LISTA DE EJERCICIOS 3
ÁLGEBRAS DE CONGLOMERADO

Ejercicio 5.1. La adición auxiliar del semicampo tropical definida en (5,1) es conmutativa, asociativa y distributiva con respecto a la multiplicación usual, es decir $(p \oplus q)r = pr \oplus qr$. En particular, $\mathrm{Trop}(y_1, \ldots, y_n)$ es un semicampo.

Solución. Antes de probar lo pedido, dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$ se tiene que:

a) $\min(\min(a, b), c) = \min(a, \min(b, c))$.

b) $\min(a, b) + c = \min(a + c, b + c)$.

En efecto:

a) Lo haremos por casos:

- Si $\min(\min(a, b), c) = c$, tenemos que $c \leq \min(a, b)$ por lo que $c \leq a$ y $c \leq b$. Luego $\min(b, c) = c$ y así $\min(a, \min(b, c)) = \min(a, c) = c$ probando la igualdad.
- Si $\min(\min(a, b), c) = \min(a, b)$ tenemos que $b \leq c$ o $a \leq c$ (aquí estamos usando el hecho que o bien b o bien c es el mínimo). En el primer caso tendríamos que $\min(a, \min(b, c)) = \min(a, b)$ probando la igualdad. En el segundo, tendríamos también que $a \leq b$ y así $a \leq \min(b, c)$. Entonces $\min(a, \min(b, c)) = a = \min(a, b)$.

b) Supongamos que $\min(a, b) = a$, entonces $a \leq b$ por lo que $a + c \leq b + c$ y así $\min(a + c, b + c) = a + c$ probando lo pedido. El otro caso se procede de manera análoga.

Sean:

$$p = \prod_{i=1}^{n} y_i^{a_i}, q = \prod_{i=1}^{n} y_i^{b_i}, r = \prod_{i=1}^{n} y_i^{c_i} \in \mathrm{Trop}(y_1, \ldots, y_n)$$

- **Conmutativa.**

$$p \oplus q = \prod_{i=1}^{n} y_i^{\min(a_i, c_i)} = \prod_{i=1}^{n} y_i^{\min(c_i, a_i)} = q \oplus p$$

- **Asociativa.**

$$(p \oplus q) \oplus r = \prod_{i=1}^{n} y_i^{\min(\min(a_i, b_i), c_i)} = \prod_{i=1}^{n} y_i^{\min(a_i, \min(b_i, c_i))} = p \oplus (q \oplus r)$$

- **Distributiva.**

$$(p \oplus q)r = \prod_{i=1}^{n} y_i^{\min(a_i, b_i) + c_i} = \prod_{i=1}^{n} y_i^{\min(a_i + c_i, b_i + c_i)} = pr \oplus qr$$

Ejercicio 5.2. Muestra que $\mathbb{ZP}$ es un dominio integral para cualquier $\mathbb{P}$.

Sean $p, q \in \mathbb{ZP}$ tal que $pq = 0$. Por la definición de anillo de grupo, podemos encontrar H finitamente generado (digamos por $y_1, \ldots, y_n$) tal que $p, q \in \mathbb{Z}H$. Luego $H \cong \mathbb{Z}^n$ (grupo abeliano libre en n variables) y por lo tanto $\mathbb{Z}H$ será el conjunto de polinomios de Laurent en y_i, que es un dominio. Así $p = 0$ o $q = 0$.

Ejercicio 5.3. Prueba el Lema 5.5. En particular, muestra que cada identidad en el semicampo universal es válida en cualquier otro semicampo.

Solución. Definimos el homomorfismo f haciendo que $x_i \mapsto p_i$ y extendemos de manera adecuada para conseguir un homomorfismo. Ahora la unicidad es inmediata pues si existiera otro, realizando la misma extensión se llega a que deben ser iguales.

Para probar la existencia basta ver que está bien definida, para esto tenemos que probar que si $P_1/Q_1 = P_2/Q_2$, donde P_1, Q_1, P_2, Q_2 son polinomios en $x_1, \ldots, x_n$ con coeficientes enteros no negativos, entonces $f(P_1)/f(Q_1) = f(P_2)/f(Q_2)$. En efecto, de la igualdad se tiene que P_1Q_2 y P_2Q_1 tienen los mismo coeficientes en cada uno de los monomios en $x_1, \ldots, x_n$. Por lo tanto, aplicando f tendríamos:

$$f(P_1)f(Q_2) = f(P_2)f(Q_1)$$

Dividimos correctamente, note que esto es posible pues $\mathbb{P}$ es un grupo abeliano. Entonces tendríamos lo pedido.

Ejercicio 5.4. Muestra que la mutación de Y-semillas es una involución.

