\
&= (u_j(\widetilde{B}))_{lk}
\end{aligned}$$

En cualquier caso se tiene que $(u_j(u_i(\widetilde{B})))_{lk} = (u_i(u_j(\widetilde{B})))_{lk}$.

Con todo lo anterior se prueba la igualdad pedida.

Ejercicio 2.38 En este ejercicio probamos la Proposoción 2.37. Sea $\widetilde{B}$ una matriz extendida anti-simetrizable de orden $(n+m) \times n$ y $k \in [n]$.

1) Muestre que para cualquier signo $\epsilon \in \{-1, 1\}$, la fórmula de la mutación es:

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & \text{si } k \in \{i, j\} \\ b_{ij} + [-\epsilon b_{ik}]_+ b_{kj} + b_{ik}[\epsilon b_{kj}]_+ & \text{caso contrario} \end{cases}$$

2) Sea I_n la matriz identidad de orden $n \times n$ y $E^n_{i,j}$ la matriz de orden $n \times n$ cuya única entrada no nula es un 1 en la posición $i - j$. Definimos $J_{n,k} = I_n - 2E^n_{k,k}$, $C_k = (c_{ij})$ la matriz cuadrada de orden $n+m$ cuya única columna no nula es la columna k con entradas $c_{ik} = [-\epsilon b_{ik}]_+$ y $F_k = (f_{ij})$ la matriz cuadrada de orden n cuya única fila no nula es la fila k con entradas $f_{kj} = [\epsilon b_{kj}]_+$. Verifica que:

$$u_k(\widetilde{B}) = (J_{m+n,k} + C_k)\widetilde{B}(F_k + J_{n,k})$$

3) Deduce que $\operatorname{ran}(\widetilde{B}) = \operatorname{ran}(u_k(\widetilde{B})$.

4) En el caso que $m = 0$, deduce que B y $u_k(B)$ tienen el mismo determinante.

Solución.

1) Si $k \in \{i, j\}$ es evidente que coinciden. Ahora, si $b_{ik}, b_{kj} > 0$ note que alguno de los valores $[-\epsilon b_{ik}]_+$ y $[\epsilon b_{ik}]_+$ es cero, así:

$$b_{ij} + [-\epsilon b_{ik}]_+ b_{kj} + b_{ik}[\epsilon b_{kj}]_+ = b_{ij} + b_{ik}b_{kj} = b'_{ij}$$

Análogamente si $b_{ik}, b_{kj} < 0$ se tiene que coinciden. En otro caso ambos valores $[-\epsilon b_{ik}]_+$ y $[\epsilon b_{ik}]_+$ serán nulos por lo que:

$$b_{ij} + [-\epsilon b_{ik}]_+ b_{kj} + b_{ik}[\epsilon b_{kj}]_+ = b_{ij} = b'_{ij}$$

2) Dados i, j se tiene que:

$$\begin{aligned}
((J_{m+n,k} + C_k)\widetilde{B}(F_k + J_{n,k}))_{i,j} &= \sum_{p=1}^{m+n} (J_{m+n,k} + C_k)_{ip} \left(\sum_{l=1}^{n} b_{pl}(F_k + J_{n,k})_{l,j} \right) \\
&= \sum_{p=1}^{m+n} (J_{m+n,k} + C_k)_{ip} (b_{pk}[\epsilon b_{kj}]_+ + b_{pj}) \\
&= \sum_{p=1}^{m+n} (J_{m+n,k})_{ip} (b_{pk}[\epsilon b_{kj}]_+ + b_{pj}) \\
&\quad + \sum_{p=1}^{m+n} (C_k)_{ip} (b_{pk}[\epsilon b_{kj}]_+ + b_{pj})
\end{aligned}$$

Probaremos la igualdad por casos:

- Si $k \in \{i, j\}$, supongamos que $k = i$:

$$\begin{aligned}((J_{m+n,k} + C_k)\widetilde{B}(F_k + J_{n,k}))_{i,j} =& - b_{kj} + [-\epsilon b_{ik}]_+ b_{kj} = -b_{ij}\\ =& b'_{ij}\end{aligned}$$

