LISTA DE EJERCICIOS 2
ÁLGEBRAS DE CONGLOMERADO

Ejercicio 3.8 Muestra que existe una biyección entre las semillas en el sentido de la Definición 2.27 y los datos semillas con los datos fijos. Es decir, dada una semilla $(\widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{B})$ muestra que determina de manera única los datos fijos y los datos de una semilla.

Solución. Sea $(\widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{B})$ una semilla. Como $\widetilde{B}$ es anti-simetrizable también lo es su transpuesta $\widetilde{B}^T$, en este caso existen d_i y d_j tal que:

$$d_i b_{ji} = -d_j b_{ij}$$

Vamos a considerar $N = \mathbb{Z}^{n+m}$ y $\{e_i\}$ la base canónica formada por los vectores enteros con 1 en la posición i y las demás nulas. Queremos definir $\{,\} : \mathbb{Z}^{n+m} \times \mathbb{Z}^{n+m} \to \mathbb{Q}$ tal que la matriz $(\epsilon_{ij}) = (\{e_i, e_j\} d_j)$ sea $\widetilde{B}^T$. En este caso:

$$\{e_i, e_j\} d_j = b_{ji} = -\frac{d_j}{d_i} b_{ij}$$

1) Definimos $\{e_i, e_j\} = -\dfrac{1}{d_i} b_{ij}$.

2) Ponemos $N_{\text{mut}} = \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{Z}^{n+m}$, es inmediato ver que es saturado. Cabe decir que los elementos de N_{mut} son considerados como los vectores que tienen sus coordenadas $n+1, \ldots, n+m$ son nulas.

3) Ponemos $I = [n+m]$ y $I_{\text{mut}} = [n]$.

4) Los enteros d_i son los ya mencionados.

5) Definimos N° el generado por $\{d_i e_i\}_{i \in [n+m]}$. Por la definición de $\{,\}$ se ve que $\{N_{\text{mut}}, N^\circ\} \subseteq \mathbb{Z}$ y $\{N, N_{\text{mut}} \cap N^\circ\} \subseteq \mathbb{Z}$.

Claramente $(e_i)_{i \in I}$ es una base de N, $(e_i)_{i \in I_{\text{mut}}}$ es una base de N_{mut}. La forma que hemos definido la semilla está determinada únicamente por los d_j por lo que esto termina la prueba.

Ejercicio 3.9 Sean los datos fijos Γ arbitrarios (no necesariamente con $d_i = 1$) y sean $s = (e_i : i \in I)$ los datos de una semilla:

- Muestra que $u_k(s) = (e'_i : i \in I)$ son datos de una semilla.
- Verifica que la matriz $\epsilon_{u_k(s)}$ con entradas $\epsilon'_{ij} = \{e'_i, e'_j\} d_j$ es igual a la matriz $u_k(\epsilon_s) = (\epsilon''_{ij})$ que se obtiene de ϵ_s bajo la mutación de la matriz en la dirección k.

Solución. Sean d_i arbitrariamente.

- Para poder ver que $u_k(s)$ son datos de una semilla, resta ver que $\{e'_i\}$ es una base de N y así sucesivamente con los demás conjuntos. Para probar que es una base resta ver que es linealmente independiente, pues la dimensión es finita. Consideremos:

$$0 = \sum_{i \in I} \alpha_i e'_i = \sum_{i \neq k} \alpha_i e'_i - \alpha_k e_k$$

Reemplazando los e'_i:

$$0 = \sum_{i \neq k} \alpha_i e_i + \sum_{i \neq k} (\alpha_i [\epsilon_{ik}]_+ e_k) - \alpha_k e_k = \sum_{i \neq k} \alpha_i e_i + \left(\sum_{i \neq k} \alpha_i [\epsilon_{ik}]_+ - \alpha_k \right) e_k$$

Luego por la independencia lineal de los e_i tenemos que $\alpha_i = 0$ para $i \neq k$ y así $\alpha_k = 0$ también. Análogo se puede realizar para los otros dos conjuntos.

- Para ver la igualdad de las matrices, separemos en casos:

  - Si $k \in \{i, j\}$, por ejemplo $k = i$, tenemos:

    $$\{e'_i, e'_j\} = \{-e_i, e_j + [\epsilon_{ik}]_+ e_i\} = -\{e_i, e_j\}$$

    Y así $\epsilon''_{ij} = -\epsilon_{ij} = -\{e'_i e'_j\} d_j = \{e_i, e_j\} d_j = \epsilon'_{ij}$.
  - Si $\epsilon_{ik}, \epsilon_{kj} > 0$ tenemos:

    $$\epsilon'_{ij} = \{e'_i, e'_j\} d_j = \{e_i + \epsilon_{ik} e_k, e_j\} d_j = \epsilon_{ij} + \epsilon_{ik} \epsilon_{kj} = \epsilon''_{ij}$$

  - Si $\epsilon_{ik}, \epsilon_{kj} < 0$ se procede de manera análoga a lo anterior.
  - Si no se cumple ningún caso anterior, entonces:

    $$\epsilon'_{ij} = \{e'_i, e'_j\} d_j = \{e_i + [\epsilon_{ik}]_+ e_k, e_j + [\epsilon_{jk}]_+ e_k\} d_j = \epsilon_{ij} + [\epsilon_{jk}]_+ \epsilon_{ik} + [\epsilon_{ik}]_+ \epsilon_{kj} = \epsilon_{ij}$$

  Así tenemos que $\epsilon'_{ij} = \epsilon''_{ij}$ para cualquier caso por lo que hemos probado lo pedido.