Solución. Consideremos (y, B) una Y-semilla y denotaremos $u_k(y, B) = (y', B')$ y $u_k(y', B') = (y'', B'')$ donde $y' = (y'_1, \ldots, y'_n)$ e $y'' = (y''_1, \ldots, y''_n)$. Por la regla de mutación tenemos que:

$$y''_j = \begin{cases} (y'_k)^{-1} & \text{si } j = k \\ y'_j((y'_k)^{\operatorname{sgn}(-b'_{kj})} \oplus 1)^{-b'_{kj}} & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

Como $y'_k = y_k^{-1}$ entonces $y''_k = y_k$. Ahora, si $j \neq k$ dividimos en dos casos:

- Si $b_{kj} \geq 0$ entonces $\operatorname{sgn}(-b_{kj}) = -1$ por lo que:

  $$y'_j = y_j(y_k^{-1} \oplus 1)^{-b_{kj}}$$

  Luego, como $b'_{kj} = -b_{kj} \leq 0$ se sigue que $\operatorname{sgn}(-b'_{kj}) = 1$ por lo que:

  $$y''_j = y_j(y_k^{-1} \oplus 1)^{-b_{kj}}((y'_k)^1 \oplus 1)^{b_{kj}} = y_j(y_k^{-1} \oplus 1)^{-b_{kj}}(y_k^{-1} \oplus 1)^{b_{kj}} = y_j$$

- Si $b_{kj} \geq 0$ se procede de manera análoga a la anterior.

Así obtenemos que $y''_j = y_j$ para todo j por lo que las semillas coinciden (la mutación de matrices es involutiva).

Ejercicio 5.6. Prueba la Proposición 5,19, es decir prueba que para cada generador p_j de $\mathbb{P}$ y cada variable de conglomerado z que z es un polinomio en p_j.

Solución. Sea p algún generador de $\mathbb{P}$ fijo pero arbitrario. Una variable de conglomerado z lo podemos ver como un polinomio de Laurent en p con coeficientes el conglomerado y los p_j diferentes de p (solo hemos despejado p y agrupado lo demás). Lo que pide el problema ver es que z es un polinomio en p, osea no tiene exponentes negativos.

Probaremos por inducción sobre d la distancia entre la semilla que contiene a z y la semilla inicial fijada.

Si $d = 0$ entonces z está en el conglomerado inicial y no hay nada que probar. Si $d > 0$ entonces z aparece en alguna relación de intercambio:

$$zz' = M + M'$$

Las variables que aparecen en los monomios están a una distancia menor del conglomerado inicial que z, por lo que por hipótesis inductiva cada una de estas variables es un polinomio en p. Como p solo aparece en un monomio, pues $p \oplus p_j = 1$, entonces se sigue lo pedido.

Ejercicio 5.7. Sean $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}$ cuatro puntos en la línea proyectiva. Entonces, $P_i = [a_i : b_i]$ en coordenadas proyectivas. Definimos:

$$Y(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{P_{14}P_{23}}{P_{12}P_{34}}$$

1) Dado seis puntos $P_1, \ldots, P_6 \in \mathbb{P}^1$ calcula las razones cruzadas de los puntos $\{P_i, P_4, P_5, P_6\}$ en términos de las razones cruzadas de los puntos $\{P_i, P_1, P_2, P_3\}$.
2) Dada una triangulación del n-ágono T, sea B_T la matriz de intercambio no extendida del carcaj Q_T. Cada arco $d \in T$ es la diagonal de un cuadrilátero con vértices i, j, k, l. Definimos $Y_d = Y(P_i, P_j, P_k, P_l)$. Sea $Y_T = (Y_d : d \in T)$. Muestra que (Y_T, B_T) es un Y-patrón.
3) Concluye que para saber las $\binom{n}{4}$ razones cruzadas de $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{P}^1$ es suficiente calcular $n - 3$ de ellas.

Solución. Veamos.

a) No entendí muy bien la pregunta, pero lo que obtuve fue por ejemplo que:

$$Y(P_1, P_4, P_5, P_6) = Y(P_3, P_4, P_5, P_6)Y(P_6, P_1, P_2, P_3)^{-1}Y(P_4, P_1, P_2, P_3)$$

Con las demás se encuentran resultados parecidos, pero no puedo simplificarlo más para que todo quede en función de los $Y(P_i, P_1, P_2, P_3)$.

b) Nota: se debe considerar la matriz de la parte mutable del quiver $Q(T)$. Para ver que es un Y-patrón solo resta ver que hacer un flip se corresponde con la regla de mutación vista en clase.

Consideremos $Y_T = (y_d, \ldots)$ y $Y_{T'} = (y_{d'}, \ldots)$ donde T' se obtiene de un flip en la diagonal $d \in [1, n-3]$ de T. Esta diagonal se encuentra en un cuadrilátero i, j, k, l (tal que la diagonal ik sea d).