- Si $k \notin \{i, j\}$, entonces:

$$\begin{aligned}((J_{m+n,k} + C_k)\widetilde{B}(F_k + J_{n,k}))_{i,j} =& \sum_{p=1}^{m+n} (J_{m+n,k})_{ip}(b_{pk}[\epsilon b_{kj}]_+ + b_{pj})\\ &+ \sum_{p=1}^{m+n} (C_k)_{ip}(b_{pk}[\epsilon b_{kj}]_+ + b_{pj})\\ =& (b_{ik}[\epsilon b_{kj}]_+ + b_{ij}) + [-\epsilon b_{ik}]_+ b_{kj}\\ =& b'_{ij}\end{aligned}$$

Así, hemos probado la igualdad pedida.

3) Recordar que si $M' = AMB$ con A y B invertible entonces se tiene que $\mathrm{ran}(AMB) = \mathrm{ran}(M')$. Para ver esto, simplemente se usa la propiedad: $\mathrm{ran}(AB) \leq \min\{\mathrm{ran}(A), \mathrm{ran}(B)\}$, en efecto:

$$\mathrm{ran}(M') = \mathrm{ran}(AMB) \leq \mathrm{ran}(M) = \mathrm{ran}(A^{-1}M'B^{-1}) \leq \mathrm{ran}(M')$$

Un cálculo directo muestra que los determinantes de $J_{m+n,k} + C_k$ y $F_k + J_{n,k}$ son -1, en particular invertibles. Así por lo anterior se tiene que $\mathrm{ran}(\widetilde{B}) = \mathrm{ran}(u_k(\widetilde{B}))$.

4) En el caso que $m = 0$, basta tomar determinante:

$$|u_k(\widetilde{B})| = (-1)|\widetilde{B}|(-1) = |\widetilde{B}|$$

Ejercicio 2.41 Verifica que la mutación de semillas es una involución, esto es que $u_k(u_k(\widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{B}) = (\widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{B})$

Solución. Como $u_k(u_k(\widetilde{B})) = \widetilde{B}$, para probar lo pedido resta ver que $u_k(u_k(\widetilde{\mathbf{x}})) = \widetilde{\mathbf{x}}$. Pongamos $u_k(\widetilde{\mathbf{x}}) = (x_1, \ldots, x'_k, \ldots, x_{m+n})$ y $u_k(u_k(\widetilde{\mathbf{x}})) = (x_1, \ldots, x''_k, \ldots, x_{n+m})$, entonces resta probar que $x''_k = x_k$. Para esto simplemente se usa la relación de intercambio:

$$x'_k x''_k = \prod_{b'_{ik}>0} x_i^{b'_{ik}} + \prod_{b'_{ik}<0} x_i^{-b'_{ik}} = \prod_{b_{ik}<0} x_i^{-b_{ik}} + \prod_{b_{ik}>0} x_i^{b_{ik}} = x_k x'_k$$

Así $x''_k = x_k$ y se tendría lo pedido.

Ejercicio 2.46 Calcula más mutaciones de las semillas en el Ejemplo 2.45 hasta que encuentres el primer $t < 0$ y el primer $t > 0$ con $Q(t) = Q(0)$ y $\widetilde{\mathbf{x}}(t) = \widetilde{\mathbf{x}}(0)$. Muestra que todas las variables de conglomerado ya aparecen en las semillas asociadas a los vértices $t \in [0, 4]$.

