

Álgebras de Conglomerado

Lara Bossinger*

Noviembre 2022

Índice

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Historia y motivación | 3 |
| 1.1 | ¿De dónde vienen y dónde están las álgebras de conglomerado? | 3 |
| 1.2 | Primeros ejemplos | 5 |
| 1.2.1 | Greca (o patrones de friso) | 5 |
| 1.2.2 | Triangulaciones del n -ágono | 7 |
| 1.3 | Positividad total | 8 |
| 1.3.1 | Positividad total de matrices | 8 |
| 1.3.2 | La Grassmanniana totalmente positiva | 11 |
| 1.4 | Literatura | 13 |
| 1.5 | Ejercicios | 14 |
| 2 | Definiciones | 15 |
| 2.1 | Carcajes y su mutación | 15 |
| 2.1.1 | Triangulaciones y carcajes | 18 |
| 2.1.2 | Equivalencia de carcajes | 20 |
| 2.1.3 | Ejercicios | 22 |
| 2.2 | Matrices y su mutación | 22 |
| 2.2.1 | Equivalencia de matrices | 26 |
| 2.2.2 | Ejercicios | 26 |
| 2.3 | Semillas y su mutación | 26 |
| 2.3.1 | Álgebras de conglomerado | 29 |
| 2.3.2 | Ejercicios | 31 |
| 2.4 | Ejemplos de rango 2 | 31 |
| 2.4.1 | Ejercicios | 33 |
| 3 | El fenómeno de Laurent | 33 |
| 3.1 | Preparación | 33 |
| 3.2 | Prueba del Teorema 3.1 | 36 |
| 3.2.1 | Base de la inducción | 36 |
| 3.2.2 | Paso de la inducción | 38 |
| 3.3 | Comentarios | 39 |

*Este manuscrito se base en las apuntes del curso sobre álgebras de conglomerado impartido en el semestre 2022-1 de la maestría en matemáticas de la UNAM.

| | | |
|----------|--|------------|
| 3.3.1 | \mathcal{A} -Variedades de conglomerado | 40 |
| 3.3.2 | Ejercicios | 47 |
| 4 | La clasificación de tipo finito | 47 |
| 4.1 | Subálgebras de conglomerado | 48 |
| 4.2 | Plegando Carcajes | 49 |
| 4.3 | Matrices de Cartan y Diagramas de Dynkin | 54 |
| 4.4 | Tipo A | 59 |
| 4.5 | Tipo C | 61 |
| 4.6 | Enumeración y tipo dos-finito | 62 |
| 4.6.1 | Los Árboles | 66 |
| 4.6.2 | Los Ciclos | 68 |
| 4.6.3 | Ejercicios | 69 |
| 5 | Coeeficientes | 70 |
| 5.1 | Semicampos | 70 |
| 5.2 | \mathbf{Y} -patrones y álgebras de conglomerado con coeficientes | 73 |
| 5.2.1 | Ejercicios | 77 |
| 5.3 | Formulas de separación | 78 |
| 5.3.1 | Ejercicios | 82 |
| 5.4 | \mathbf{F} -polinomios, g -vectores y c -vectores | 83 |
| 5.5 | El g -abanico | 87 |
| 6 | Variedades de conglomerado | 89 |
| 6.1 | Las variedades de conglomerado | 89 |
| 6.2 | Mapeos de ensambles de conglomerado | 95 |
| 6.2.1 | Ejercicios | 100 |
| 7 | Grassmannianas | 101 |
| 7.1 | Realización geométrica de álgebras de conglomerado | 102 |
| 7.2 | Gráficas plabic y la \mathcal{A} -variedad | 104 |
| 7.3 | Flujos y la \mathcal{X} -variedad | 110 |
| A | Proyectos | 116 |
| A.1 | Aplicaciones de positividad total | 116 |
| A.2 | Redes planas y positividad total | 116 |
| A.3 | Los números de Markov | 116 |
| A.4 | Triangulaciones de superficies | 116 |
| A.5 | Coeeficientes universales | 117 |
| A.6 | Diagramas de Dynkin | 117 |
| A.7 | Gráficas plabic | 117 |
| A.8 | Mutación de secuencias biracionales | 117 |
| A.9 | Variedades de conglomerado | 118 |
| A.10 | Diagramas de Young y g -vectores | 118 |

1. Historia y motivación

Referencias para este capítulo son los apuntes [Ip19] y el artículo [BFG⁺18].

1.1. ¿De dónde vienen y dónde están las álgebras de conglomerado?

Dos rusos (viviendo y trabajando en los Estados Unidos) Sergei Fomin y Andrei Zelevinsky definieron las álgebras de conglomerado en el año 2001 [FZ02]:



©<http://www.math.lsa.umich.edu/~fomin>



©<https://opc.mfo.de>

Antes de desarrollar los fundamentos de las álgebras de conglomerado, la investigación de estos personajes incluía (entre otras cosas) a la teoría de las matrices totalmente positivas y sus conexiones con la teoría de representaciones y las álgebras de Lie. Cabe mencionar que dichas conexiones fueron descubiertas en primera instancia en trabajos de gran trascendencia del matemático rumano George Lusztig y el matemático japonés Masaki Kashiwara. Fomin y Zelevinsky descubrieron lo que hoy en día se llama la *estructura de conglomerado* en las relaciones entre los menores en la teoría de positividad total de matrices, y en grupos cuánticos y los elementos de las bases canónicas duales de Lusztig.

Un álgebra de conglomerado se define a base de información combinatoria que puede tener varias formas, por ejemplo:

- un carcaj (una gráfica dirigida finita),
- una triangulación de una superficie con pinchaduras o puntos marcados en su frontera,
- un sistema de raíces,
- una matriz casi simétrica o casi simetrizable.

Las primeras aplicaciones de las álgebras de conglomerado fueron en la teoría de representaciones de álgebras y carcajes. Pero al mismo tiempo se encontraron las álgebras de conglomerado en los grupos de Lie: muchas variedades relacionadas tienen una estructura de conglomerado en su anillo de funciones regulares (por ejemplo, los grupos SL_n y GL_n , las Grassmannianas, las variedades de bandera, las celdas dobles de Bruhat, las variedades de Schubert, ...). De allí también surgen aplicaciones en la combinatoria relacionadas a las álgebras de caminos de gráficas orientadas, permutaciones y politopos.

Otros dos matemáticos rusos, Vladimir V. Fock y Alexander B. Goncharov, que tienen sus raíces matemáticas más cercanas a la geometría y la física teórica se dedicaron a darle una interpretación más geométrica a las álgebras de conglomerado. La versión geométrica se llama una **variedad de conglomerado**—aún en general no son variedades, pero más bien esquemas. Su concepto fue muy exitoso y resultó en aplicaciones en la simetría especular (una rama de la teoría de cuerdas en la física teórica), en la teoría de Teichmüller y la geometría hiperbólica. Además el punto de vista geométrico ayudó a probar conjeturas fuertes que Fomin y Zelevinsky formularon ya en los primeros artículos sobre las álgebras de conglomerado, por ejemplo la **Conjetura de positividad**. Nos gustaría mencionar, que varios algebristas trataron de probar la conjetura de positividad usando métodos de la categorificación y la teoría de representaciones y se logró demostrar casos particulares de la conjetura usando estas herramientas. Pero la versión general finalmente fue probada por los matemáticos Mark Gross, Paul Hacking, Sean Keel trabajando en la geometría algebraica y el medallista de Fields Maxim Kontsevich.

Ambos sabores—el algebraico y el geométrico—son de interés para la investigación actual y cada año se descubren nuevas aplicaciones de las álgebras de conglomerado (ver Figura 1). Al día de hoy hay más que 1,800 artículos y desde 2003 había más de 139 eventos internacionales cuyo tema principal eran las álgebras de conglomerado.

Las álgebras de conglomerado son álgebras conmutativas dotadas de una estructura combinatoria definida de manera recursiva. Se encuentran hoy en día en varias áreas de las matemáticas y sus vecindades. En la Figura 1 se representan algunas teorías en las que se han encontrado conexiones profundas con las álgebras de conglomerado.

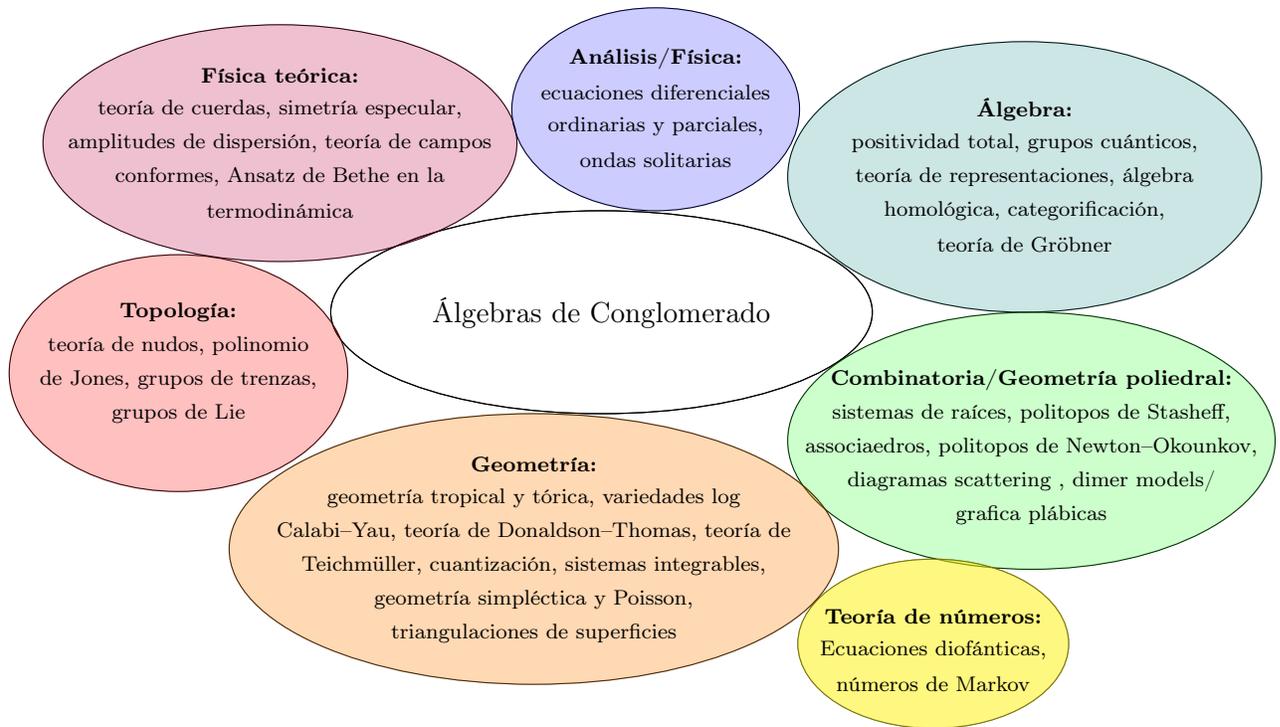


Figura 1: ¿Dónde se encuentran las álgebras de conglomerado?

1.2. Primeros ejemplos

1.2.1. Grecas (o patrones de friso)

Grecas o **patrones de friso** son adornos en forma de banda compuesta por líneas geométricas con intersecciones que forman un patrón y que se repite en la misma combinación decorativa. Se encuentran, por ejemplo, en las pirámides de Mitla en Oaxaca:



Figura 2: Las grecas de Mitla, Oaxaca.

Hay un análogo matemático:

Definición 1.1. Un **friso de Conway-Coxeter** (o simplemente un **friso**) es una tabla de un número finito de filas infinitas, la primera y la última fila solo contienen ceros y la segunda y la penúltima fila solo contienen unos, como

$$\begin{array}{cccccccccc}
 \dots & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \dots \\
 \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots \\
 \dots & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 & \dots \\
 \dots & b_1 & & b_2 & & b_3 & & b_4 & & b_5 & \dots \\
 \dots & c_1 & & c_2 & & c_3 & & c_4 & & c_5 & \dots \\
 \dots & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots \\
 \dots & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \dots
 \end{array}$$

Además cada conjunto de números adjacentes arreglados en un **diamante** $\begin{matrix} & & b & & \\ & a & & d & \\ & & c & & \end{matrix}$ satisfacen la **regla del friso**: $ad - bc = 1$.