Ejercicio 3.10 Prueba el Lema 3.12 en el caso general donde no necesariamente tenemos $d_i = 1$ para todo $i \in I$.

Solución. Recordar que $f_i = d_i^{-1} e_i^*$ es base de M° que es dual a la base $\{d_i e_i\}$ de N°. Entonces lo que se pide probar es que $f'_i = d_i^{-1} e_i'^*$ dual a la base $\{d_i e'_i\}$ satisface la relación:

$$f'_i = \begin{cases} -f_k + \sum_{j \in I, j \neq k} [-\epsilon_{kj}]_+ f_j & \text{si} \quad k \neq i \\ \\ f_i & \text{si} \quad k = i \end{cases}$$

Para esto, vamos a probar que $\langle f'_j, d_i e'_i \rangle = \delta_{ji}$. Separemos por casos, igual que en la prueba dada en clase:

- Si $k \neq j$ tenemos:

$$\langle f'_j, d_i e'_i \rangle = \langle f_j, d_i e_i + d_i [\epsilon_{ik}]_+ e_k \rangle = \langle f_j, d_i e_i \rangle = \delta_{ji}$$

- Si $k = j$ separamos dos casos más:

  * Si $i = k$ entonces:

$$\langle f_k', d_k e_k' \rangle = \langle -f_k + \sum_{j\in I, j\neq k} [-\epsilon_{kj}]_+ f_j, -d_k e_k \rangle = \langle f_k, d_k e_k \rangle = 1$$

  * Si $i \neq k$ entonces:

$$\langle f_k', d_i e_i' \rangle = \langle -f_k + \sum_{j\in I, j\neq k} [-\epsilon_{kj}]_+ f_j, d_i(e_i + [\epsilon_{ik}]_+ e_k) \rangle$$

$$\langle f_k', d_i e_i' \rangle = -\langle f_k, d_i [\epsilon_{ik}]_+ e_k \rangle + \sum_{j\in I, j\neq k} [-\epsilon_{kj}]_+ \langle f_j, d_i e_i \rangle$$

$$\langle f_k', d_i e_i' \rangle = d_i[-\epsilon_{ki}]_+ - d_i[\epsilon_{ik}]_+ = 0$$

Así hemos probado lo pedido.

Ejercicio 3.11 Los elementos $v_k \in M$ satisfacen $v_k = \sum_{i\in I} \epsilon_{ki} d_i f_i$.

Solución. Recordar que $v_k = \{e_k, \cdot\}$, para $e \in N$ se tiene que:

$$e = \sum_{i\in I} \alpha_i e_i$$

Considerando e_i^* se llega a que $\alpha_i = \langle e_i^*, e \rangle$ (estoy usando la notación $\langle e_i^*, e \rangle = e_i^*(e)$). Luego se tiene que:

$$\{e_k, e\} = \sum_{i\in I} \langle e_i^*, e \rangle \{e_k, e_i\} = \sum_{i\in I} \langle d_i^{-1} e_i^*, e \rangle \{e_k, e_i\} d_i = \sum_{i\in I} \langle f_i, e \rangle \epsilon_{ki}$$

Estoy probando que $v_k = \sum_{i\in I} \epsilon_{ki} f_i$.

Ejercicio 3.12 Prueba la Proposición 3.14 en el caso general donde no necesariamente tenemos $d_i = 1$ para todo $i \in I$.

Solución. Por el ejercicio anterior, en la sumatoria no aparece d_i por lo que el argumento es el mismo que se realizó en clase.

Ejercicio 4.1 Congelar variables en una semilla conmuta con la mutación de semillas.

Solución. Antes de comenzar, recalcar que al congelar una semilla en i, en la matriz $\widetilde{B}$ no solo se eliminan la columna i sino que se reordenan las filas acorde con las variables x_i. Denotaremos $(\widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{B})^i = (\widetilde{\mathbf{x}}^i, \widetilde{B}^i)$ a la semilla que se obtiene al congelar i. Lo que se pide probar es que para $j, k \in [n]$ se tiene: $u_k((\widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{B})^j) = (u_k(\widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{B})^j)$. Lo primero que se tiene que notar es que $k \in [n-1]$ pues al congelar una semilla se quita una variable de conglomerado. Tendríamos que separar en dos casos: si $j \neq k$ o si $j = k$.