Solución. Realizando los cálculos obtenemos:

$x_1(4) = \frac{1 + x_1}{x_2}$	$x_1(5) = x_2$	$x_1(6) = x_2$	$x_1(7) = \frac{1 + x_1 + x_2}{x_1 x_2}$
$x_2(4) = x_1$	$x_2(5) = x_1$	$x_2(6) = \frac{1 + x_2}{x_1}$	$x_2(7) = \frac{1 + x_2}{x_1}$
$1 \to 2$	$2 \to 1$	$1 \to 2$	$2 \to 1$

$x_1(8) = \frac{1 + x_1 + x_2}{x_1 x_2}$	$x_1(9) = x_1$	$x_1(10) = x_1$
$x_2(8) = \frac{1 + x_1}{x_2}$	$x_2(9) = \frac{1 + x_1}{x_2}$	$x_2(10) = x_2$
$1 \to 2$	$2 \to 1$	$1 \to 2$

Así se observa que el primer $t > 0$ con $Q(t) = Q(0)$ y $\widetilde{\mathbf{x}}(t) = \widetilde{\mathbf{x}}(0)$ es $t = 10$. Similarmente obtenemos:

$x_1(-1) = x_1$	$x_1(-2) = \frac{1 + x_1 + x_2}{x_1 x_2}$	$x_1(-3) = \frac{1 + x_1 + x_2}{x_1 x_2}$	$x_1(-4) = x_2$
$x_2(-1) = \frac{1 + x_1}{x_2}$	$x_2(-2) = \frac{1 + x_1}{x_2}$	$x_2(-3) = \frac{1 + x_2}{x_1}$	$x_2(-4) = \frac{1 + x_2}{x_1}$
$2 \to 1$	$1 \to 2$	$2 \to 1$	$1 \to 2$

$x_1(-5) = x_2$	$x_1(-6) = \frac{1 + x_1}{x_2}$	$x_1(-7) = \frac{1 + x_1}{x_2}$	$x_1(-8) = \frac{1 + x_2}{x_1}$
$x_2(-5) = x_1$	$x_2(-6) = x_1$	$x_2(-7) = \frac{1 + +x_1 + x_2}{x_1 x_2}$	$x_2(-8) = \frac{1 + +x_1 + x_2}{x_1 x_2}$
$2 \to 1$	$1 \to 2$	$2 \to 1$	$1 \to 2$

$x_1(-9) = \frac{1 + x_2}{x_1}$	$x_1(-10) = x_1$
$x_2(-9) = x_2$	$x_2(-10) = x_2$
$2 \to 1$	$1 \to 2$

Así se observa que el primer $t < 0$ con $Q(t) = Q(0)$ y $\widetilde{\mathbf{x}}(t) = \widetilde{\mathbf{x}}(0)$ es $t = -10$.

Ejercicio 2.49 Dada una semilla inicial $s_0 = (\widetilde{\mathbf{x}}(0), \widetilde{B}(0))$, definimos el conjunto $\widetilde{\mathbf{X}} = \cup_{s_t \sim s_0} \widetilde{\mathbf{x}}(t)$ donde $s_t = (\widetilde{\mathbf{x}}(t), \widetilde{B}(t))$ es cualquier semilla que se obtiene de s_0 tras una secuencia finita de mutaciones. Sea $\mathcal{P}_n$ el patrón de semillas dado por s_0. Entonces:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{P}_n} = \mathbb{C}[\widetilde{\mathbf{X}}] \subseteq \mathcal{F}$$

Solución. Recordar que si ponemos:

$$\mathbf{X} = \bigcup_{t \in \mathbb{T}_n} \widetilde{\mathbf{x}}(t)$$

tenemos entonces que $\mathcal{A}_{\mathcal{P}_n} = \mathbb{C}[\mathbf{X}]$. Para probar lo pedido resta ver que $\mathbf{X} = \widetilde{\mathbf{X}}$, claramente $\widetilde{\mathbf{X}} \subseteq \mathbf{X}$. Recíprocamente si escojemos $x \in \mathbf{X}$ existirá algún t (a distancia d de 0) tal que la semilla $s_t = (\widetilde{\mathbf{x}}(t), \widetilde{B}(t))$ contenga a x. Entonces s_t se obtiene de s_0 tras aplicar d mutaciones, por lo que $s_t \sim s_0$ y así $x \in \widetilde{\mathbf{X}}$.