Ejemplo 1.2. Consideramos el siguiente patrón de 1s. Todas las demás entradas se llenan siguiendo la regla del friso: $d = \frac{1+bc}{a}$

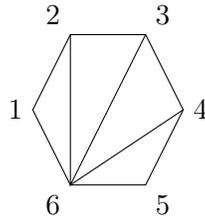
Algunas observaciones sobre el Ejemplo 1.4 están en orden: para un friso con n filas no triviales empezando de manera diagonal (como en el Ejemplo 1.4) con entradas x_1, \dots, x_n tenemos lo siguiente:

1. Para cada $k > n$ la variable x_k tiene una expresión como polinomio de Laurent (con coeficientes en \mathbb{N}) en las variables x_1, \dots, x_n .
2. Las variables x_1, \dots, x_n aparecen otra vez en una diagonal invertida y el patrón se repite.

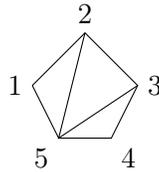
Hay una conexión íntima entre los frisos de n filas y las triangulaciones del $(n + 3)$ -ágono:

Teorema 1.5 (Conway–Coxeter 1973). Hay una biyección entre los frisos de n filas y las triangulaciones del $(n + 3)$ -ágono. Más precisamente, sean a_1, \dots, a_{n+3} los números de triángulos adyacentes a los vértices $1, \dots, n + 3$ en orden circular. Entonces a_1, \dots, a_{n+3} es la primera fila no trivial de un friso de n filas.

Ejemplo 1.6. Del Ejemplo 1.2 obtenemos la secuencia de a_i 's $(1, 2, 2, 2, 1, 4)$ y el n -ágono asociado es



Fijando $x_1 = x_2 = 1$ en el Ejemplo 1.4 obtenemos $x_3 = x_5 = 2$ y $x_4 = 3$ lo que da la secuencia de a_i 's $(1, 2, 2, 1, 3)$ y la triangulación del pentágono es



1.2.2. Triangulaciones del n -ágono

La regla del friso está muy relacionada a un resultado griego más antigua: el teorema de Ptolomeo.

Teorema 1.7 (Ptolomeo). Tomamos cuatro puntos A, B, C, D en un círculo. Entonces las distancias entre los cuatro puntos satisfacen

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}.$$

Fijamos un pentágono en un círculo tal que todas sus aristas tienen longitud 1 y sean x_1 y x_2 las longitudes de dos diagonales de una triangulación del pentágono. Usando la fórmula de Ptolomeo podemos calcular las longitudes de las otras diagonales en términos de x_1 y x_2 :

Ejercicio 1.1. Verifica que las expresiones que obtenemos de esta manera coinciden con las fórmulas del Ejemplo 1.4.

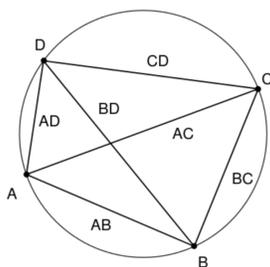


Figura 3: La visualización del teorema de Ptolomeo.

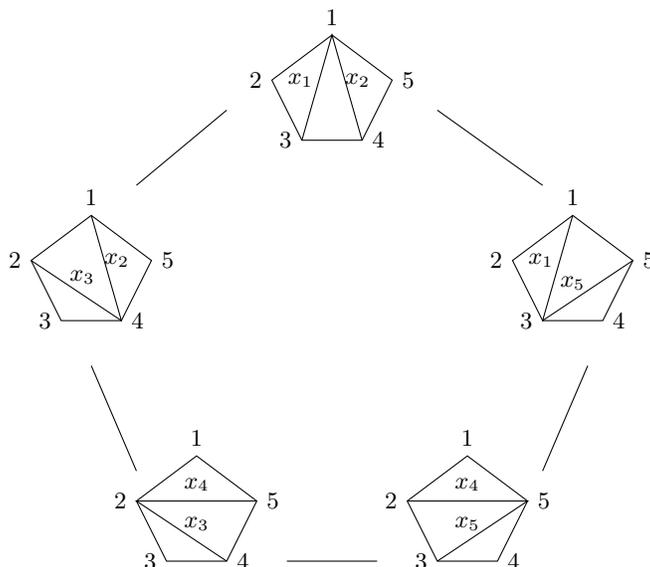


Figura 4: Las triangulaciones del pentágono.

1.3. Positividad total

En esta sección nos sumergimos en los orígenes de las álgebras de conglomerado. Referencias principales son [Pin10], [FWZ16] y [Ip19].

1.3.1. Positividad total de matrices

Definición 1.8. Una matriz $n \times m$ con entradas en los números reales se llama **totalmente positiva** o TP (resp. **totalmente no negativa** o TNN) si todos sus menores son números reales positivos (resp. números reales no negativos).

Nos acordamos que un menor de una matriz es el determinante de una submatriz cuadrada. Más precisamente, sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Entonces cada par de secuencias $\mathbf{i} = (1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n)$ y $\mathbf{j} = (1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n)$ de números en $[n] := \{1, \dots, n\}$ con $1 \leq p \leq n$

define una submatriz cuadrada de A :

$$A[\mathbf{i}, \mathbf{j}] := (a_{ij})_{i \in \mathbf{i}, j \in \mathbf{j}} = \begin{pmatrix} a_{i_1, j_1} & a_{i_1, j_2} & \cdots & a_{i_1, j_p} \\ a_{i_2, j_1} & a_{i_2, j_2} & \cdots & a_{i_2, j_p} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{i_p, j_1} & a_{i_p, j_2} & \cdots & a_{i_p, j_p} \end{pmatrix}.$$

El **menor de A** asociado al par (\mathbf{i}, \mathbf{j}) es

$$A(\mathbf{i}, \mathbf{j}) := \det(A[\mathbf{i}, \mathbf{j}]).$$

Ejercicio 1.2. Calcula todos los menores de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Hay matrices totalmente positivas o totalmente no negativas entre ellas? ¿Cuántos menores hay de cada tamaño? ¿Cuántos menores tiene una matriz $n \times n$?

Una pregunta natural es si la positividad total es una propiedad que se preserva bajo operaciones básicas en matrices, por ejemplo la multiplicación. Nos acordamos del siguiente resultado del álgebra lineal:

Teorema 1.9 (Cauchy–Binet). Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ con $m \leq n$ y $C = AB$. Entonces,

$$\det(C) = \sum_{\mathbf{i} \in \binom{[n]}{m}} A([m], \mathbf{i}) B(\mathbf{i}, [m]). \quad (1.1)$$

Note que podemos usar la formula (1.1) para calcular menores de matrices también y así obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 1.10. Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ con $m \leq n$. Si A y B son totalmente positivas, entonces $C = AB$ es totalmente positiva.

Ejercicio 1.3. Prueba el Corolario 1.10 usando el Teorema 1.9

Para aplicaciones en general es importante decidir dado una matriz, si es totalmente positiva (o totalmente no negativa) o no— un **test de positividad**. Entonces, necesitamos herramientas que nos dejen verificarlo. En el Ejercicio 1.2 se van a dar cuenta que el número de menores de una matriz crece de manera exponencial con su tamaño. Por eso es importante que encontremos un test **eficiente** de positividad donde el número de pruebas necesarias sea el mínimo.

Ejemplo 1.11. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Los menores son

$$a, b, c, d \quad \text{y} \quad \Delta = ad - bc.$$

Podemos expresar $d = \frac{\Delta+bc}{a}$ y $a = \frac{\Delta+bc}{d}$. Entonces, los dos conjuntos

$$\{a, b, c, \Delta\} \quad \text{y} \quad \{d, b, c, \Delta\}$$

son test de positividad para A . Nota que los dos tienen cuatro elementos, que es justo el grado de libertad que tenemos para escoger los elementos a, b, c, d —o más fácil la dimensión de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. En particular, los dos son test de positividad eficientes.

Existen matrices para las que resulta relativamente fácil determinar su positividad (o más bien su no-negatividad): matrices triangulares superiores e inferiores y matrices diagonales. Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ es una matriz triangular superior (entonces $a_{ij} = 0$ si $i > j$) sabemos que para $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \binom{[n]}{p}$ con $i_k > j_k$ para todos $k \in [p]$ el menor asociado de A es cero:

$$A(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = 0, \quad \text{si} \quad i_k > j_k \quad \forall k.$$

De manera similar, si A es triangular inferior tenemos que $A(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = 0$, si $i_k < j_k$ para todos los k . De hecho podemos aún reducir más el número de menores que tenemos que calcular en este caso (ver Teorema 2.8 en [Pin10]):

Teorema 1.12. Sea $A \in \mathbb{R}^{n^2}$ una matriz triangular superior (resp. inferior). Si A satisface

$$A([k], [j+1, j+k]) > 0 \quad (\text{resp. } A([j+1, j+k], [k]) > 0)$$

para todos los $j \in [0, n-k]$ y $k \in [n]$, entonces A es totalmente no-negativa.

Combinando con el Corolario 1.10 resulta útil tener una descomposición de matrices en matrices triangulares y diagonales—en inglés tal descomposición se llama una descomposición **LDU**, lo vamos a llamar una descomposición **IDS** en español. Sea A una matriz $n \times n$ tal que todos sus menores de forma $A([k], [k])$ para $k \in [n]$ son positivas. Entonces, Pinkus nos explica en [Pin10, §2.4, p.51] como podemos calcular matrices $I, D, S \in \mathbb{R}^{n^2}$ (donde I es una matriz triangular inferior, D una matriz diagonal y S una matriz triangular superior) tal que

$$A = IDS.$$

Si el determinante de A es uno, es decir $A \in SL_n(\mathbb{R})$, entonces también $\det(I) = \det(D) = \det(S)$. Y así llegamos a una versión muy útil del resultado que fue probado por Cryer en 1973.

Lema 1.13 (Lema de separación). Sea $A \in SL_n(\mathbb{R})$. Entonces A es totalmente no-negativa si y solo si A tiene una descomposición

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & * & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & * & * & \dots & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

tal que todas las matrices en el lado derecho son totalmente no-negativas y unitarias.

Las matrices en la descomposición (1.2) se pueden descomponer aún más, son productos de **matrices primarias**:

$$x_i(t) := \mathbf{1} + tE_{i,i+1}, \quad y_i(t) = \mathbf{1} + tE_{i+1,i}, \quad z_i(t) := \mathbf{1} + (t-1)E_{i,i} + (t^{-1}-1)E_{i+1,i+1},$$

donde $E_{i,j}$ es la matriz con entrada 1 en la posición (i,j) y todos los demás 0, y $\mathbf{1}$ es la matriz de identidad (este resultado se llama el **Teorema de Loewner–Whitney**).

Las matrices $x_i(t), y_i(t)$ y $z_i(t)$ están muy relacionadas a los **generadores de Chevalley** del álgebra de Lie \mathfrak{sl}_n . Más precisamente, los generadores de Chevalley son las siguientes matrices con traza cero (la definición del álgebra de Lie \mathfrak{sl}_n)

$$e_i = E_{i,i+1}, \quad f_i = E_{i+1,i}, \quad h_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1} \in \mathfrak{sl}_n$$

y sus exponenciales son $x_i(t) = \exp(te_i), y_i(t) = \exp(tf_i)$ y $z_i(t) = \exp(th_i)$.

Del resultado de Cryer en combinación con el Teorema de Lowener-Whitney viene la conexión a los grupos algebraicos donde se ubica el trabajo de Lusztig, Fomin y Zelevinsky. Sobre todo Lusztig generalizó la noción de **matrices totalmente positivas** a otros grupos de Lie. El inició el estudio de **la parte no-negativa** $G_{\geq 0}$ de un grupo G y probó que es un conjunto **semi-algebraico** (es decir que se puede describir como un conjunto que satisface desigualdades polinomiales $\Delta(x) \geq 0$, donde los Δ son elementos de la propia **base canónica dual** y en casos sencillos son **menores generalizados**).

¿Cómo nos ayuda entonces la descomposición IDS en la búsqueda de matrices totalmente no-negativas? Sea $G = SL_n$, entonces $G_{\geq 0}$ es un semigrupo multiplicativo (ver Corolario 1.10). Gracias al Lema 1.13 nos podemos enfocar en el subsemigrupo $N_{\geq 0}$ de matrices triangulares superiores no-negativas (o equivalentemente en las matrices triangulares inferiores no-negativas $N_{\geq 0}^-$).