El caso $j = k$ no es cierto (o por lo menos eso creo). Consideremos $\widetilde{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)$ y :

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

donde solo hay una variable congelada x_3. Primero congelemos 1, obtenemos el conglomerado extenendido $\widetilde{\mathbf{x}}^2 = (x_2, x_1, x_3)$ y:

$$\widetilde{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

y luego de mutar en la dirección 1 obtenemos el conglomerado extendido $(\frac{x_1 + x_3^2}{x_2}, x_1, x_3)$. Por otro lado, si primero mutamos en la dirección 1 obtenemos el conglomerado extendido $(\frac{x_2 + x_3}{x_1}, x_2, x_3)$ y luego de congelar 1 obtenemos el conglomerado $(x_2, \frac{x_2 + x_3}{x_1}, x_3)$.

Ahora veamos el caso $j \neq k$, primero analizemos el conglomerado extendido de $u_k((\widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{B})^j)$. Tenemos:

$$u_k(\widetilde{\mathbf{x}}^j) = u_k(\underbrace{x_1}_{1}, \dots, \underbrace{x_{j-1}}_{j-1}, \underbrace{x_{j+1}}_{j}, \dots, \underbrace{x_n}_{n-1}, \underbrace{x_j}_{n}, \underbrace{x_{n+1}}_{n+1}, \dots, \underbrace{x_{n+m}}_{n+m})$$

Reindexando todo como se muestra en la igualdad anterior, tenemos que eliminar x_k y añadir x'_k donde este viene dado por la relación de intercambio. Como la matriz $\widetilde{B}^j$ solo elimina la columna j y se reordenan las filas adecuadamente, la relación de intercambio anterior es la misma que si hubieramos mutado la semilla inicial en la dirección k.

Tendríamos entonces que:

$$u_k(\widetilde{\mathbf{x}}^j) = (x_1, \dots, x'_k, \dots, x_n, x_j, \dots, x_{n+m})$$

Ahora analizemos el conglomerado $(u_k(\widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{B})^j)$, tenemos que:

$$u_k(\widetilde{\mathbf{x}}) = (x_1, \dots, x'_k, \dots, x_{n+m})$$

donde x'_k es el mismo obtenido anteriormente. Luego, al congelar en j se obtiene que:

$$(u_k(\widetilde{\mathbf{x}}))^j = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n, x_j, \dots, x_{n+m})$$

donde en el conglomerado aparece x'_k en la posición k pues $j \neq k$. Así obtenemos que $u_k(\widetilde{\mathbf{x}}^j) = (u_k(\widetilde{\mathbf{x}}))^j$. Ahora veamos las matrices, la matriz $\widetilde{B}^j$ solo elimina una columna (y no es la columna k) y cambia algunas filas, al mutarla en esencia estamos haciendo lo mismo que mutar la matriz inicial $\widetilde{B}$, pero al finalizar tenemos que eliminar la fila j y hacer los mismos cambios que se hizo en $\widetilde{B}^j$. Se conluye entonces que ambas son iguales y por lo tanto tendríamos lo pedido.

Ejercicio 4.2 Restringir una semilla conmuta con la mutación de semillas.

Solución. Sea $I \cup J$ una partición de $[n+m]$ tal que $b_{jk} = 0$ para todo $j \in J$ y para todo $k \in [n] \cap I$. Fijemos $k \in [n] \cap I$, probaremos que:

$$u_k(\widetilde{\mathbf{x}}_I, \widetilde{B}_I) = (\widetilde{\mathbf{x}}_I^k, \widetilde{B}_I^k)$$

donde $(\widetilde{\mathbf{x}}_I^k, \widetilde{B}_I^k)$ es la semilla restringida de $u_k(\widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{B})$. Para ver esto, lo único que se tiene que tener en cuenta es que en el lado derecho de la relación de intercambio $x_k x'_k = P_1 + P_2$ no aparece ningún x_j con $j \in J$. Primero veamos el caso de las matrices, la matriz $\widetilde{B}_I$ es la submatriz de $\widetilde{B}$ donde estamos eliminando todos los términos b_{ij} con $i \in J$ y $j \in [n] \cap J$, en otras palabras estamos eliminando los índices J de nuestra matriz. Al mutarla, harémos lo mismo que si mutaramos $\widetilde{B}$ solo que no estamos considerando los índices J. Por otro lado, la matriz $\widetilde{B}_I^k$ va a coincidir con lo anterior, pues luego de mutar tenemos que eliminar los índices J nuevamente.

Ahora veamos los conglomerados, tenemos $u_k(\widetilde{\mathbf{x}}_I) = (\widetilde{\mathbf{x}}_I \setminus \{x_k\}) \cup \{x''_k\}$ y $u_k(\widetilde{\mathbf{x}}) = u_k(\widetilde{\mathbf{x}} \setminus \{x_k\}) \cup \{x'_k\}$ donde x'_k y x''_k se determinan por las relaciones de intercambio. Tenemos:

$$x'_k = \frac{1}{x_k}\left(\prod_{b_{ik}>0} x_i^{b_{ik}} + \prod_{b_{ik}<0} x_i^{-b_{ik}}\right)$$

Sin embargo, como se mencionó, los b_{jk} no aparecen en ningún monomio de la derecha, por lo que podemos escribir:

$$x'_k = \frac{1}{x_k}\left(\prod_{b_{ik}>0, i\in I} x_i^{b_{ik}} + \prod_{b_{ik}<0, i\in I} x_i^{-b_{ik}}\right)$$

Entonces $x'_k = x''_k$ pues todos los exponentes que se toman en las productorias forman parte de $\widetilde{B}_I$. Entonces $\widetilde{\mathbf{x}}_I^k$ simplemente toma los que tienen índices I en $u_k(\widetilde{\mathbf{x}})$ junto con $x''_k = x'_k$, es decir es igual que $u_k(\widetilde{\mathbf{x}}_I)$, probando lo pedido.