- Calculemos $Y'_{d'}$, cabe decir que T' contiene las mismas diagonales salvo d' que es la que se añade por d. Por la definición se tiene que:

$$Y'_{d'} = Y(P_l, P_i, P_j, P_k) = \frac{P_{lk}P_{ij}}{P_{li}P_{jk}} = \left(\frac{P_{li}P_{jk}}{P_{lk}P_{ij}}\right)^{-1} = Y_d^{-1}$$

  que justamente coincide con la Y-mutación.

- Calculemos Y'_e para cualquier otra diagonal. Vamos a analizar la matriz $B(T)$, si es que $b_{de} = 0$ entonces esto quiere decir que d y e no forman parte del mismo triángulo, por lo que al realizar el flip el cuadrilátero que encierra a e no sufre ningún cambio, así:

$$Y'_e = Y_e$$

  Si es que $b_{de} \neq 0$ (supongamos que es < 0 osea -1) entonces d y e forman parte de un mismo triángulo con d siguiendo a e en sentido horario. Por esta razón el cuadrilátero que contiene a e como diagonal debe tener como lado a d necesariamente, pongamos que i, j, l', k es el cuadrilátero que contiene a e. Luego del flip el nuevo cuadrilátero que contiene a e sería l, j, l', k por lo que:

$$Y'_e = Y(P_j, P_{l'}, P_k, P_l) = \frac{P_{j,l}P_{l',k}}{P_{j,l'}P_{k,l}}$$

  Por otro lado:

$$Y_e(1 + Y_d) = Y_e\left(1 + \frac{P_{l,i}P_{j,k}}{P_{l,k}P_{i,j}}\right) = \frac{P_{j,i}P_{l',k}}{P_{j,l'}P_{k,i}}\left(\frac{P_{i,k}P_{l,j}}{P_{l,k}P_{i,j}}\right) = \frac{P_{j,l}P_{l',k}}{P_{j,l'}P_{k,l}} = Y'_e$$

  que justamente coincide con la Y-mutación. Análogamente se realiza para el caso en que $b_{de} = 1$.

c) Es inmediato de lo anterior, se escoge una triangulación T del polígono P_n y calculamos todas las razones cruzadas Y_T como en el item anterior. Cualquier otra razón cruzada se corresponde con una diagonal que no se encuentra en la triangulación, por lo que mediante el flip (que es la mutación de Y-semillas) se expresa en función de las $n-3$ calculadas al principio.

Ejercicio 5.8. Prueba la Proposición 5.24 usando la proposición 5.19.

Solución. Como el álgebra tiene coeficientes principales, entonces el semicuerpo es $\mathbb{P} = \mathrm{Trop}(y_1, \ldots, y_n)$ donde podemos suponer que $(y_1, \ldots, y_n)$ es la upla de coeficientes inicial. Entonces, es claro que cada $p_j \in \mathcal{P}$ pues son los generadores y cada y_j está en $\mathcal{P}$ (para ver esto, notar que $y_k \oplus 1 = 1$). Luego por la proposición 5.19 toda variable de conglomerado es un polinomio de Laurent en las variables de conglomerado de cualquier semilla, en particular de la semilla inicial $x_1, \ldots, x_n$ y tiene coeficientes $y_1, \ldots, y_n$.

Ejercicio 5.9. Sea $t \in \mathbb{T}_n$ y $j \in [n]$.

1) Prueba que:

$$Y_{j;t} = Y_{j;t}|_{\mathrm{Trop}(y_1,\ldots,y_n)} \prod_{i=1}^{n} F_{i;t}^{b^t_{i,j}}$$

   donde $B(T) = (b^t_{ij})_{i,j\in[n]}$ es la matriz de intercambio en t.

2) Prueba que si $b^t_{i,j} \geq 0$ para todas las $i \in [n]$ entonces $Y_{i,t}$ es un polinomio de Laurent en los coeficientes iniciales $y_1, \ldots, y_n$.

Solución. Recordemos que por el lema 5.28 tenemos que:

$$\hat{y}_{i;t} = Y^{B^0,t_0}_{i;t}|_{\mathcal{F}(\hat{y}_1,\ldots,\hat{y}_n)}$$

a) Usaremos el lema anterior y el corolario 5.26 pero para el caso de un álgebra con coeficientes principales y además poniendo $x_i = 1$, en este caso tenemos que $\hat{y}_i = y_i$ por lo que:

$$\hat{y}_{j;t} = Y^{B^0;t_0}_{j;t}|_{\mathrm{Trop}(y_1,\ldots,y_n)}$$

$$\implies \hat{y}_{j;t} = Y_{j;t}\prod_{i=1}^{n} F_{i;t}^{-b^t_{ij}}$$

   Igualando y despejando se obtiene lo pedido.

b) (Nota: debería decir $Y_{j;t}$) Por lo anterior, como todos los exponentes son positivos y los $F_{i;t}$ son polinomios se sigue que $Y_{j;t}$ es un polinomio de Laurent en $y_1, \ldots, y_n$.