Ejemplo 1.14. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculamos sus menores:

$$x, y, z, \quad y \quad \Delta = xz - y.$$

Entonces, $\Delta + y = xz$ y así obtenemos dos test de positividad $\{\Delta, y, x\}$ y $\{\Delta, y, z\}$. Como en el Ejemplo 1.11 concluimos que la cardinalidad de los dos test es la dimensión de N y los test son eficientes.

1.3.2. La Grassmanniana totalmente positiva

Concluimos esta sección con un ejemplo extendido que vamos a ver más seguido en este curso. Consideramos matrices de tamaño 2×5 :

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{pmatrix}$$

Nos enfocamos en los menores maximales, es decir de tamaño 2×2 . Escribimos para $1 \leq i < j \leq 5$

$$p_{ij}(A) := \det \begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix} = x_i y_j - x_j y_i.$$

Las p_{ij} se llaman las **coordenadas de Plücker**. Si al menos uno de los menores maximales no es cero—es decir A es de rango 2— la matriz A representa un espacio vectorial de dimensión dos en \mathbb{R}^5 generado de sus renglones. Como tal es un elemento en la **Grassmanniana**

$$\text{Gr}_2(\mathbb{R}^5) := \{V \subset \mathbb{R}^5 : \dim(V) = 2\}.$$

Cada $V \in \text{Gr}_2(\mathbb{R}^5)$ puede ser representado de una matriz 2×5 cuyos renglones formen una base de V . Nota que la matriz asociada no es única solo bajo multiplicación de una matriz en $GL_2(\mathbb{R})$ de la izquierda.

Ejercicio 1.4. 1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$. Calcula los menores maximales de A y de BA . ¿Cómo están relacionados?

2. Sea $V \in \text{Gr}_2(\mathbb{R}^n)$ y A_V una matriz asociada. Prueba que para cada matriz $B \in GL_2(\mathbb{R})$ el producto BA_V también representa V . ¿Cuál es la relación entre los menores de A_V y los menores de BA_V ? Si A_V tiene todos sus menores maximales positivos, ¿cuales son las condiciones necesarias en B tal que también BA_V tiene puros menores maximales positivos? (Recuerda el Corolario 1.10)

Definición 1.15. La **Grassmanniana totalmente no-negativa** es el conjunto

$$\text{Gr}_2(\mathbb{R}^n)_{\geq 0} := \{V \in \text{Gr}_2(\mathbb{R}^n) : \exists A_V : p_{ij}(A_V) \geq 0 \forall 1 \leq i < j \leq 5\}$$

Similarmente definimos la Grassmanniana totalmente positiva $\text{Gr}_2(\mathbb{R}^n)_{> 0}$.

Ejercicio 1.5. Sea $\text{Mat}_{2 \times n}^{\text{tnn}}$ el conjunto de todas las matrices $2 \times n$ cuyos menores maximales son no-negativos y sea $GL_2(\mathbb{R})_{\geq 0}$ el conjunto de todas las matrices totalmente no-negativas en $GL_2(\mathbb{R})$. Usando el Ejercicio 1.4 verifica que $\text{Gr}_2(\mathbb{R}^n)_{\geq 0}$ coincide con el cociente de $\text{Mat}_{2 \times n}^{\text{tnn}}$ modula la acción de $GL_2(\mathbb{R})_{\geq 0}$ del lado izquierdo:

$$\text{Gr}_2(\mathbb{R}^n)_{\geq 0} = GL_2(\mathbb{R})_{\geq 0} \backslash \text{Mat}_{2 \times n}^{\text{tnn}}.$$

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculamos sus coordenadas de Plücker:

$$p_{12} = 2, p_{13} = p_{14} = 1, p_{23} = 6, p_{24} = 10, p_{34} = 2.$$

Entonces, $A \in \text{Gr}_2(\mathbb{R}^5)_{> 0}$ (¡Aunque tiene entradas negativas!). Entre los menores podemos observar algunas dependencias, por ejemplo:

$$p_{13}p_{24} = 10 = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 6 = p_{12}p_{34} + p_{14}p_{23} \quad (1.3)$$

En particular, $p_{13} = \frac{p_{12}p_{34} + p_{14}p_{23}}{p_{24}}$ y $p_{24} = \frac{p_{12}p_{34} + p_{14}p_{23}}{p_{13}}$. Usamos estas relaciones para determinar dos test de positividad

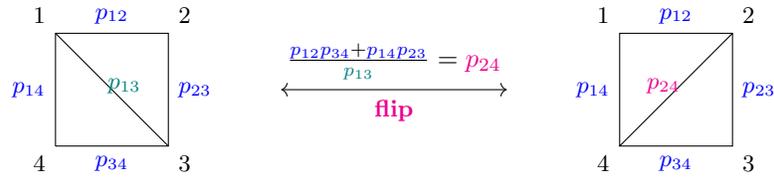
$$\{p_{13}, p_{12}, p_{23}, p_{34}, p_{14}\} \quad \text{y} \quad \{p_{24}, p_{12}, p_{23}, p_{34}, p_{14}\}.$$

Ejercicio 1.6. Prueba que para una matriz $2 \times n$ tenemos para todos $1 \leq i < j < k < l \leq n$ la relación

$$p_{ij}p_{kl} + p_{il}p_{jk} = p_{ik}p_{jl}. \quad (1.4)$$

Se llama una **relación de Plücker**.

En la §1.2.2 vimos una relación muy parecida: la formula de Ptolomeo en Teorema 1.7. Utilizamos esta conexión para visualizar la relación (1.3)



La operación que transforma la triangulación en el lado izquierdo a la triangulación en el lado derecho se llama un **flip**. En una triangulación del n -ágono podemos realizar un flip para cada **cuadrilátero**, un subcuadrado triangulado:

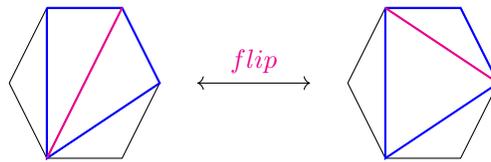


Figura 5: Un flip en un hexágono.

Nota que esta observación se extiende: para la Grassmanniana $\text{Gr}_2(\mathbb{R}^5)$ podemos dibujar una triangulación del pentágono y Ptolomeo nos ayuda a encontrar todas las relaciones de Plücker. ¿Cómo podemos entonces obtener un test de positividad eficiente para elementos de la Grassmanniana? Tenemos una biyección:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{test de positividad} \\ \text{eficiente} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1-1} \left\{ \begin{array}{l} \text{triangulación} \\ \text{del } n\text{-ágono} \end{array} \right\}.$$

La Figura 4 tiene su propia versión para la Grassmanniana $\text{Gr}_2(\mathbb{R}^5)$, ver Figura 6.

1.4. Literatura

Todos los ejemplos en esta sección merecen muchos más detalles y más atención, pero aquí no tenemos el espacio para ellos. Al menos quiero dar algunas referencias para profundizar los temas:

1. La conexión entre álgebras de conglomerado y frisos fue explorada hace poco tiempo por Baur, Faber, Gratz, Serhiyenko y Todorov. Un resultado de su colaboración es el artículo panorámico [BFG⁺18] que explora la **mutación** de los frisos y su interpretación en términos de la teoría de representaciones.
2. La teoría de la positividad total es un área entera de investigación. Para el enfoque en aplicaciones con el punto de vista del álgebra lineal quiero sugerir de lectura la introducción del libro [Pin10] de Pinkus. Para el enfoque en los grupos algebraicos hay un artículo panorámico de Lusztig: [Lus06].
3. El estudio de la Grassmanniana totalmente positiva fue iniciado por Postnikov en el año 2006. Aún hay varios matemáticos que se dedican a su estudio quiero sobre todo mencionar el artículo inicial de Postnikov que sigue una preimpresión: [Pos06].

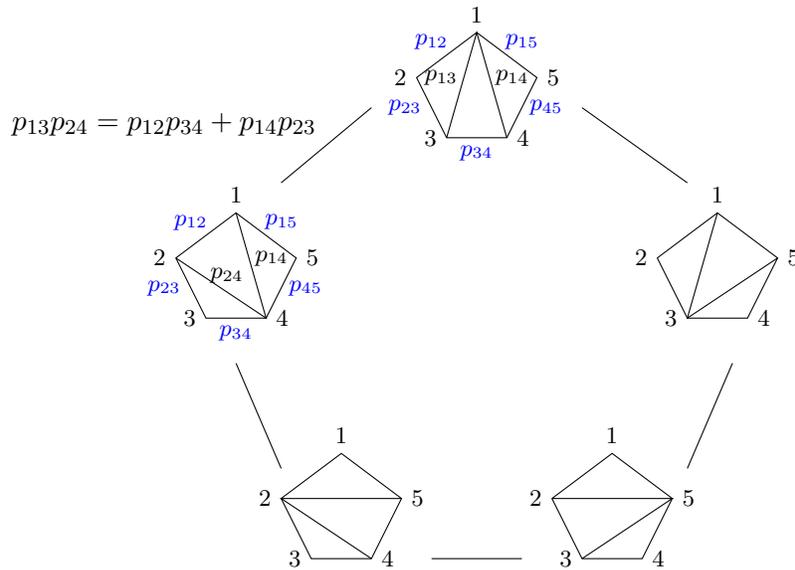


Figura 6: Las triangulaciones del pentágono y las relaciones de Plücker.

1.5. Ejercicios

Ejercicio 1.7. El politopo de la Figura 4 (y de la Figura 6) cuyos vértices son las triangulaciones del pentágono y cuyos aristas corresponden a los flips se llama el **associahedro** o **politopo de Stasheff** del tipo A_2 (nota que cada triangulación del pentágono tiene dos diagonales).

1. ¿Cuántos vértices, aristas y caras tiene el associahedro del tipo A_3 ?
2. ¿Cuál es la dimensión del associahedro del tipo A_3 ?
3. ¿Cuál puede ser la dimensión del associahedro del tipo A_n y porqué?

Ejercicio 1.8. Generalizamos la regla del friso en la Definición 1.1 y consideramos las siguientes reglas del juego

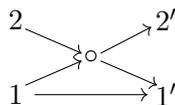
$$x_{k+1}x_{k-1} = \begin{cases} x_k^a + 1, & \text{si } k \text{ es par} \\ x_k^b + 1, & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

Nota que para $(a, b) = (1, 1)$ la regla reproduce la regla del friso y determina las formulas que calculamos en el Ejemplo 1.4.

1. Calcula las expresiones para las variables x_3, x_4, \dots en términos de las variables x_1 y x_2 cuando $(a, b) \in \{(1, 2), (1, 3)\}$. ¿También se repite el patrón en algún momento? ¿Cuáles son los valores de las variables si fijamos $x_1 = x_2 = 1$?
2. Para $(a, b) = (1, 4)$ y $x_1 = x_2 = 1$ calcula la secuencia $(x_i)_{i=1, \dots, 10}$. ¿Parece periódica?

Ejercicio 1.9. Una **red plana de orden** n es una gráfica plana orientada con $2n$ vértices marcados $1, \dots, n$ y $1', \dots, n'$, de los cuales i son fuentes e i' son pozos; con vértices interiores

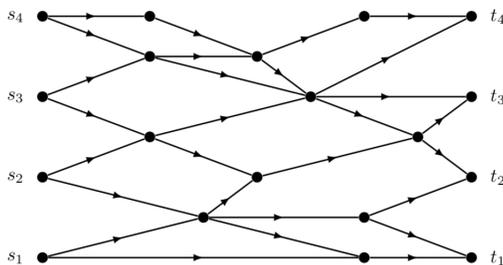
y aristas orientadas. Por ejemplo,



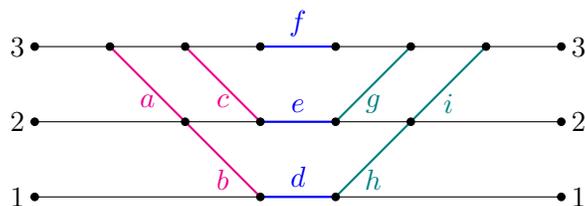
La **matriz** de caminos de una red plana de orden n es la matriz $W = (w_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ donde

$$w_{ij} := \text{número de caminos de } i \text{ a } j'.$$

Calcula la matriz de caminos de la siguiente red y prueba que es totalmente no-negativa:



Ejercicio 1.10. Consideramos la siguiente red plana Γ_0



Un **camino** en Γ_0 es de un vértice i en la izquierda a un vértice j en la derecha con la restricción que cada arista se puede atravesar solamente de la izquierda a la derecha. El **peso de un camino** es el producto de todos los pesos (a, \dots, i) de sus aristas (los pesos de las aristas sin etiqueta es 1).