Ejercicio 4.3 Prueba el Lema 4.10 usando la fórmula de la mutación de matrices y el Lema 4.9.

Solución. Ponemos $\widetilde{B}^G = (b^G_{I,J})$, por el Lema 4,9 tenemos que $b^G_{I,K} > 0$ si y solo si existe $i \in I$ y $k \in K$ tal que $b_{ik} > 0$. Además si tenemos que $b^G_{K,J} > 0$ entonces para $k \in K$ existe $j \in J$ tal que $b_{kj} > 0$. En resumen:

$$b^G_{I,K}, b^G_{K,J} > 0 \text{ si y solo si existen } i \in I, j \in J \text{ y } k \in K \text{ tal que } b_{ik}, b_{kj} > 0$$

Por la fórmula de mutación de matrices tendríamos entonces:

$$(u_k(\widetilde{B}^G))_{ij} = \begin{cases} -b^G_{I,J} & \text{si } I = K \text{ o } J = K \\ \\ b^G_{I,J} + b^G_{I,K}b^G_{K,J} & \text{si } \exists i,j,k : b_{ik}, b_{kj} > 0 \\ \\ b^G_{I,J} - b^G_{I,K}b^G_{K,J} & \text{si } \exists i,j,k : b_{ik}, b_{kj} < 0 \\ \\ b^G_{I,J} & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Ahora calculemos $(u_K(\widetilde{B}))_{ij}$:

- Si $i \in K$ o $j \in K$ entonces como $b_{lp} = 0$ para $l, p \in K$ se tendría que $u_l(\widetilde{B})_{ij} = b_{ij}$ para todo $l \neq i$ (o j). Así, cuando se llegue a mutar en la dirección i (o j) el resultado será $-b_{ij}$.

- Si $i \notin K$ y $j \notin K$ y existe algún $k \in K$ tal que $b_{ik}, b_{kj} > 0$. En este caso para $l \neq k$ tendríamos que $(u_l(\widetilde{B}))_{ij} = b_{ij} + b_{il}b_{lj}$ pues $b_{il} = b_{ik} > 0$ y $b_{lj} = b_{kj} > 0$. Luego, si mutaramos por un $m \neq l$ entonces tendríamos que:

  $$(u_m(u_l(\widetilde{B})))_{ij} = (u_l(\widetilde{B}))_{ij} + (u_l(\widetilde{B}))_{im}(u_l(\widetilde{B}))_{mj}$$

  pues $(u_l(\widetilde{B}))_{im} = b_{im} = b_{ik} > 0$ y $(u_l(\widetilde{B}))_{mj} = b_{mj} = b_{kj} > 0$. Así:

  $$(u_m(u_l(\widetilde{B})))_{ij} = b_{ij} + b_{il}b_{lj} + b_{im}b_{mj}$$

  Luego si $K = \{k_1 = k, k_2, \ldots, k_r\}$ entonces mutamos de la siguiente forma:

  $$(u_k(u_{k_2}(\ldots u_{k_r}(\widetilde{B}))))_{ij}$$

  Y repetiendo el proceso anterior se obtendría:

  $$(u_k(u_{k_2}(\ldots u_{k_r}(\widetilde{B}))))_{ij} = b_{ij} + \sum_{p=1}^{r} b_{ik_p}b_{k_p}j = b_{ij} + \sum_{k \in K} b_{ik}b_{kj}$$

- Si $i \notin K$ y $j \notin K$ y existe algún $k \in K$ tal que $b_{ik}, b_{kj} < 0$ se procede de manera análoga al item anterior obteniendo:

$$(u_k(u_{k_2}(\dots u_{k_r}(\widetilde{B}))))_{ij} = b_{ij} - \sum_{k \in K} b_{ik} b_{kj}$$

- Si no se cumple ningún item anterior entonces se obtiene simplemente b_{ij}.