Ejercicio 2.53 Definimos una relación de equivalencia alternativa en el árbol n-regular. Sea $\{(\widetilde{\mathbf{x}}(t), \widetilde{B}(t))\}_{t \in \mathbb{T}_n}$ un patrón de semillas. Definimos:

$$t = t' \text{ si y solo si } (\widetilde{\mathbf{x}}(t), \widetilde{B}(t)) = (\widetilde{\mathbf{x}}(t'), \widetilde{B}(t'))$$

1) ¿Cuál es la gráfica de intercambio para el carcaj $1 \to 2$ y cuál es su gráfica de intercambio etiquetada?

2) Sea $Q = 1 \to 2 \to 3$. Calcula la gráfica de intercambio asociada.

3) ¿Cómo cambia la gráfica de intercambio si se considera semilla etiquetadas.

Solución.

1) Segun lo visto en clase y en el ejercicio 2.46, sabemos que si consideramos semillas no etiquetadas nuestro patrón es 5-periódico y si consideramos semillas etiquetadas es 10-periódico. Entonces la gráfica de intercambio en el primer caso será de la forma $0-1-2-3-4$ y en el segundo caso $0-1-2-3-4-5-6-7-8-9$.

2) En este caso consideremos la semilla inicial (x_1, x_2, x_3), se obtienen 14 semillas no etiquetadas distintas:

$$(x_1, x_2, x_3) \quad (\frac{1+x_2}{x_1}, x_2, x_3) \quad (x_1, x_2, \frac{1+x_2}{x_3}) \quad (x_1, \frac{x_1+x_3}{2}, x_3)$$

$$(\frac{1+x_2}{x_1}, x_2, \frac{1+x_2}{x_3}) \quad (\frac{1+x_2}{x_1}, \frac{x_1+(1+x_2)x_3}{x_1x_2}, x_3) \quad (x_1, \frac{x_1+x_3}{2}, \frac{x_1+x_1x_2+x_3}{x_2x_3})$$

$$(\frac{x_1+(1+x_2)x_3}{x_1x_2}, \frac{x_1+x_3}{x_2}, x_3) \quad (\frac{1+x_2}{x_1}, \frac{x_1+(1+x_2)x_3}{x_1x_2}, \frac{x_1+x_1x_2+(1+x_2)x_3}{x_1x_2x_3})$$

$$(\frac{1+x_2}{x_1}, \frac{x_1+x_1x_2+(1+x_2)x_3}{x_1x_2x_3}, \frac{1+x_2}{x_3}) \quad (x_1, \frac{x_1+x_1x_2+x_3}{x_2x_3}, \frac{1+x_2}{x_3})$$

$$(\frac{x_1+x_1x_2+(1+x_2)x_3}{x_1x_2x_3}, \frac{x_1+x_1x_2+x_3}{x_2x_3}, \frac{1+x_2}{x_3})$$

$$(\frac{x_1+(1+x_2)x_3}{x_1x_2},\frac{x_1+x_3}{x_2},\frac{x_1+x_1x_2+(1+x_2)x_3}{x_1x_2x_3})$$

$$(\frac{x_1+x_1x_2+x_3}{x_1x_3},\frac{x_1+x_3}{x_2},\frac{x_1+x_1x_2+(1+x_2)x_3}{x_1x_2x_3})$$

Se verifica que la gráfica de intercambio es A_3 y esto se puede intuir pues el quiver mostrado es la parte mutable de un quiver asociado a una triangulación del hexágono.

c)

Ejerciccio 2.55 Si $a=b=0$, ¿cuál es el patrón de semillas que uno obtiene de B?

Solución. El árbol regular $\mathbb{T}_2$ es:

$$\cdots -1 \overset{2}{\text{———}} 0 \overset{1}{\text{———}} 1 \overset{2}{\text{———}} 2 \overset{1}{\text{———}} 3 \overset{2}{\text{———}} 4 \overset{1}{\text{———}} 5 \overset{2}{\text{———}} 6 \cdots$$