1. Calcula la **matriz de caminos de Γ_0** , es la matriz 3×3 cuya entrada a_{ij} es la suma de todos los pesos de caminos de i a j .
2. Prueba que la matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ es totalmente positiva si y solo si $a, \dots, i \in \mathbb{R}_{>0}$.

De hecho, cada matriz 3×3 totalmente positiva es la matriz de caminos de la gráfica Γ_0 para alguna elección de pesos a, \dots, i . Este resultado es tema de Proyecto A.2.

2. Definiciones

2.1. Carcajes y su mutación

Definición 2.1. Un **carcaj** $Q = (Q_0, Q_1)$ es una gráfica dirigida finita. Más precisamente, Q consiste de un conjunto finito de vértices Q_0 y un conjunto finito de aristas orientadas Q_1 que se llaman **flechas**. En el conjunto de vértices diferenciamos entre **vértices mutables** y **vértices congelados**. Si existen vértices congelados también hablamos de un **carcaj de hielo** y lo anotamos (Q, F) donde Q es el carcaj y F es el conjunto de vértices congelados.

Los vértices congelados los vamos a visualizar en un cajita, como \boxed{i} , para distinguirlos de los vértices mutables. Así un ejemplo sencillo de un carcaj (de hielo) es $1 \rightarrow \boxed{2}$. Para simplificar la notación, vamos a numerar los vértices de un carcaj Q con los números $1, \dots, n + m$ donde $1, \dots, n$ son los vértices mutables y $n + 1, \dots, n + m$ los vértices congelados.

Durante todo el curso vamos a usar la siguiente suposición:

Suposición 2.2. El carcaj Q no contiene ni **lazos** ni **2-ciclos orientados**, es decir las siguientes configuraciones no se permiten:



Ahora definimos la primera versión de la noción clave de las álgebras de conglomerado: el proceso de la **mutación** que necesita la noción de los vértices mutables. Para carcajes se traduce al siguiente algoritmo.

Definición 2.3. Sea Q un carcaj y $k \in Q_0 \setminus F$ un vértice mutable de Q . La **mutación de Q en k** es un proceso que produce un nuevo carcaj $\mu_k(Q)$ que se obtiene de Q aplicando los siguientes pasos

1. para cada camino orientado $i \rightarrow k \rightarrow j$ agrega una flecha $i \rightarrow j$;
2. para cada flecha incidente a k invierta su dirección;
3. elimina un número maximal de 2-ciclos que se hayan producido en los pasos 1. y 2.

Los conjuntos de vértices de $\mu_k(Q)$ y de Q son iguales (incluyendo la información sobre los vértices mutables y congelados). Como las flechas entre los vértices congelados no tienen ningún efecto en la mutación del carcaj adaptamos la convención

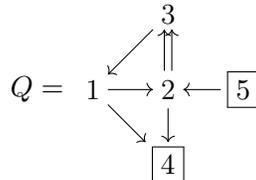
$$\text{Las flechas entre vértices congelados se eliminan.} \tag{2.1}$$

Ejemplo 2.4. Sea $Q = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$. Calculamos $\mu_1(Q) = 1 \leftarrow 2 \rightarrow 3$,

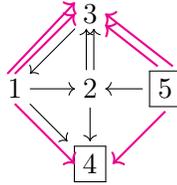
$$\mu_2(Q) = 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$$

y $\mu_3(Q) = 1 \rightarrow 2 \leftarrow 3$.

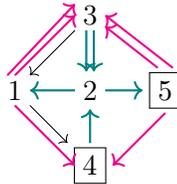
Ejemplo 2.5. Consideramos el siguiente carcaj de hielo



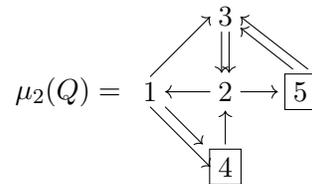
y aplicamos la mutación en la dirección 2 paso a paso. En el primer paso agregamos las siguientes flechas:



En el segundo paso cambiamos la orientación de todas las flechas adyacentes al vértice 2:



Finalmente, en el tercer paso eliminamos todos los 2-ciclos que hemos creado y de una vez también eliminamos las flechas entre vértices congelados. Obtenemos



Nota que no importa **cual** de las flechas $1 \rightarrow 3$ queda, los carcajes al final son idénticos en el sentido que sus conjuntos de vértices y de flechas coinciden.

El siguiente ejercicio es una observación clave sobre la mutación de carcajes.

Ejercicio 2.1. Prueba que la mutación de un carcaj es una involución. Es decir, para cada carcaj Q y cada vértice mutable k de Q tenemos $\mu_k(\mu_k(Q)) = Q$.

Dado el Ejercicio 2.1 podemos interpretar la mutación de un carcaj como un sistema dinámico discreto. En el tiempo $t = 0$ tenemos nuestro carcaj Q , para $t = 1$ tenemos n carcajes $\mu_1(Q), \dots, \mu_n(Q)$ donde $1, \dots, n$ son los vértices mutables de Q . Para $t = 2$ tenemos todos los carcajes obtenidos de Q después de dos mutaciones distintos, es decir los carcajes $\mu_i(\mu_j(Q))$ donde $i \neq j$ y $i, j \in [n]$. Siguiendo de esta manera, ¿cuántos carcajes tenemos para $t = k$?

El árbol n -regular. Podemos visualizar este sistema dinámico en una gráfica cuya vértices corresponden a los carcajes y cuyos aristas corresponden a la mutación. Si dos vértices t, t' son relacionados bajo una mutación en dirección k lo escribimos $t - k - t'$. La gráfica se llama el **árbol n -regular** y se denota \mathbb{T}_n . Es un árbol infinito n -valente en cada vértice. En la Figura 7 se ve una parte del árbol \mathbb{T}_5 con $t \leq 6$.

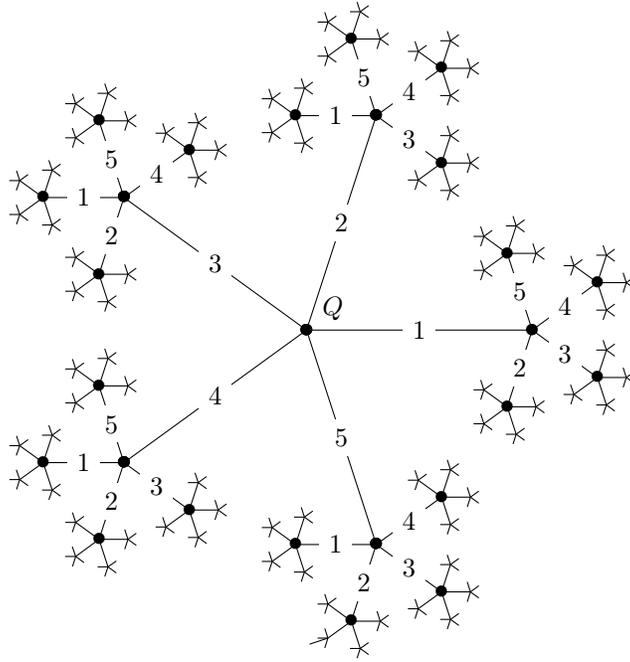


Figura 7: El árbol 5-regular \mathbb{T}_5 ©Bernhard Keller, <https://webusers.imj-prg.fr/~bernhard.keller/>

Lema 2.6. Sea Q un carcaj y Q^{op} el carcaj cuyos vértices coinciden con los de Q y cuyas flechas son exactamente las flechas opuestas de Q . Para k un vértice mutable de Q tenemos

$$\mu_k(Q)^{\text{op}} = \mu_k(Q^{\text{op}}).$$

Prueba. Tenemos que verificar que cada paso de la mutación en la dirección k conmuta con oponer las flechas:

1. Si en Q tenemos un camino $i \rightarrow k \rightarrow j$ tenemos un camino $i \leftarrow k \leftarrow j$ en Q^{op} . Entonces, agregamos un flecha $i \rightarrow j$ en Q y una flecha $j \leftarrow i$ en Q^{op} .
2. En los dos carcajes invertimos la dirección de todas las flechas adyacentes a k .
3. Si en Q tenemos un 2-ciclo después de los primeros dos pasos, también tenemos un 2-ciclo en Q^{op} .

□

Ejercicio 2.2. Sea Q un carcaj y sean k y l dos vértices mutables de Q sin flechas entre ellos. Muestra que

$$\mu_k(\mu_l(Q)) = \mu_l(\mu_k(Q)).$$

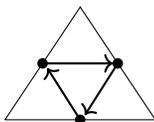
2.1.1. Triangulaciones y carcajes

En el primer capítulo vimos como triangulaciones y su cambio a través del **flip** codifican las repeticiones en las patrones de friso y las relaciones de Plücker. Los carcajes y su mutación

generalizan este fenómeno y son la combinatoria subyacente de la teoría de las álgebras de conglomerado.

Definición 2.7. Sea T una triangulación del n -ágono. Definimos Q_T el **carcaj de T** en tres pasos:

1. los vértices mutables de Q_T son las diagonales de T ;
2. los vértices congelados de Q_T son las aristas de la frontera del n -ágono;
3. las flechas de Q_T se obtienen de cada triángulo de T de la siguiente manera:



Finalmente, olvidamos las flechas entre vértices congelados que se obtienen en el paso 3.

En este contexto es práctico etiquetar los vértices en correspondencia con las diagonales de las cuales vienen. Es decir, si v es el vértice que corresponde a la diagonal que conecta los vértices i y j del n -ágono entonces decimos $v = ij$ como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.8. Consideramos la triangulación del hexágono como en el Ejemplo 1.6 y aplicamos el algoritmo de la Definición 2.7.

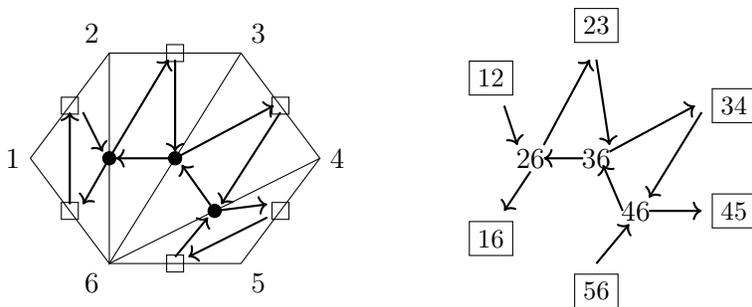


Figura 8: Una triangulación T del hexágono como en el Ejemplo 1.6 y su carcaj Q_T .

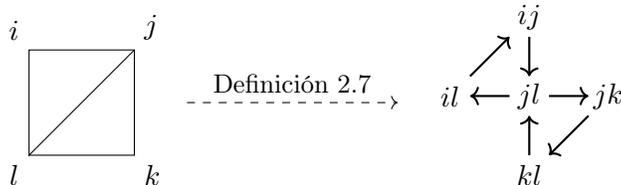
Lema 2.9. Sea T una triangulación del n -ágono y Q_T su carcaj. Para una diagonal \overline{jl} de T sea $flip_{jl}(T)$ la triangulación obtenida de T después de un flip en esta diagonal. Tenemos (bajo cambio de la etiqueta del vértice ji)

$$Q_{flip_{jl}(T)} = \mu_{jl}(Q_T).$$

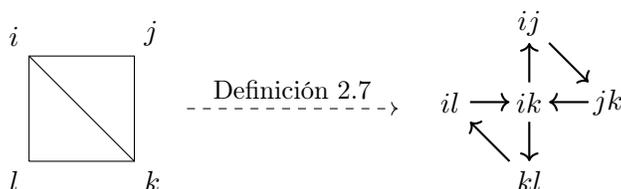
Es decir, la mutación del carcaj generaliza el flip de las triangulaciones.

Prueba. Nota que tanto la mutación del carcaj como el flip de la triangulación son operaciones locales: la mutación en la dirección k de un carcaj solo afecta a los vértices que comparten una flecha con k ; el flip en la triangulación solo afecta al cuadrilátero del cual es la diagonal y

el resto de la triangulación se queda fija. En particular, es suficiente verificar el lema para un solo cuadrilátero. Sean



un cuadrilátero en T y la configuración local en el carcaj Q_T que induce. Entonces, después del flip en la diagonal jl tenemos localmente



Nota que en el carcaj Q_T tenemos el vértice jl y en el carcaj $Q_{flip_{jl}(T)}$ tenemos en su lugar el vértice ik . Es justo esta etiqueta de $Q_{flip_{jl}(T)}$ que vamos a cambiar. Entonces, falta verificar que la configuración local del carcaj $Q_{flip_{jl}(T)}$ coincide con la configuración local del carcaj $\mu_{jl}(Q_T)$ lo cual lo dejamos como un ejercicio. \square

Ejercicio 2.3. Verifica el último paso en la prueba del Lema 2.9. Para convencerte de la prueba del Lema verifica para la triangulación del pentágono en el Ejemplo 1.6 que $Q_{flip_{25}(T)} = \mu_{25}(Q_T)$.