En resumen tenemos que:

$$(u_K(\widetilde{B}))_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & \text{si } i \in K \text{ o } j \in K \\ \\ b_{ij} + \displaystyle\sum_{k \in K} b_{ik} b_{kj} & \text{si } \exists k : b_{ik}, b_{kj} > 0 \\ \\ b_{ij} - \displaystyle\sum_{k \in K} b_{ik} b_{kj} & \text{si } \exists k : b_{ik}, b_{kj} < 0 \\ \\ b_{ij} & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Luego $(u_K(\widetilde{B}))^G_{I,J} = \sum_{i \in I} (u_K(\widetilde{B}))_{ij}$ para cualquier $j \in J$. Basta ir viendo caso por caso:

- Caso 1:

$$(u_K(\widetilde{B}))^G_{I,J} = \sum_{i \in I} (u_K(\widetilde{B}))_{ij} = \sum_{i \in I} -b_{ij} = -b^G_{I,J} = (u_k(\widetilde{B}^G))_{I,J}$$

- Caso 2:

$$(u_K(\widetilde{B}))^G_{I,J} = \sum_{i \in I} (b_{ij} + \sum_{k \in K} b_{ik} b_{kj}) = b^G_{I,J} + b^G_{I,K} b^G_{K,J} = (u_k(\widetilde{B}^G))_{I,J}$$

- Caso 3:

$$(u_K(\widetilde{B}))^G_{I,J} = \sum_{i \in I} (b_{ij} - \sum_{k \in K} b_{ik} b_{kj}) = b^G_{I,J} - b^G_{I,K} b^G_{K,J} = (u_k(\widetilde{B}^G))_{I,J}$$

- Caso 4:

$$(u_K(\widetilde{B}))^G_{I,J} = \sum_{i \in I} (u_K(\widetilde{B}))_{ij} = \sum_{i \in I} b_{ij} = b^G_{I,J} = (u_k(\widetilde{B}^G))_{I,J}$$

Ejercicio 4.4 Consideramos el carcaj Q con 5 vértices mutables:

$$\begin{tikzcd}
x_2 \arrow[dr] & & x_3 \arrow[dl] \\
& x_1 & \\
x_3' \arrow[ur] & & x_2' \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Figura 1: Carcaj Q.

con la acción del grupo $G = \mathbb{Z}_2$ que actúa con una rotación de 180° en Q. Las G-órbitas son $\{x_1\}, \{x_2, x_2'\}$ y $\{x_3, x_3'\}$.

1) Verifique que Q es G-admisible y calcula la matriz plegada $\widetilde{B}^G$.
2) Prueba que Q es globalmente plegable con respecto a la acción de G.

Solución. Por comodidad denotaré los vértices del quiver como sigue:

$$\begin{tikzcd}
2 \arrow[dr] & & 3 \arrow[dl] \\
& 1 & \\
5 \arrow[ur] & & 4 \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Figura 2: Carcaj Q.

La matriz de intercambio de Q es:

$$\widetilde{B}(Q) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Veamos que es G-admisible, para esto verifiquemos cada una de las condiciones:

   - Como todos los vértices no hay nada que probar aquí.
   - Tenemos $b_{12} = b_{14} = -1$, $b_{13} = b_{15} = -1$, $b_{21} = b_{41} = 1$ y $b_{31} = b_{51} = 1$, las demás entradas son nulas.
   - Se tiene que $1 \sim 1$, $2 \sim 4$ y $3 \sim 5$. Además $b_{11} = 0$, $b_{24} = 0$ y $b_{35} = 0$ por lo que se tiene lo pedido.
   - Tenemos $1 \sim 1$ y para cualquier otro vértice k distinto tenemos que $b_{1k}b_{1k} = (-1)(-1) = 1 \geq 0$ y si fuera $k = 1$ tendríamos 0. Tenemos también que $2 \sim 4$ y $b_{2k}b_{4k}$ es o bien 0 o bien 1, lo mismo para $3 \sim 5$.

   Ahora, calculemos la matriz plegada. Para esto consideremos las G-órbitas con la numeración: $\{1\} := 1$, $\{2, 4\} := 2$ y $\{3, 5\} := 3$. Entonces la matríz sería:

$$\widetilde{B}^G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Denotamos $J_1 = \{1\}$, $J_2 = \{2, 4\}$ y $J_3 = \{3, 5\}$. Para los subconjuntos de cardinalidad 1 y 2, todas las posibles mutaciones se muestran en la Figura 3 (cabe decir que u_{J_2} y u_{J_3} conmutan pues las direcciones donde se mutan no están relacionadas por flechas):