Asociamos un patrón considerando en 0 la semilla $((x_1,x_2),0)$. Realizamos los cálculos:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x_1(0)=x_1 & x_1(1)=2x_1^{-1} & x_1(2)=2x_1^{-1} & x_1(3)=x_1 & x_1(4)=x_1 \\ x_2(0)=x_2 & x_2(1)=x_2 & x_2(2)=2x_2^{-1} & x_2(3)=2x_2^{-1} & x_2(4)=x_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} x_1(-1)=x_1 & x_1(-2)=2x_1^{-1} & x_1(-3)=2x_1^{-1} & x_1(-4)=x_1 \\ x_2(-1)=2x_2^{-1} & x_2(-2)=2x_2^{-1} & x_2(-3)=x_2 & x_2(-4)=x_2 \end{array}$$

Nuestro patrón de semillas es 5-periódico, dependiendo si se consideran semillas etiquetadas o no, puede tener 7 semillas o 4 semillas.

Ejercicio 2.58 Continuamos con el caso que la matriz B definida no corresponde a ningún carcaj, es decir, $a\neq b$. Seguimos con la notación como en el ejempo 2.57. Las variables de conglomerado satisfacen la relación de intercambio:

$$x_{k-1}x_{k+1}=\begin{cases} x_k^a+1 & \text{si } k \text{ es impar} \\ \\ x_k^b+1 & \text{si } k \text{ es par} \end{cases}$$

1) Sea $a=1$ y $b=2$. Calcula el patrón de semillas. ¿Es periódico?

2) Considera la matriz de intercambio extendida:

$$\widetilde{B}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$$

para $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$ y repite el cálculo del patrón de semillas.

Solución.

1) Realicemos los cálculos:

$$
\begin{aligned}
x_3 &= \frac{1+x_2^2}{x_1} \\
x_4 &= \frac{1+x_3}{x_2} = \frac{1+x_1+x_2^2}{x_1x_2} \\
x_5 &= \frac{1+x_4^2}{x_3} = \frac{1+x_1^2+2x_1+x_2^2}{x_1x_2^2} \\
x_6 &= \frac{1+x_5}{x_4} = \frac{1+x_1}{x_2} \\
x_7 &= \frac{1+x_6^2}{x_5} = x_1 \\
x_8 &= x_2
\end{aligned}
$$

Se nota que el patrón de semillas es 6-periódico.

b) Para poder calcular las variables de conglomerado debemos mutar la matriz $\widetilde{B}$, las mutaciones sucesivas son:

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ -p_1 & p_1+p_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2p_2+p_1 & -p_1-p_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{1}
$$

$$
\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ -p_1-2p_2 & p_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ -p_1 & -p_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ p_1 & -p_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}
$$

Luego, realizando los cálculos tenemos:

$$
\begin{aligned}
x_3 &= \frac{y^{p_1}+x_2^2}{x_1} \\
x_4 &= \frac{x_1+y^{p_1+p_2}}{x_2} = \frac{y^{p_1+p_2}x_1+y^{p_1}+x_2^2}{x_1x_2} \\
x_5 &= \frac{x_4^2+y^{2p_2+p1}}{x_3} = \frac{y^{p_1}+x_2^2+y^{2p_2+p_1}x_1^2+2x_1y^{p_1+p_2}}{x_1x_2^2} \\
x_6 &= \frac{y^{p_2}+x_5}{x_4} = \frac{1+y^{p_2}x_1}{x_2} \\
x_7 &= \frac{1+x_6^2y^{p_1}}{x_5} = x_1 \\
x_8 &= x_2
\end{aligned}
$$

Nuevamente se obtiene que el patrón de semillas es 6-periódico como en el caso a).