2.1.2. Equivalencia de carcajes

Antes de definir la equivalencia de carcajes que define la mutación necesitamos la noción de isomorfismo: sean Q y Q' dos carcajes con n vértices. Entonces, Q y Q' son **isomorfos** si existe una permutación $\pi \in S_n$ tal que $\pi(Q) = Q'$. Es decir, Q' coincide con Q después de la reetiquetación de los vértices.

La **clase de isomorfismo** de un carcaj es el carcaj sin etiquetas en los vértices, por ejemplo:



Definición 2.10. Dos carcajes Q y Q' son **equivalentes bajo mutación** si existe una secuencia de mutaciones que transforme Q a un carcaj isomorfo a Q' . La **clase de equivalencia** de un carcaj Q es $[Q]$ el conjunto de todos los carcajes equivalentes bajo mutación a Q (bajo isomorfismo).

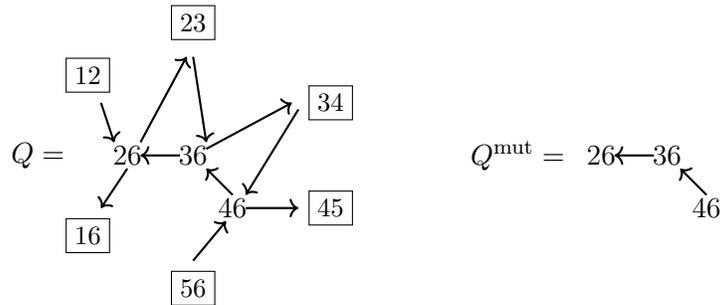
Ejemplo 2.11. Consideramos el carcaj $Q = \begin{matrix} 1 & \rightarrow & 2 \\ \uparrow & \swarrow & \uparrow \\ 4 & \rightarrow & 3 \end{matrix}$ y su mutación $\mu_2(Q) = \begin{matrix} 1 & \leftarrow & 2 \\ \swarrow & & \downarrow \\ 4 & & 3 \end{matrix}$.

Entonces, las dos clases de isomorfismo



pertenecen a la clase de equivalencia $[Q]$. ¿Cuántos elementos más tiene $[Q]$?

Para un carcaj de hielo Q definimos su **parte mutable** Q^{mut} como el carcaj obtenido de Q olvidando todos los vértices congelados (y las flechas adyacentes a ellos). Por ejemplo, para el carcaj del Ejemplo 2.8 tenemos



Definición 2.12. El **tipo** de un carcaj de hielo Q es la clase de equivalencia de su parte mutable $[Q^{\text{mut}}]$.

Ejercicio 2.4. La gráfica subyacente del carcaj Q^{mut} del Ejemplo 2.8 es la **gráfica de Dynkin de tipo A_3** . ¿Cuántos carcajes (sin vértices congelados) de tipo A_3 hay?

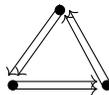
Dada la definición del tipo de un carcaj de hielo nos urge una definición más precisa sobre isomorfismos entre carcajes de hielo.

Definición 2.13. Dos carcajes de hielo $Q = (Q_0, F, Q_1)$ y $Q' = (Q'_0, F', Q'_1)$ con $m = |F| = |F'|$ y $n + m = |Q_0| = |Q'_0|$ son **isomorfos** si Q' se obtiene de Q después de una permutación $\pi \in S_n$ de los vértices mutables y una permutación $\tau \in S_m$ de los vértices congelados.

Nota que con esta definición dos carcajes de hielo isomorfos también tienen el mismo tipo.

Definición 2.14. Un carcaj Q es de **tipo de mutación finito** si su clase de equivalencia $[Q]$ es un conjunto finito.

Ejemplo 2.15. El **carcaj de Markov** tiene tres vértices y flechas que forman 3-ciclos orientados:



Su clase de mutación tiene un único elemento, en particular el carcaj de Markov es de tipo de mutación finito.

En general, dados dos carcajes es un problema difícil verificar si son equivalentes o no. Hay resultados parciales, como el siguiente de Philippe Caldero y Bernhard Keller cuya prueba utiliza el lenguaje de las **categorías de conglomerado**.

Teorema 2.16 ([CK06]). Sean Q y Q' dos carcajes **acíclicos** (es decir, no tienen ciclos orientados) que son equivalentes bajo mutación. Entonces, Q se puede transformar en Q' en una secuencia de mutaciones en **fuentes** (vértices que no tienen ninguna flecha apuntada hacia a ellos) o **pozos** (vértices que no tienen ninguna flecha apuntada lejos de ellos).

Por el contrario, todas las gráficas (no dirigidas) subyacentes de los carcajes acíclicos en la misma clase de equivalencia coinciden.

Como los árboles son un caso especial de carcajes acíclicos obtenemos el siguiente.

Corolario 2.17. Sean Q y Q' dos orientaciones del mismo árbol. Entonces, Q se obtiene de Q' de una secuencia de mutaciones en pozos y fuentes.

Ejercicio 2.5. Prueba el Corolario 2.17 sin usar el Teorema de Caldero–Keller. Tipp: Usa inducción.

2.1.3. Ejercicios

Ejercicio 2.6. Definimos un **carcaj de una $k \times n$ -cuadrícula** como una orientación de la cuadrícula tal que cada 4-ciclo es orientado y todos sus vértices son mutables. Muestra que cada carcaj de una cuadrícula es equivalente bajo mutación a su versión **triangulada** (ver Figura 9) y da una secuencia de mutación.

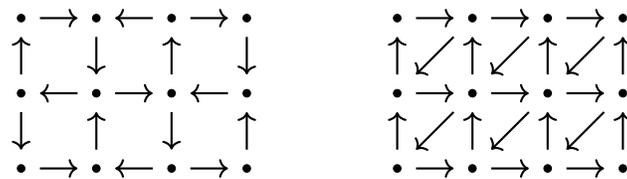


Figura 9: Un carcaj de la 3×4 -cuadrícula y su versión triangulada.

Ejercicio 2.7. El carcaj del Ejemplo 2.11 es el carcaj triangulado de una 1×1 -cuadrícula y es equivalente bajo mutación a un carcaj que es una orientación de un **árbol** (una gráfica sin ciclos). ¿Hay más carcajes de cuadrículas que estén en la misma clase de equivalencia de un árbol?

Ejercicio 2.8. En la página web del matemático Bernhard Keller se encuentra su aplicación para la mutación de carcajes llamada **MutationApp**:

<https://webusers.imj-prg.fr/~bernhard.keller/quivermutation/>

Si puedes, baja la aplicación (tu computadora necesita el "Java runtime environment (JRE)" la liga también se encuentra el página del **MutationApp**). Como calentamiento con la aplicación pon el carcaj de la 3-cuadrícula de la Figura 9 y verifica tu secuencia de mutación del Ejercicio 2.6. También puedes utilizar la aplicación para resolver el Ejercicio 2.7.

2.2. Matrices y su mutación

Si consideran cualquier artículo sobre álgebras de conglomerado es probable que van a encontrar una matriz en lugar de un carcaj. La mutación de carcaj se puede generalizar a matrices: la idea básica es que la información de un carcaj igualmente se puede guardar en su matriz de incidencia. La noción de mutación para matrices se generaliza de allá.

Definición 2.18. Sea $Q = (Q_0, Q_1)$ un carcaj de hielo con n vértices mutables y m vértices congelados. Su **matriz extendida de intercambio** es una matriz $\tilde{B}(Q)$ de tamaño $(n+m) \times n$ con entradas $b_{ij} \in \mathbb{Z}$ que son definidas

$$b_{ij} := \#\{i \rightarrow j \in Q_1\} - \#\{j \rightarrow i \in Q_1\} \quad (2.2)$$

donde $i \in Q_0$ es un vértice y $j \in Q_0 \setminus F$ es un vértice mutable. La **matriz de intercambio** de Q es la $n \times n$ -submatriz de $\tilde{B}(Q)$ definida como $B(Q) := (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Podríamos definir la matriz asociada a un carcaj con $n + m$ vértices también como la $(n + m) \times (n + m)$ -matriz $\widehat{B}(Q)$ cuyas entradas satisfacen (2.2) para todos $i, j \in Q_0$. Sería una matriz con cuatro bloques: B^{ei} de tamaños $n \times n$ encima izquierda, B^{ad} de tamaño $m \times m$ abajo derecha y B^{ed} (resp. B^{ai}) de tamaño $n \times m$ (resp. $m \times n$). Nota que $\widehat{B}(Q)$ es una matriz **casi-simétrica**, es decir satisface

$$b_{ij} = -b_{ji}.$$

En particular, $B^{\text{ed}} = -(B^{\text{ai}})^T$. Además por nuestra convención (2.1) de ignorar flechas entre vértices congelados tenemos $B^{\text{ad}} = 0$. Entonces, toda la información necesaria ya está guardada en la matriz extendida de intercambio $\tilde{B}(Q)$.

Ejemplo 2.19. Recuerda el carcaj de hielo del Ejemplo 2.5:

$$Q = \begin{array}{c} & & 3 & & \\ & \swarrow & \updownarrow & \searrow & \\ 1 & \rightarrow & 2 & \leftarrow & \boxed{5} \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & \boxed{4} & & \end{array} \quad \tilde{B}(Q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La definición de la matriz $\tilde{B}(Q)$ claramente depende de las etiquetas de los vértices de Q .

Lema 2.20. Sean Q y Q' dos carcajes de hielo con n vértices mutables y m vértices congelados que son isomorfos. Sean $\pi_1 \in S_n$ y $\pi_2 \in S_m$ las permutaciones que transforman Q a Q' y $\Pi_1 \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, $\Pi_2 \in \mathbb{Z}^{m \times m}$ las matrices que las representan. Entonces,

$$(\pi_1^{-1}, \pi_2^{-1})\tilde{B}(Q)\pi_1 := \begin{pmatrix} \Pi_1^{-1} & 0 \\ 0 & \Pi_2^{-1} \end{pmatrix} \tilde{B}(Q) \Pi_1 = \tilde{B}(Q'). \quad (2.3)$$

En particular, como nos interesan las clases de isomorfismo de carcajes vamos a considerar matrices de intercambio extendidas bajo transformaciones del tipo (2.3).

Ejercicio 2.9. Prueba el Lema 2.20.

Ahora podemos traducir la mutación de carcaj a una operación en su matriz de intercambio. La traducción es sencilla y resulta en el siguiente Lema.

Lema 2.21. Sea Q un carcaj (de hielo) y $\tilde{B}(Q)$ su matriz de intercambio extendida. Para k un vértice mutable de Q sea $\tilde{B}(\mu_k(Q)) = (b'_{ij})_{i,j}$. Tenemos

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij}, & \text{si } k \in \{i, j\} \\ b_{ij} + b_{ik}b_{kj}, & \text{si } b_{ik} > 0 \text{ y } b_{jk} > 0 \\ b_{ij} - b_{ik}b_{kj}, & \text{si } b_{ik} < 0 \text{ y } b_{jk} < 0 \\ b_{ij}, & \text{por lo demás.} \end{cases} \quad (2.4)$$

Ejercicio 2.10. Convéncete que el Lema 2.21 es correcto, primero para Q y $\mu_2(Q)$ como en el Ejemplo 2.5 y luego en general.

En varios lugares la regla (2.4) está escrita más compactamente usando para $x \in \mathbb{R}$ las notaciones

$$[x]_+ := \max\{0, x\} \quad \text{y} \quad \text{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Entonces, (2.4) se puede simplificar a

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij}, & \text{si } k \in \{i, j\} \\ b_{ij} + \text{sgn}(b_{ik})[b_{ik}b_{kj}]_+, & \text{por lo demás.} \end{cases} \quad (2.5)$$

Finalmente podemos definir la mutación de matrices que generaliza la mutación de carcaj. La clase de matrices que concediéramos son matrices extendidas casi-simetrizables: una matriz con entradas enteras $\tilde{B} = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n+m, 1 \leq j \leq n}$ es una **matriz extendida casi-simetrizable** si existen $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que $d_i b_{ij} = -d_j b_{ji}$ para todos $1 \leq i, j \leq n$. Es decir, la $n \times n$ -submatriz superior $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ es una matriz casi-simétrica después de reescalar sus filas con números positivos. En particular, la diagonal de B es cero.