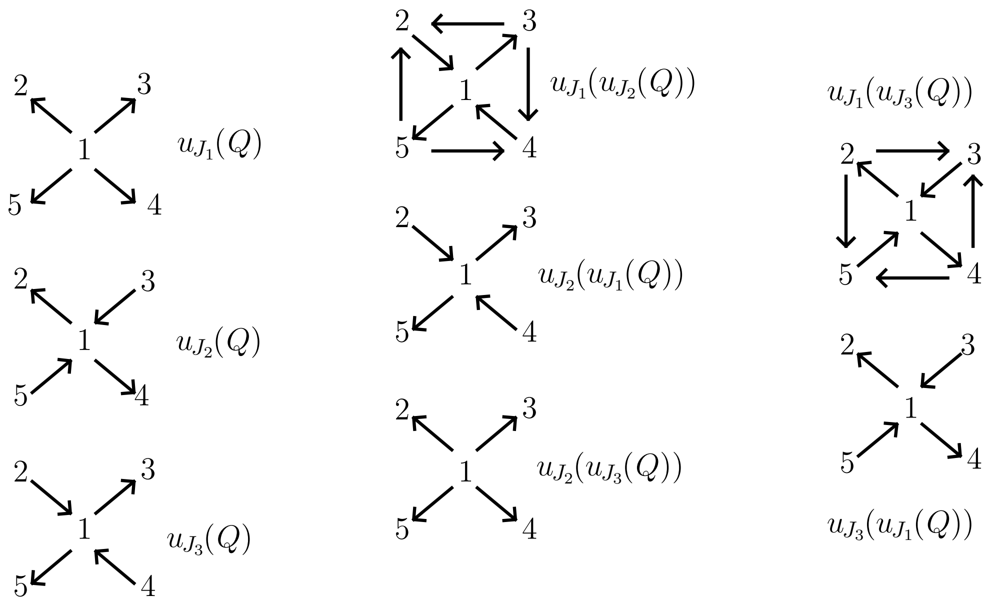

Figura 3: Carcaj Q.

Todos los quiver's mostrados son G-admisibles (note que en la Figura se repiten algunos, por ejemplo $u_{J_1}(Q) = u_{J_2}(u_{J_3}(Q))$). La primera y segunda condición son verificadas fácilmente. Para la tercera basta notar que dos elementos de una G-órbita no están relacionados por una flecha (viendo la Figura esto queda claro). Para la cuarta condición basta notar que por ejemplo si consideramos $2, 4$ y cualquier otro vértice k no existe un camino de longitud 2 de la forma $2 \to k \to 4$ o $4 \to k \to 2$. Lo mismo para 3 y 5 (ver la Figura 3).

Restaría ver el caso de los subconjunto de cardinalidad 3, sin embargo los cálculos muestran algo interesante:

$$u_{J_2}(u_{J_1}(u_{J_2}(Q))) = u_{J_3}(u_{J_1}(u_{J_2}(Q))) = u_{J_1}(u_{J_2}(u_{J_1}(Q))) = u_{J_1}(u_{j_3}(Q))$$

$$u_{J_3}(u_{J_2}(u_{J_1}(Q))) = u_{J_1}(u_{J_2}(u_{J_3}(Q))) = u_{J_2}(u_{J_3}(u_{J_1}(Q))) = Q$$

$$u_{J_2}(u_{J_1}(u_{J_3}(Q))) = u_{J_3}(u_{J_1}(u_{J_3}(Q))) = u_{J_1}(u_{J_3}(u_{J_1}(Q))) = u_{J_1}(u_{J_2}(Q))$$

$$u_{J_3}(u_{J_2}(u_{J_3}(Q))) = u_{J_3}(u_{J_1}(Q))$$

Entonces, con lo anterior se concluye que el quiver es G-admisible.

Ejercicio 4.6 En este ejercicio vamos a probar que cada patrón de semillas de tipo finito es 2-finito.

1) Considera el grupo $W \subseteq \mathrm{GL}_2$ generado por $s_1 = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & -1 \end{pmatrix}$ y muestra que es un grupo finito si y solo si $ab \leq 3$.

Sea $B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ con $ab \geq 4$ y sean:

$$\mathbf{x}(0) = (x_1, x_2), \quad \mathbf{x}(1) = (x_3, x_2), \quad \mathbf{x}(2) = (x_3, x_4), \ \ldots$$

los conglomerados en el campo $\mathcal{F}$ asociados al patrón de semillas definido por B. Consideramos el semicampo $U = \{u^r : r \in \mathbb{R}\}$ donde u es una variable formal y U tiene las operaciones:

$$u^r \oplus u^s = u^{\min\{r,s\}} \quad \text{y} \quad u^r \cdot u^s = u^{r+s}$$

2) Construye un homomorfismo de semicampos $\psi : \mathcal{F} \to U$ tal que el conjunto $\{\psi(x_t) : t \in \mathbb{Z}\} \subseteq U$ es infinito. Tipp: en el caso $ab = 4$ toma $\psi(x_1) = u$ y $\psi(x_2) = u^a$, para $ab > 4$ toma $\psi(x_1) = u^b$ y $\psi(x_2) = u^{\lambda+1}$ para un eigenvalor λ de la matriz $s_1 s_2$ en 1.

3) Muestre que un patrón de semillas de tipo finito es también 2-finito.

Solución. Voy a suponer que o bien a o b son positivos o bien 0.

1) Primero notemos que:

$$s_1^2 = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como los elementos de W son $s_1, s_2, s_1^2, s_2^2, s_1 s_2, s_2 s_1 s_2, (s_1 s_2)^2, \ldots$ tenemos que W es finito si y solo si el orden de $s_1 s_2$ es finito. Calculando:

$$s_1 s_2 = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab - 1 & -a \\ b & -1 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico resulta ser $\lambda^2 - \lambda(ab - 2) + 1 = 0$, así por Caley Hamilton tenemos que $s_1 s_2$ satisface está ecuación.