Ejercicio 3.4 Sean $x_{1,d}, \ldots .x_{n,d}$ las variables de conglomerado de la semilla $(\widetilde{\mathbf{x}}(t_d), \widetilde{B}(t_d))$ en $\mathcal{A}(\widetilde{B}(0))$ y $x'_{1,d}, \ldots, x'_{n,d}$ las variables de conglomerado correspondientes en $\mathcal{A}(\widetilde{B}'(0))$. Por inducción tenemos expresiones:

$$x_{i,d} = \frac{f_{i,d}(x_1, \ldots, x_{n+m})}{g_{i,d}(x_1, \ldots, x_{n+m})} \text{ tal que } x'_{id} = \frac{f_{i,d}(x_1, \ldots, x_{n+m})}{g_{i,d}(x_1, \ldots, x_{n+m})}\Big|_{x_j=1,\forall j}$$

Para nuestra variable x entonces tenemos $x = u_{k_{d+1}}(x_{i,d})$ para algún $i \in [n]$. Si $i \neq k_{d+1}$ no hay nada que probar. Pruebe que en el caso $i = k_{d+1}$ el lema es verdadero usando lo anterior y la misma idea que en la base de la inducción.

Solución. Sea x una variable de conglomerado (en $\mathcal{A}(\widetilde{B}(0))$) y $(\widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{B}(t))$ una semilla que la contiene y está a una distancia $d+1$ de 0. Por hipótesis inductiva podemos expresar cualquier variable de conglomerado que se encuentra a una distancia d o menor como una función racional.

Ahora, existe algún $i \in [n]$ tal que $x = u_{k_{d+1}}(x_{i,d})$, si $i \neq k_{d+1}$ entonces es trivial pues tendríamos que $x = x_{i,d}$ y por hipótesis se tiene que se expresa como una función racional. En el otro caso basta aplicar la relación de intercambio, denotaremos por b'_{ij} a las entradas de $u_{k_d}(\widetilde{B}(t_{d-1}))$, así:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{x_{i,d}}\left(\prod_{b'_{ji}>0,\widetilde{B}(0)} x_j^{b'_{ji}} + \prod_{b'_{ji}<0,\widetilde{B}(0)} x_j^{-b'_{ji}}\right) = \frac{1}{x_{i,d}} f(x_1, \ldots, x_{n+m}) \\ &= \frac{h(x_1, \ldots, x_{n+m})}{f_{i,d}(x_1, \ldots, x_{n+m})} \end{aligned}$$

donde $h_{i,d} = g_{i,d}f$. Entonces por inducción se tiene que toda variable de conglomerado se expresa de esta forma. Ahora veamos como se expresa su variable asociada x' en $\widetilde{B}'(0)$. Por la relación de intercambio en $\mathcal{A}(\widetilde{B}'(0))$:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{x_{i,d}}\left(\prod_{b'_{ji}>0,\widetilde{B}'(0)} x_j^{b'_{ji}} + \prod_{b'_{ji}<0,\widetilde{B}'(0)} x_j^{-b'_{ji}}\right) \\ &= \frac{g_{i,d}}{f_{i,d}}\left(\prod_{b'_{ji}>0,j\notin I} x_j^{b'_{ji}} + \prod_{b'_{ji}<0,j\notin I} x_j^{-b'_{ji}}\right) \\ &= \frac{h(x_1, \ldots, x_{n+m})}{f_{i,d}(x_1, \ldots, x_{n+m})}\Big|_{x_j=1,\forall j} \end{aligned}$$

Esto prueba lo pedido.

Ejercicio 3.6 Pruebe el corolario 3.5.

Solución. Sea x una variable de conglomerado en $\mathcal{A}(\widetilde{B}'(0))$ y x' su variable asociada en $\mathcal{A}(\widetilde{B}(0))$, como se cumple el fenómeno de Laurent se tiene que x' se expresa como un polinomio de Laurent, esto es una función racional que tiene como denominador un monomio. Así por el ejercicio anterior se tiene que x se obtiene simplemente al evaluar $x_i = 1$ para todo $i \in I$ en este polinomio, el resultado sigue siendo un polinomio de Laurent en la semilla inicial de $\mathcal{A}(\widetilde{B}'(0))$ probando lo pedido.

Ejercicio 3.8 Muestra que x'_{k_1} y x'_{k_2} son elementos de $\mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_{n+m}^{\pm 1}]$.