Definición 2.22. Sea $\tilde{B} = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n+m, 1 \leq j \leq n}$ una matriz extendida casi-simetrizable. Para $k \in [n]$ definimos la **mutación de B en dirección k** como $\mu_k(\tilde{B}) = (b'_{ij})_{1 \leq i \leq n+m, 1 \leq j \leq n}$ donde las entradas b_{ij} son como en (2.4).

Ejemplo 2.23. Una matriz $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$ es casi-simetrizable si $b_{11} = b_{22} = 0$ y existen $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $d_1 b_{12} = -d_2 b_{21}$. Entonces, son de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ -\frac{d_2}{d_1} b_{12} & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos $\mu_1(B)$: las entradas b_{11}, b_{12}, b_{21} solo cambian su signo y la entrada b_{22} se conserva igual porque b_{12} y b_{21} tienen signos diferentes. Observamos

$$\mu_1(B) = \mu_2(B) = -B.$$

La observación del Ejemplo 2.23 no es verdad en general. En el caso de carcajes ya vimos otro comportamiento: por ejemplo del Ejemplo 2.4 tenemos

$$B(Q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B(\mu_s(Q)) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En general, si mutamos en la dirección k nos tenemos que enfocar en la fila y la columna k y las "proyecciones" de todas las demás entradas hacia a ellas. Aquí un intento de visualizar la

mutación:

$$\begin{pmatrix} * & b_{1k} & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & \boxed{b_{ik}} & \leftarrow & b_{ij} & \\ * & \vdots & * & \downarrow & * \\ b_{k1} & \dots & \dots & \boxed{b_{jk}} & \dots \\ * & \vdots & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

Proposición 2.24. Sea $\tilde{B} = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n+m, 1 \leq j \leq n}$ una matriz extendida casi-simetrizable y $k \in [n]$. Entonces,

1. $\mu_k(\tilde{B})$ es una matriz extendida casi-simetrizable con los mismos d_1, \dots, d_n que \tilde{B} ;
2. la mutación de matrices es una involución: $\mu_k(\mu_k(\tilde{B})) = \tilde{B}$;
3. para $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ tenemos $\mu_k(B^T) = \mu_k(B)^T$;
4. si $b_{ij} = b_{ji} = 0$ entonces $\mu_i(\mu_j(\tilde{B})) = \mu_j(\mu_i(\tilde{B}))$.

Prueba. Probamos las afirmaciones 1. y 3., las demás quedan como ejercicios (ver Ejercicio 2.11).

1. Tenemos que mostrar $d_i b'_{ij} = -d_j b'_{ji}$ para todos $1 \leq i, j \leq n$. Vamos a usar la versión (2.5) de la mutación de matrices. Entonces hay que distinguir dos casos:

$k \in \{i, j\}$ Tenemos $b'_{ij} = -b_{ij}$ y $b'_{ji} = -b_{ji}$.

$k \notin \{i, j\}$ Calculamos

$$d_i b'_{ij} = d_i b_{ij} + d_i \operatorname{sgn}(b_{ik}) [b_{ik} b_{kj}]_+ = -d_j b_{ji} + \operatorname{sgn}(b_{ik}) [d_i b_{ik} b_{kj}]_+$$

Nota que el término $\operatorname{sgn}(b_{ik}) [b_{ik} b_{kj}]_+$ es cero si $\operatorname{sgn}(b_{ik}) \neq \operatorname{sgn}(b_{kj})$. En este caso la afirmación ya sigue. Entonces podemos presumir $\operatorname{sgn}(b_{ik}) = \operatorname{sgn}(b_{kj})$. Observa

$$d_i b_{ik} b_{kj} = -d_k b_{ki} b_{kj} = d_j b_{ki} b_{jk}$$

Nota que $\operatorname{sgn}(b_{kj}) = -\operatorname{sgn}(b_{jk})$, entonces:

$$-d_j b_{ji} + \operatorname{sgn}(b_{ik}) [d_i b_{ik} b_{kj}]_+ = -d_j b_{ji} - d_j \operatorname{sgn}(b_{jk}) [b_{ki} b_{jk}]_+ = b'_{ji}.$$

3. Denotamos $\mu_k(B^T) = (b''_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Hay que mostrar que $b''_{ij} = b'_{ji}$. El caso de $k \in \{i, j\}$ es claro. Sea entonces $k \notin \{i, j\}$:

$$b''_{ij} = b_{ij}^T + \operatorname{sgn}(b_{ik}^T) [b_{ik}^T b_{kj}^T]_+ = b_{ji} + \operatorname{sgn}(b_{ki}) [b_{ki} b_{jk}]_+ = b'_{ji}.$$

□

Ejercicio 2.11. Prueba las afirmaciones 2. y 4. de la Proposición 2.24 (recuerda los Ejercicios 2.1 y 2.2).

2.2.1. Equivalencia de matrices

Extendemos las nociones de §2.1.2 a matrices.

Definición 2.25. Dos matrices (extendidas) casi-simetrizables \tilde{B} y \tilde{B}' son **equivalentes bajo mutación** si existe una secuencia de mutaciones (eventualmente combinada con una permutación del estilo (2.3)) que transforma \tilde{B} a \tilde{B}' . Denotamos como $[\tilde{B}]$ la clase de equivalencia de \tilde{B} .

Se saben pocas cosas sobre lo que tienen en común las matrices de la misma clase de equivalencia. La siguiente Proposición se encuentra como el Lema 3.2 en [BFZ05].

Proposición 2.26. El rango de una matriz extendida casi-simetrizable \tilde{B} es invariante bajo mutación. Si \tilde{B} es una matriz cuadrada, también el determinante es una invariante.

La prueba de la proposición es tema del Ejercicio 2.12.

2.2.2. Ejercicios

Ejercicio 2.12. En este ejercicio probamos la Proposición 2.26. Sea \tilde{B} de tamaño $n + m \times n$ una matriz extendida casi-simetrizable y $k \in [n]$.

1. Muestra que para cualquier signo $\epsilon \in \{1, -1\}$ la formula de la mutación (2.4) es

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij}, & k \in \{i, j\} \\ b_{ij} + [-\epsilon b_{ik}]_+ b_{kj} + b_{ik} [\epsilon b_{kj}]_+, & \text{por lo demás.} \end{cases} \quad (2.6)$$

2. Sea $\mathbf{1}_\ell$ la matriz de identidad de tamaño $\ell \times \ell$ y $E_{i,j}^\ell$ la $\ell \times \ell$ -matriz elemental cuya única entrada no cero es un 1 en la posición (i, j) . Definimos $J_{\ell,k} := \mathbf{1}_\ell - 2E_{k,k}^\ell$ y $C_k = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n+m}$ la matriz cuya única columna no cero es la columna k con entradas $c_{ik} = [-\epsilon b_{ik}]_+$ y $F_k = (f_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matriz cuya única fila no cero es la fila k con entradas $f_{kj} = [\epsilon b_{kj}]_+$. Verifica que

$$\mu_k(\tilde{B}) = (J_{m+n;k} + C_k) \tilde{B} (F_k + J_{n;k}). \quad (2.7)$$

3. Deduce que $\text{rang}(\tilde{B}) = \text{rang}(\mu_k(\tilde{B}))$.
4. En el caso que $m = 0$ deduce que $B := \tilde{B}$ y $\mu_k(B)$ tienen el mismo determinante.

2.3. Semillas y su mutación

En esta sección finalmente vamos a definir el álgebra de conglomerado. La fundación es la definición de una semilla de la cuál junto con su mutación crece un álgebra de conglomerado. Hasta ahora vimos la mutación de carcajes y matrices que cuentan como la información combinatoria subyacente de un álgebra de conglomerado. Una semilla se puede entender como una mejora de un carcaj o una matriz que lleva adicionalmente información algebraica.

Sean $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y \mathcal{F} el campo de funciones racionales en $m + n$ variables sobre \mathbb{C} (o \mathbb{Q}).

Definición 2.27. Una **semilla etiquetada** en \mathcal{F} es un par $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{B})$ donde

1. $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ es un tuple de $n + m$ elementos algebraicamente independientes en \mathcal{F} (es decir, $\mathcal{F} = \mathbb{C}(x_1, \dots, x_{n+m})$);
2. $\tilde{B} = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n+m, 1 \leq j \leq n}$ es una matriz extendida casi-simetrizable.

El $n+m$ -tuple $\tilde{\mathbf{x}}$ se llama el **conglomerado extendido** (etiquetado) de $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{B})$ y el n -tuple $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ es el **conglomerado** (etiquetado) de $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{B})$. Los elementos x_1, \dots, x_n se llaman las **variables de conglomerado** y los demás elementos x_{n+1}, \dots, x_{n+m} son las **variables congeladas**. La matriz \tilde{B} se llama la **matrix extendida de intercambio** y su submatrix $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ se llama la **matrix de intercambio**.

Una alternativa a las semillas **etiquetadas** son las semillas **no-etiquetadas**. Veremos un ejemplo que muestra en que consiste la diferencia. Las semillas también tienen su propia mutación: ya vimos que pasa con una matriz extendida bajo mutación (o con un carcaj). Lo que nos falta entonces es el comportamiento de las variables de conglomerado y las variables congeladas.

Definición 2.28. Sea $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{B})$ una semilla extendida como en la Definición 2.27 y $k \in [n]$. La **mutación en la dirección k de la semilla $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{B})$** es $\mu_k(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{B}) := (\mu_k(\tilde{\mathbf{x}}), \mu_k(\tilde{B}))$ donde:

1. $\mu_k(\tilde{\mathbf{x}}) = (x'_1, \dots, x'_{n+m})$ es dado por $x'_i = x_i$ si $i \neq k$ y x'_k se determina de la siguiente **relación de intercambio**

$$x_k x'_k = \prod_{i=1, b_{ik} > 0}^{n+m} x_i^{b_{ik}} + \prod_{i=1, b_{ik} < 0}^{n+m} x_i^{-b_{ik}}. \quad (2.8)$$

2. $\mu_k(\tilde{B})$ es la mutación de la matriz extendida casi-simetrizable como en la Definición 2.22.

Recuerda que las entradas de la matriz $\tilde{B} = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n+m, 1 \leq j \leq n}$ satisfacen $d_i b_{ij} = -d_j b_{ji}$ para $1 \leq i, j \leq n$ y algunos $d_i, d_j \in \mathbb{Z}_{>0}$. Si $m = 0$, es decir $\tilde{B} = B$ es una matriz cuadrada casi-simetrizable, entonces en la ecuación (2.8) podemos reemplazar b_{ik} por b_{ki} . Si $\tilde{B} = \tilde{B}(Q)$ para un carcaj de hielo Q la relación de intercambio se puede escribir como

$$x_k x'_k = \prod_{i \rightarrow k} x_i + \prod_{k \rightarrow j} x_j. \quad (2.9)$$

Si $\tilde{B} = \tilde{B}(Q)$ simplificamos la notación de una semilla extendida $(\tilde{\mathbf{x}}, Q) := (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{B}(Q))$.

Ejercicio 2.13. Verifica que la mutación de semillas es una involución, es decir $\mu_k(\mu_k(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{B})) = (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{B})$.