($\Rightarrow$) Supongamos lo contrario, entonces tenemos dos casos: o bien $ab > 4$ o bien $ab = 4$. El discriminante del polinomio característico es $ab(ab - 4)$ por lo que si $ab > 4$ entonces sus raíces serán reales. Como queremos que $\lambda^n = 1$ para algún n y estamos en los reales necesariamente $\lambda = \pm 1$, pero si reemplazamos este valor en el polinomio llegamos a que $ab = 4$ contradicción. Ahora supongamos que $ab = 4$, en este caso:

$$s_1 s_2 = \begin{pmatrix} 3 & -b \\ c & -1 \end{pmatrix}$$

Operando:

$$(s_1 s_2)^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2b \\ 2c & -3 \end{pmatrix}$$

$$(s_1 s_2)^k = \begin{pmatrix} 2k+1 & -kb \\ kc & -2k+1 \end{pmatrix}$$

Se nota que $(s_1 s_2)^k \neq \mathrm{Id}$ para todo k por lo que $(s_1 s_2)$ tiene orden infinito algo imposible pues W es finito.

($\Leftarrow$) Si $ab \leq 3$ tenemos varios casos:

- Si $ab = 3$ entonces reemplazando en el polinomio característico tenemos que $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$, en este caso $\lambda^6 = 1$ por lo que el orden de $s_1 s_2$ es 6.
- Si $ab = 2$ entonces reemplazando en el polinomio característico tenemos que $\lambda^2 = -1$, en este caso $\lambda^4 = 1$ por lo que el orden de $s_1 s_2$ es 4.
- Si $ab = 1$ entonces reemplazando en el polinomio característico tenemos que $\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$, en este caso $\lambda^3 = 1$ por lo que el orden de $s_1 s_2$ es 3.
- Si $a = 0 = b$ entonces $(s_1 s_2)^2 = \mathrm{Id}$ por lo que tiene orden 1.

En cualquier caso se obtiene que $(s_1 s_2)$ tiene orden finito y así W es finito.

2) Separemos en dos casos:

- Si $ab > 4$, en este caso si consideramos s_1 y s_2 como en el item anterior, tenemos que existe algún $\lambda > 1$ real tal que $\lambda^2 - (ab-2)\lambda + 1 = 0$. Definimos ψ de la siguiente forma:

  * Enviamos las variables congeladas a 1.
  * $\psi(x_1) = u^b$.
  * $\psi(x_2) = u^{\lambda+1}$.

  De la matriz B tenemos las relaciones de intercambio:

$$x_{k-1}x_{k+1} = \begin{cases} x_k^b + 1 & \text{si k es par} \\ x_k^a + 1 & \text{si k es impar} \end{cases}$$

  Aplicando ψ obtenemos:

$$\psi(x_{k-1})\psi(x_{k+1}) = \begin{cases} \psi(x_k)^b \oplus 1 & \text{si k es par} \\ \psi(x_k)^a \oplus 1 & \text{si k es impar} \end{cases}$$

  Por inducción probaremos que $\psi(x_{2k+1}) = u^{\lambda^k b}$ y que $\psi(x_{2k+2}) = u^{\lambda^k(\lambda+1)}$. El caso $k = 0$ es evidente por la definición de ψ, suponiendo que vale para k tenemos:

$$\psi(x_{2k+3}) = \frac{\psi(x_{2k+2})^b \oplus 1}{\psi(x_{2k+1})} = u^{\lambda^k(\lambda+1)b - \lambda^k b} = u^{\lambda^{k+1}b}$$

$$\psi(x_{2k+4}) = \frac{\psi(x_{2k+3})^a \oplus 1}{\psi(x_{2k+2})} = u^{\lambda^{k+1}ab - \lambda^k(\lambda+1)} = u^{\lambda^k(\lambda ab - \lambda - 1)} = u^{\lambda^{k+1}b}$$

Como $\lambda > 1$ entonces concluímos que $\{\psi(x_t)\}$ es infinito.

- Si $ab = 4$ entonces el polinomio característico de $s_1 s_2$ es $(\lambda - 1)^2 = 0$ por lo que solo tiene una raiz $\lambda = 1$. Ahora definimos ψ como:
  * Enviamos las variables congeladas a 1.
  * $\psi(x_1) = u$.
  * $\psi(x_2) = u^a$.

  En este caso se cumple que $\psi(x_{2k-1}) = u^{2k-1}$ y $\psi(x_{2k+2}) = u^{(k+1)a}$. Nuevamente el caso $k = 0, 1$ son evidente de la definición, supongamos que vale para $< k$:

$$\psi(x_{2k+1}) = \frac{\psi(x_{2k})^b \oplus 1}{\psi(x_{2k-1})} = u^{kab-(2k-1)} = u^{2k+1}$$

$$\psi(x_{2k+3}) = \frac{\psi(x_{2k+2})^b \oplus 1}{\psi(x_{2k+1})} = u^{(k+1)ab-(2k+1)} = u^{2k+3}$$

$$\psi(x_{2k+4}) = \frac{\psi(x_{2k+3})^a \oplus 1}{\psi(x_{2k+2})} = u^{(2k+3)a-(k+1)a} = u^{(k+2)a}$$

  Luego es notorio que $\{\psi(x_t)\}$ es un conjunto infinito.