Solución. Recordar que $k_1 \neq k_2$. Claramente x'_{k_1} es un polinomio de Laurent pues:

$$x'_{k_1} = \frac{1}{x_{k_1}} \left(\prod_{b_{ik_1}>0} x_i^{b_{ik_1}} + \prod_{b_{ik_1}<0} x_i^{-b_{ik_1}} \right)$$

Utilizando nuevamente la relación de intercambio, se ve que x'_{k_2} es un polinomio de Laurent en la semilla $(x_1, \ldots, x'_{k_1}, \ldots, x_{n+m})$. Sin embargo como x'_{k_1} es un polinomio de Laurent en $(x_1, \ldots, x_{k_1}, \ldots, x_{n+m})$ se sigue que x'_{k_2} también.

Ejercicio 3.9 Verifica que si k_1, k_2 y k_3 son diferentes se reduce al argumento del caso $d = 2$.

Solución. Si todo son diferentes, por el ejercicio anterior ($d = 2$) tenemos que:

- x'_{k_1} y x'_{k_2} son polinomios de Laurent en $\widetilde{\mathbf{x}}(0)$.
- x'_{k_2} y x'_{k_3} son polinomios de Laurent en $\widetilde{\mathbf{x}}(t_1)$.

Así x'_{k_3} es un polinomio de Laurent en $\widetilde{\mathbf{x}}(0)$.

Ejercicio 3.10 Muestra que las variables de conglomerado de $\mathcal{A}(\widetilde{B}(0))$ y de $\mathcal{A}(-\widetilde{B}(0))$ son iguales.

Solución. Denotamos $-\widetilde{B}(0) = (c_{ij})$, $\widetilde{B}(0) = (b_{ij})$ y $(\widetilde{\mathbf{x}}(0), \widetilde{B}(0))$ la semilla inicial. Si mutamos en la dirección k, en $\mathcal{A}(\widetilde{B}(0))$ añadimos x'_k y en $\mathcal{A}(-\widetilde{B}(0))$ añadimos x''_k. Si probamos que son iguales tendríamos lo pedido. En efecto, basta usar la relación de intercammbio:

$$\begin{aligned} x'_k &= \frac{1}{x_k} \left(\prod_{b_{ik}>0} x_i^{b_{ik}} + \prod_{b_{ik}<0} x_i^{-b_{ik}} \right) \\ &= \frac{1}{x_k} \left(\prod_{c_{ik}<0} x_i^{-c_{ik}} + \prod_{c_{ik}>0} x_i^{c_{ik}} \right) \\ &= x''_k \end{aligned}$$

Ejercicio 3.11 Prueba que los binomios $M_1 + M_2$ y $M_1' + M_2'$ son coprimos.

Solución. Si $M_1 + M_2$ y $M_1' + M_2'$ son coprimos, como se dijo en clase los factores irreducibles de d deben dividir a los denominadores de las dos expresiones de x. En este caso, $M_1 + M_2$ y $M_1' + M_2'$ no serían factores irreduciles de d por lo que este es un monomio y se tiene lo pedido.

En el caso que M_1+M_2 y $M_1'+M_2'$ no son coprimos agregamos una nueva variable congelada x_{n+m+1} y extendemos la matriz $\widetilde{B}(0)$ añadiendo una fila extra donde la entrada $(n+m+1, k_1)$ sea 1 y las demás sean 0. Como $b_{n+m+1,k_1} > 0$ el término x_{n+m+1} aparecerá en M_1 pero no en M_2, así M_1+M_2 se convertiría en $x_{n+m+1}M_1+M_2$, denotaremos a esta suma de la misma manera para no sobrecargar la notación. Entonces $M_1 + M_2$ es irreducible y como $M_1'+M_2'$ no depende de x_{n+m+1} se tiene que M_1+M_2 no puede dividirlo.

Esto prueba que x se expresa como un polinomio de Laurent pero en el álgebra de conglomerado asociada a la matriz extendida, sin embargo por el corolario 3.5 se tiene que se cumple para la inicial, probando lo pedido.

Ejercicio 3.12 Muestra que la variable x'_{k_1} es coprimo a las variables x'_{k_2} y x''_{k_1}.

1) Calcula las expresiones de $x'_{k_1}, x'_{k_2}, x''_{k_1}$.