Ejemplo 2.29. Consideramos el carcaj Q del Ejemplo 2.5, entonces tenemos $n = 3$ y $m = 2$. La matriz $\tilde{B}(Q)$ la calculamos en el Ejemplo 2.19. Sea $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_5)$ el tuple de variables asociado, nota que x_1, x_2, x_3 son variables de conglomerado y x_4, x_5 son variables congeladas. Calculamos $\mu_2(\tilde{\mathbf{x}}, Q) = (\mu_2(\tilde{\mathbf{x}}), \mu_2(Q))$. Usando la formula (2.8) nos enfocamos en la columna 2 de la matriz $\tilde{B}(Q)$ que es $(1, 0, -2, -1, 1)^T$. Entonces

$$x_2 x'_2 = x_1 x_5 + x_3^2 x_4.$$

Si usamos la formula (2.9) contamos dos flechas que van hacia al vértice 2 que vienen de los vértices 1 y $\boxed{5}$; y tres flechas que salen de 2, uno va así a $\boxed{4}$ y los dos demás a 3. El carcaj $\mu_2(Q)$ se encuentra ya en el Ejemplo 2.5. Entonces tenemos

$$\mu_2(\tilde{\mathbf{x}}, Q) = \left((x_1, \frac{x_1x_5+x_3^2x_4}{x_2}, x_3, x_4, x_4), \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 3 & \\ & \updownarrow & \\ 1 & \leftarrow 2 & \rightarrow \boxed{5} \\ & \updownarrow & \\ & 4 & \end{array} \end{array} \right)$$

Recuerda el árbol n -regular \mathbb{T}_n que vimos en §2.1 (ver Figura 7). Los vértices de \mathbb{T}_n no solo parametrizan los carcajes que son equivalentes bajo mutación pero también las semillas.

Definición 2.30. Un **patrón de semillas** es una biyección entre los vértices del árbol n -regular \mathbb{T}_n y semillas $(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{B}(t))_{t \in \mathbb{T}_n}$ tal que si t y t' son conectados con una arista etiquetada con k (es decir $t - k - t'$ en \mathbb{T}_n) entonces $\mu_k(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{B}(t)) = (\tilde{\mathbf{x}}(t'), \tilde{B}(t'))$.

Lema 2.31. Un patrón de semillas es determinado de manera única de la asignación de una sola semilla a un vértice de \mathbb{T}_n .

Prueba. Sea $\mathcal{P}_n = (\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{B}(t))_{t \in \mathbb{T}_n}$ un patrón de semillas y $0 \in \mathbb{T}_n$ un vértice. Vamos a probar que $(\tilde{\mathbf{x}}(0), \tilde{B}(0))$ determina todas las demás semillas $(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{B}(t))$ de manera única por inducción sobre el número n_t de aristas entre 0 y t . Para $n_t = 1$ tenemos una $k \in [n]$ tal que $\mu_k(\tilde{\mathbf{x}}(0), \tilde{B}(0)) = (\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{B}(t))$. Si $n_t > 1$ existe un camino único de 0 a t en \mathbb{T}_n . Empezando en 0 sean k_1, \dots, k_{n_t} las etiquetas de las aristas del camino. Entonces, por definición la semilla $(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{B}(t))$ se obtiene de $(\tilde{\mathbf{x}}(0), \tilde{B}(0))$:

$$(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{B}(t)) = \mu_{k_{n_t}} \circ \dots \circ \mu_{k_1}(\tilde{\mathbf{x}}(0), \tilde{B}(0)).$$

□

Una **semilla inicial** es una semilla que se asocia a un vértice del árbol \mathbb{T}_n para determinar un patrón de semillas como en el Lema 2.31. Se denota $s_0 := (\tilde{\mathbf{x}}(0), \tilde{B}(0))$ para $0 \in \mathbb{T}_n$.

Ejemplo 2.32. Para $n = 2$ los vértices del árbol 2-regular están en biyección con los números enteros:

$$\dots -1 \quad \xrightarrow{2} \quad 0 \quad \xrightarrow{1} \quad 1 \quad \xrightarrow{2} \quad 2 \quad \xrightarrow{1} \quad 3 \quad \xrightarrow{2} \quad 4 \quad \xrightarrow{1} \quad 5 \quad \xrightarrow{2} \quad 6 \dots$$

Asociamos un patrón de semillas fijando la semilla $((x_1, x_2), 1 \rightarrow 2)$ en $t = 0$ y calculamos las semillas obtenidas de ella bajo mutaciones:

$$\begin{array}{cccccccc} \dots -1 & \xrightarrow{2} & 0 & \xrightarrow{1} & 1 & \xrightarrow{2} & 2 & \xrightarrow{1} & 3 & \xrightarrow{2} & 4 & \xrightarrow{1} & 5 & \xrightarrow{2} & 6 \dots \\ Q(t) : & 1 \leftarrow 2 & & 1 \rightarrow 2 & & 1 \leftarrow 2 & & 1 \rightarrow 2 & & 1 \leftarrow 2 & & 1 \rightarrow 2 & & 1 \leftarrow 2 & & 1 \rightarrow 2 \\ x_1(t) : & x_1 & & x_1 & & \frac{1+x_2}{x_1} & & \frac{1+x_2}{x_1} & & \frac{1+x_1}{x_2} & & \frac{1+x_1}{x_2} & & x_2 & & x_2 \\ x_2(t) : & \frac{1+x_1}{x_2} & & x_2 & & x_2 & & \frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2} & & \frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2} & & x_1 & & x_1 & & \frac{1+x_2}{x_1} \end{array}$$

Las expresiones de $x_1(3)$ y $x_2(4)$ son sorprendentes como involucran la división por $\frac{1+x_2}{x_1}$ y $\frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2}$. Aquí los cálculos:

$$\begin{aligned} x_1(3) &= \frac{x_2(2)+1}{x_1(2)} = \frac{\frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2} + 1}{\frac{1+x_2}{x_1}} = \frac{\left(\frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2} + 1\right)x_1}{1+x_2} = \frac{x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1}{(1+x_2)x_2} = \frac{1+x_1}{x_2} \\ x_2(4) &= \frac{x_1(3)+1}{x_2(3)} = \frac{\frac{1+x_1}{x_2} + 1}{\frac{x_1+x_2+1}{x_1x_2}} = \frac{x_1+x_2+1}{x_2} \cdot \frac{x_1x_2}{x_1+x_2+1} = x_1 \end{aligned}$$

Recuerda el Ejemplo 1.4 del patrón de friso con dos filas no triviales con variables iniciales $x_1 = x_1(0)$ y $x_2 = x_2(0)$. Para las demás variables x_3, x_4, \dots calculamos expresiones en x_1, x_2 que aparecen en nuestro patrón de semillas:

$$x_3 = x_1(1), \quad x_4 = x_2(2), \quad x_5 = x_1(3), \quad x_6 = x_2(4) = x_1(0), \quad x_7 = x_1(5) = x_2(0).$$

Observa que tenemos $x_1(0) = x_1 = x_2(5)$ y $x_2(0) = x_2 = x_1(5)$. Además los carcajes $Q(0)$ y $Q(5)$ son iguales. Es decir, bajo una permutación de las etiquetas las semillas en $t = 0$ y $t = 5$ son iguales. Esta observación motiva la Definición 2.36 abajo. En particular, nuestro patrón de semillas tiene la misma 5-periodicidad que el patrón de friso.

Ejercicio 2.14. Calcula más mutaciones de las semillas en el Ejemplo 2.32 hasta que encuentras el primer $t < 0$ y el primer $t > 0$ con $Q(t) = Q(0)$ y $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0)$. Muestra que todas las variables de conglomerado ya aparecen en las semillas asociadas a los vértices $t \in [0, 4]$.

2.3.1. Álgebras de conglomerado

Finalmente podemos definir un álgebra de conglomerado.

Definición 2.33. Sea $\mathcal{P}_n = (\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{B}(t))_{t \in \mathbb{T}_n}$ un patrón de semillas y sea $\mathbf{X} = \bigcup_{t \in \mathbb{T}_n} \mathbf{x}(t)$ la colección de todos los conglomerados del patrón (sin las variables congeladas). El **álgebra de conglomerado** asociado al patrón de semillas es

$$\mathcal{A}_{\mathcal{P}_n} := \mathbb{C}[x_{n+1}, \dots, x_{n+m}][\mathbf{X}] \subset \mathcal{F},$$

la $\mathbb{C}[x_{n+1}, \dots, x_{n+m}]$ -subálgebra de \mathcal{F} generada de todas las variables de conglomerado $\mathbf{X} \subset \mathcal{F}$. Más precisamente \mathcal{A} es dicha subálgebra con un patrón de semillas fijadas en ella.

Proposición 2.34. Sea $\mathcal{P}_n = (\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{B}(t))_{t \in \mathbb{T}_n}$ un patrón de semillas y $0 \in \mathbb{T}_n$ un vértice. La definición del álgebra de conglomerado $\mathcal{A}_{\mathcal{P}_n}$ solo depende de la matriz $\tilde{B}(0)$.

Prueba. Sea $s_0 = (\tilde{\mathbf{x}}(0), \tilde{B}(0))$ la semilla inicial que determina el patrón \mathcal{P}_n como en el Lema 2.31. Entonces, $\mathcal{A}_{\mathcal{P}_n}$ solo depende de la semilla inicial. Para ver que realmente solo depende de la matriz inicial tomamos otra semilla $s = (\tilde{\mathbf{u}}(0), \tilde{B}(0))$ que tiene la misma matriz $\tilde{B}(0)$ que s_0 pero un conglomerado distinto. Sabemos que tal $\tilde{\mathbf{u}}(0) = (u_1, \dots, u_{n+m})$ como $\tilde{\mathbf{x}}(0) = (x_1, \dots, x_{n+m})$ son bases trascendentes del campo \mathcal{F} . En particular tenemos un automorfismo del campo

$$\varphi : \mathcal{F} = \mathbb{C}(x_1, \dots, x_{n+m}) \rightarrow \mathbb{C}(u_1, \dots, u_{n+m}) = \mathcal{F}, \quad x_i \mapsto u_i$$

que al mismo tiempo es un isomorfismo de \mathbb{C} -álgebras. Falta mostrar que φ manda el conjunto de variables de conglomerado \mathbf{X} al conjunto de variables de conglomerado $\mathbf{U} := \bigcup_{t \in \mathbb{T}_n} \mathbf{u}(t)$. Procedemos usando la misma inducción que en la prueba del Lema 2.31 sobre la longitud n_t del camino único en \mathbb{T}_n del vértice inicial 0 a un vértice t . \square

Dado la Proposición nota que $\mathbf{X} := \bigcup_{t \in \mathbb{T}_n} \mathbf{x}(t) = \bigcup_{s_0 \sim s_t} \mathbf{x}(t)$ para cualquier semilla inicial s_0 del patrón de semillas en \mathbb{T}_n .

Ejercicio 2.15. Dada una semilla inicial $s_0 = (\tilde{\mathbf{x}}(0), \tilde{B}(0))$ definimos el conjunto $\tilde{\mathbf{X}} := \bigcup_{s_t \sim s_0} \tilde{\mathbf{x}}(t)$ donde $s_t = (\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{B}(t))$ es cualquier semilla que se obtiene de s_0 de una secuencia finita de mutaciones. Sea \mathcal{P}_n el patrón de semillas dado por s_0 . Entonces,

$$\mathcal{A}_{\mathcal{P}_n} = \mathbb{C}[\tilde{\mathbf{X}}] \subset \mathcal{F}.$$

Las álgebras de conglomerado de la Definición 2.33 más precisamente se llaman **álgebras de conglomerado de tipo geométrico sobre** $\mathbb{C}[x_{n+1}, \dots, x_{n+m}]$. En el capítulo sobre semi-campos y dualidad vamos a ver generalizaciones que explican el uso de la palabra **geométrico**. Podemos cambiar el anillo $\mathbb{C}[x_{n+1}, \dots, x_{n+m}]$ de varias maneras: podemos cambiar el campo \mathbb{C} por \mathbb{R}, \mathbb{Q} o hasta \mathbb{Z} ; también podemos usar polinomios de Laurent $\mathbb{C}[x_{n+1}^{\pm 1}, \dots, x_{n+m}^{\pm 1}]$ que hacen que nuestras variables congeladas sean **unidades** en \mathcal{F} lo cual puede ser una propiedad deseada.

Ejemplo 2.35. Continuamos con el Ejemplo 2.32. Bajo las observaciones que se prueban en el Ejercicio 2.14 sabemos que

$$\mathbf{X} = \left\{ x_1, x_2, \frac{1+x_2}{x_1}, \frac{1+x_1}{x_2}, \frac{x_1+x_2+1}{x_1 x_2} \right\}.$$

Entonces el álgebra de conglomerado asociado a este patrón de semillas es

$$\mathcal{A} = \mathbb{C} \left[x_1, x_2, \frac{1+x_2}{x_1}, \frac{1+x_1}{x_2}, \frac{x_1+x_2+1}{x_1 x_2} \right] \subset \mathbb{C}(x_1, x_2).$$

En particular, vemos que $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}]$. Esta observación es un primer ejemplo de lo que se llama el **fenómeno de Laurent** lo cual vamos a probar en el siguiente capítulo.