3) Supongamos que no fuera 2-finito, entonces existe alguna matriz B' equivalente por mutación a B tal que $|b'_{ij}b'_{ji}| \geq 4$. En este caso, primero congelemos nuestra semillas excepto las variables x_i y x_j, la matriz obtenido luego de esto tiene la forma del item anterior. Luego, mediante ψ y mutando en las direcciones i y j (que serían 1 y 2 en el item anterior) obtendremos infinitas variables de conglomerado, una contradicción.

Ejercicio 4.7 Para probar el Corolario 4.32, pruebe las siguientes afirmaciones:

1) En un $n+3$-ágono hay $n(n+3)/2$ arcos distintos.

2) Sean d y d' dos arcos distintos del $n+3$-ágono. Verifica que las variables de conglomerado asociadas son distintas.

3) El número de triangulaciones del $n+3$-ágono es el número de Catalán:

$$C_{n+1} = \frac{1}{n+2}\binom{2n+2}{n+1}$$

Solución. Haré un cambio de notación, consideraré un polígono de n lados con $n > 3$. Así en 1) lo que se pide probar es que el número de diagonales es $n(n-3)/2$.

1) Lo probaremos por inducción sobre n, el caso $n = 4$ es evidente pues hay solo dos diagonales. Supongamos que vale para polígonos de n lados y sea P_{n+1} el polígono de $n+1$ lados. Fijamos una numeración (no es necesario hacerlo) y elegimos cualquier diagonal que une dos vértices de la forma $j, j+2$. Por ejemplo, en la Figura 4 se escogió la diagonal $1n$. El polígono $12\ldots n1$ tiene n lados por lo que tiene $n(n-3)/2$ diagonales.

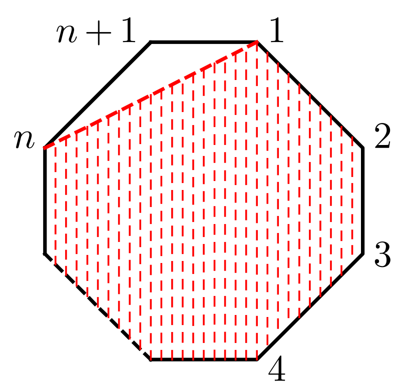

Figura 4: Polígono P_{n+1}.

Falta agregar la diagonal $1n$ y las $n+1-3$ diagonales que contienen a $n+1$, en total serían $n-1$. Entonces el número de diagonales de P_{n+1} sería:

$$\frac{n(n-3)}{2} + n - 1 = \frac{n^2 - 3n + 2n - 2}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$$

2) Sean x y x' las variables de conglomerado asociadas a d y d' respectivamente. Hay dos casos:

- Si d y d' no se cruzan en el interior del polígono, en este caso existen triangulacion Tque contiene a d y d'. Por lo tanto x y x' pertenecen a un conglomerado, en particular son algebraicamente independientes por lo que no pueden ser iguales, caso contrario existiría un polinomio de dos variables que se anula en (x, x').

- Si d y d' se cruzan en el interior, entonces existen dos triangulaciones T y T' distintas que contienen a x y x' respectivamente (podemos considerar simplemente las triangulaciones que contienen a todas las diagonales que tienen a uno de los vértices de d y d'). Como todo par de triangulaciones se relaciones mediante un flip, podemos mutar e intercambiar x por x' (o viceversa) y así obtener:

$$xx' = M_1 + M_2$$

donde M_i son monomios en un conglomerado extendido $\widetilde{\mathbf{x}}$ que contiene a x (o x'). Si $x = x'$, entonces tendríamos que $0 = M_1 + M_2 - x_2^2$ algo imposible pues los elementos de $\widetilde{\mathbf{x}}$ son algebraicamente independientes.

3) Los números de Catalán satisfacen la relación de recurrencia:

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}$$

Sea a_n el número de triangulaciones de un $(n+3)$-gon y numeramos los vértices desde 1 hasta $n+3$. Seleccionemos el lado $\overline{n+2, n+3}$, al triangular este lado debe formar parte de algún triángulo que tiene como tercer vértice k, algunos de los vértices de nuestro polígono. El triangulo formado por los vértices $n+2, n+3$ y k divide al polígono en tres partes, a un lado un polígono de $k+1$-lados y al otro lado un polígono de $n-k+3$ lados. Cada uno de estos polígonos tiene a_{k-2} y a_{n-k} triangulaciones. El número total de triangulaciones que tiene al triángulo formado por los vértices $n+2, n+3$ y k es $a_{k-2}a_{n-k}$ y como k puede ser cualquier vértices desde 1 hasta $n+1$ concluímos que:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-2} a_{n-k}$$

Haciendo el cambio $k = i = 1$ tenemos que:

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} a_{i-1} a_{n-i-1}$$

De esto conluímos que $a_n = C_{n+1}$ como se quería.