2) Muestra que x'_{k_1} y x'_{k_2} son irreducibles.

3) Verifica que x''_{k_1} evaluado en $x_{p_2} = 0$ es coprimo a x'_{k_1} evaluado en $x_{p_2} = 0$.

Solución.

a) Recordar que tenemos $b^0_{k_1k_2} < 0$ y $b^0_{k_2k_1} > 0$, ponemos entonces:

$$b^0_{k_1k_2} = -b < 0 \quad b^0_{k_2k_1} = c > 0$$

Podemos suponer que existen filas p_1 y p_2 en $\widetilde{B}(0)$ tal que $b^0_{p_1i} = \delta_{ik_1}$ y $b^0_{p_2i} = \delta_{ik_2}$. Las mutaciones de $\widetilde{B}(0)$ son:

$$\begin{array}{c|cc} & k_1 & k_2 \\ \hline k_1 & 0 & -b \\ k_2 & c & 0 \\ & & \\ p_1 & 1 & 0 \\ p_2 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} & k_1 & k_2 \\ \hline k_1 & 0 & b \\ k_2 & -c & 0 \\ & & \\ p_1 & -1 & 0 \\ p_2 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} & k_1 & k_2 \\ \hline k_1 & 0 & -b \\ k_2 & c & 0 \\ & & \\ p_1 & -1 & 0 \\ p_2 & 0 & -1 \end{array}$$

$$\widetilde{B}(0) \qquad\qquad u_{k_1}(\widetilde{B}(0)) \qquad\qquad u_{k_2}(u_{k_1}(\widetilde{B}(0)))$$

Luego por la relación de intercambio y usando lo anterior obtenemos que:

$$x'_{k_1} = \frac{1}{x_{k_1}} \left(x^c_{k_2} x_{p_1} \prod_{b^0_{ik_1}>0, i \notin \{k_2,p_1\}} x_i^{b^0_{ik_1}} + \prod_{b^0_{ik_1}<0} x_i^{-b^0_{ik_1}} \right) = (x^{-1}_{k_1})(x^c_{k_2} x_{p_1} M_1 + M_2)$$

Procediendo de manera análoga se obtiene que:

$$\begin{aligned} x'_{k_2} &= (x^{-1}_{k_2})((x'_{k_1})^b x_{p_2} M_3 + M_4) \\ x''_{k_1} &= ((x'_{k_1})^{-1})((x_{p_1}) M_5 + (x'_{k_2})^c M_6) \end{aligned}$$

donde M_i son monomios en x_i con $i \notin \{k_1, k_2, p_1, p_2\}$.

b) Ahora, vemos que x'_{k_1} es irreducible pues se puede ver como un polinomio lineal en x_{p_1}. Como x'_{k_1} no depende de x_{p_2} se sigue que x'_{k_2} es lineal en x_{p_2} y así irreducible, más aúan son coprimos.

c) Podemos ver a x'_{k_2} y x''_{k_1} como polinomios en x_{p_2}. Denotaremos por $x'_{k_2}(0)$ y $x''_{k_1}(0)$ los resultados al evaluar $x_{p_2} = 0$. Note que $x'_{k_1}(0) = x'_{k_1}$, entonces:

$$\begin{aligned} x'_{k_2}(0) &= (x_{k_2})^{-1} M_4 \\ x''_{k_1}(0) &= x_{k_1} \frac{(x_{p_1} M_5 + ((x_{k_2})^{-1} M_4)^c M_6)}{(x^c_{k_2} x_{p_1} M_1 + M_2)} \end{aligned}$$

Los numeradores y denominadores son lineales en x_{p_1} por lo que su denominador (que es en esencia x'_{k_1}) no puede dividir al numerador más de dos veces. Si suponemos que $x''_{k_1}(0)$ y x'_{k_1} no son coprimos entonces tienen algún factor en común por lo que el denominador tendría que dividir dos veces al numerador (al menos). Esto es imposible por lo que tendríamos que $x''_{k_1}(0)$ y x'_{k_1} son coprimos.