El ejemplo muestra que para calcular el conjunto \mathbf{X} de todas las variables de conglomerado no necesariamente tenemos que considerar todos los vértices del árbol n -regular. En general, \mathbf{X} va a ser un conjunto infinito (excepto los casos que vamos a estudiar en la clasificación de las álgebras de conglomerado de **tipo finito**). Pero si \mathbf{X} es un conjunto infinito eso no necesariamente implica que el álgebra de conglomerado no es finitamente generada. Vamos a ver un ejemplo en el capítulo sobre las Grassmannianas.

Definición 2.36. Una semilla **no etiquetada** es una clase de equivalencia de semillas etiquetadas $\{(\tilde{\mathbf{x}}^p, \tilde{B}^p)_p\}_{p \in P}$ que satisface lo siguiente: para cada $p, q \in P$ existen dos permutaciones $\pi_1 \in S_n$ y $\pi_2 \in S_m$ tal que

1. $\pi_1(x_i^p) = x_i^q$ para todos $i \in [n]$;
2. $\pi_2(x_{n+j}^p) = x_{n+j}^q$ para todos $j \in [m]$;
3. $(\pi_1, \pi_2)\tilde{B}^p\pi_1 = \tilde{B}^q$ (como en el Lema 2.20).

Si $(\tilde{\mathbf{x}}^p, \tilde{B}^p)$ y $(\tilde{\mathbf{x}}^q, \tilde{B}^q)$ son dos semillas etiquetadas en la misma clase de equivalencia escribimos $(\tilde{\mathbf{x}}^p, \tilde{B}^p) \equiv (\tilde{\mathbf{x}}^q, \tilde{B}^q)$.

Nota que para la definición del álgebra de conglomerado es suficiente trabajar con semillas no etiquetadas. Las nociones de semillas no etiquetadas nos da una relación de equivalencia en el árbol n -regular:

Definición 2.37. Sea $\{(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{B}(t))\}_{t \in \mathbb{T}_n}$ un patrón de semillas. Definimos la relación de equivalencia en los vértices de \mathbb{T}_n :

$$t \equiv t' \quad \text{si y solo si} \quad (\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{B}(t)) \equiv (\tilde{\mathbf{x}}(t'), \tilde{B}(t'))$$

La gráfica inducida de \mathbb{T}_n cuyos vértices son las clases de equivalencia $[t]$ y cuyas aristas corresponden a la mutación se llama la **gráfica de intercambio** del patrón de semillas (o del álgebra de conglomerado).

2.3.2. Ejercicios

Ejercicio 2.16. Definimos una relación de equivalencia alternativa en el árbol n -regular. Sea $\{(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{B}(t))\}_{t \in \mathbb{T}_n}$ un patrón de semillas. Definimos

$$t = t' \quad \text{si y solo si} \quad (\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{B}(t)) = (\tilde{\mathbf{x}}(t'), \tilde{B}(t')). \quad (2.10)$$

Es decir, dos vértices $t, t' \in \mathbb{T}_n$ están en la misma clase de equivalencia si y solo si las semillas etiquetadas asociadas son **iguales**. Llamamos a la gráfica cuyos vértices representen las clases de equivalencia de "=" la **gráfica de intercambio etiquetada**.

1. ¿Cuál es la gráfica de intercambio para el carcaj $1 \rightarrow 2$ y cuál es su gráfica de intercambio etiquetada?
2. Sea $Q = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$. Calcula la gráfica de intercambio asociada. ¿Te parece conocida?
3. ¿Cómo cambia la gráfica de intercambio en 2. si consideras semillas etiquetadas? Por ejemplo, ¿qué pasa con las caras que tienen 5 vértices?

2.4. Ejemplos de rango 2

Definición 2.38. El **rango** de un álgebra de conglomerado es el número de variables mutables (que coincide con el número de columnas en la matriz de intercambio o el número de vértices mutables en un carcaj).

En el Ejemplo 2.23 vimos que sin perder de generalidad podemos suponer que una 2×2 -matriz casi-simetrizable tiene la forma

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

para $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. El caso $a = b$ corresponde a un carcaj con a flechas del vértice 1 a 2.

Ejercicio 2.17. Si $a = b = 0$, ¿qué es el patrón de semillas que uno obtiene de B ?

Ejemplo 2.39. El caso $a = b = 1$ corresponde al carcaj $Q = 1 \rightarrow 2$. Su patrón de semillas vimos en el Ejemplo 2.32. Pero ¿qué pasa si agregamos vértices congelados? Con un vértice congelado la matriz de intercambio extendido tiene la siguiente forma

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$$

donde $p_i \in \mathbb{Z}$ indica cuantas flechas hay entre del vértice congelado al vértice mutable $i \in [2]$. Supongamos que p_1, p_2 sean positivos y calculamos:

$$\begin{array}{l} \dots 0 \quad \xrightarrow{1} \quad 1 \quad \xrightarrow{2} \quad 2 \quad \xrightarrow{1} \quad 3 \quad \xrightarrow{2} \quad 4 \quad \xrightarrow{1} \quad 5 \dots \\ \tilde{B}(t) : \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -p_1 & p_1+p_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ p_2 & -p_1-p_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -p_2 & -p_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -p_2 & p_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ p_2 & p_1 \end{pmatrix} \\ Q(t) : \quad \begin{array}{c} \boxed{3} \\ p_1 \swarrow \quad \searrow p_2 \\ 1 \longrightarrow 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \boxed{3} \\ p_1 \swarrow \quad \searrow p_1+p_2 \\ 1 \longleftarrow 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \boxed{3} \\ p_2 \swarrow \quad \searrow p_1+p_2 \\ 1 \longrightarrow 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \boxed{3} \\ p_2 \swarrow \quad \searrow p_1 \\ 1 \longleftarrow 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \boxed{3} \\ p_2 \swarrow \quad \searrow p_1 \\ 1 \longrightarrow 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \boxed{3} \\ p_2 \swarrow \quad \searrow p_1 \\ 1 \longleftarrow 2 \end{array} \end{array}$$

Las matrices $\tilde{B}(0)$ y $\tilde{B}(5)$ son iguales bajo una permutación como en el Lema 2.21. En particular, la mutación de matrices admite la misma 5-periodicidad como en el caso sin vértices congelados. Además nota que en los carcajes $Q(0), \dots, Q(4)$ aparecen todas las combinaciones posibles para los signos de p_1, p_2 . Es decir, si empezamos con p_1, p_2 que no son positivos la mutación sigue 5-periódica.

La variable congelada, la llamamos y , tiene un impacto en las expresiones de $x_1(t), x_2(t)$ para $t \neq 0$:

$$x_1(1) = \frac{y^{p_1} + x_2}{x_1}, \quad x_2(2) = \frac{y^{p_1} + x_2 + x_1 y^{p_1+p_2}}{x_1 x_2}, \quad x_1(3) = \frac{1 + x_1 y^{p_2}}{x_2}, \quad x_2(4) = x_1, \quad x_1(5) = x_2.$$

¡También el patrón de semillas tiene la misma 5-periodicidad! Solo hay 5 semillas no-etiquetadas distintos.

Ejemplo 2.40. El siguiente caso donde B representa un carcaj es $a = b = 2$. El carcaj asociado se llama el **carcaj de Kronecker**:

$$1 \rightrightarrows 2$$

Para simplificar la notación vamos a escribir $x_1(0) = x_1, x_2(0) = x_2$ y para j impar $x_1(j) = x_{j+1}$ o para j par $x_2(j) = x_{j+2}$. Es decir, $x_1(1) = x_3, x_2(2) = x_4, x_1(3) = x_5, \dots$. Con el programa `MutationApp` definimos el carcaj y activamos el cálculo de los variables de conglomerado (`Cluster` \rightarrow `Activate` \rightarrow `X-variables`). Luego empezamos con la mutación en la dirección 1. El programa nos dice

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1 + x_2^2}{x_1}, \quad x_4 = \frac{1 + x_1^2 + 2x_2^2 + x_2^4}{x_1^2 x_2}, \quad x_5 = \frac{1 + 2x_1^2 + x_1^4 + (3 + 2x_1^2)x_2^2 + 3x_2^4 + x_2^6}{x_1^3 x_2^2}, \\ x_6 &= \frac{1 + 3x_1^2 + 3x_1^4 + x_1^6 + (4 + 6x_1^2 + 2x_1^4)x_2^2 + (6 + 3x_1^2)x_2^4 + 4x_2^6 + x_2^8}{x_1^4 x_2^3}, \dots \end{aligned}$$

Las expresiones para las variables x_7, x_8, \dots ya son tan largas que no se pueden escribir en una sola fila, pero siguen polinomios de Laurent en x_1, x_2 . Observamos que hasta este momento el patrón de semillas no es periódico y veremos en la **clasificación del tipo finito** que realmente no lo es.

2.4.1. Ejercicios

Ejercicio 2.18. Continuamos con el caso que la matriz B definida en (2.11) no corresponde a ningún carcaj. Es decir, $a \neq b$. Seguimos con la notación como en el Ejemplo 2.40. Las variables de conglomerado satisfacen la relación de intercambio

$$x_{k-1}x_{k+1} = \begin{cases} x_k^a + 1 & \text{si } k \text{ es impar,} \\ x_k^b + 1 & \text{si } k \text{ es par.} \end{cases}$$

1. Sea $a = 1$ y $b = 2$. Calcula el patrón de semillas. ¿Es periódico?
2. Considera la matriz extendida de intercambio

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$$

para $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$ y repite el cálculo del patrón de semillas.

3. El fenómeno de Laurent

Observamos en los ejemplos que todas las variables de conglomerado se pueden expresar en las variables de la semilla inicial como un polinomio de Laurent. Esta observación es uno de los resultados más importantes sobre la estructura de las álgebras de conglomerado: se llama el **fenómeno de Laurent** y fue probado por Sergei Fomin y Andrei Zelevinsky en su primer artículo sobre las álgebras de conglomerado [FZ02]. En este capítulo vamos a ver la prueba.

Teorema 3.1 (El fenómeno de Laurent). En un álgebra de conglomerado (de tipo geométrico) cualquier variable de conglomerado se puede expresar como un polinomio de Laurent con coeficientes enteros en las variables de cualquier otra semilla extendida.

3.1. Preparación

Fijamos la siguiente notación:

1. $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,
2. $0 \in \mathbb{T}_n$ es un vértice arbitrario,
3. $(\tilde{\mathbf{x}}(0), \tilde{B}(0))$ es la semilla inicial,
4. $\tilde{B}(0) \in \mathbb{Z}^{(n+m) \times n}$ es la matriz de intercambio extendida inicial,
5. $\tilde{\mathbf{x}}(0) = (x_1, \dots, x_{n+m})$ es el conglomerado extendido inicial,
6. $\mathcal{A}(\tilde{B}(0))$ es el álgebra de conglomerado asociado.

Lema 3.2. Sea $I \subset \{n+1, \dots, n+m\}$ un subconjunto de las direcciones congeladas y $\tilde{B}(0)'$ la matriz que se obtiene de $\tilde{B}(0)$ borrando las filas que corresponden a I . Sea $x = \frac{f(x_1, \dots, x_{n+m})}{g(x_1, \dots, x_{n+m})}$ es la expresión de una variable de conglomerado $x \in \mathcal{A}(\tilde{B}(0))$. Entonces la variable de conglomerado correspondiente en $\mathcal{A}(\tilde{B}'(0))$ es

$$x' := \frac{f(x_1, \dots, x_{n+m})}{g(x_1, \dots, x_{n+m})} \Big|_{x_i=1, \forall i \in I}.$$

Antes de probar el Lema lo verificamos en un ejemplo sencillo.

Ejemplo 3.3. Sea $\tilde{B}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $\tilde{\mathbf{x}}(0) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Sea $I = \{4\}$ y $x = \mu_1(x_1) = \frac{x_2 x_4^2 + x_3}{x_1}$ en $\mathcal{A}(\tilde{B}(0))$. La matriz $\tilde{B}'(0)$ es $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y la variable correspondiente en $\mathcal{A}(\tilde{B}'(0))$ es $x' := \mu_1(x_1) = \frac{x_2 + x_3}{x_1} = \frac{x_2 x_4^2 + x_3}{x_1} \Big|_{x_4=1}$.

Prueba del Lema 3.2. Sea $t \in \mathbb{T}_n$ un vértice tal que la semilla $(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{B}(t))$ contiene la variable x . Consideramos el único camino de 0 a t en \mathbb{T}_n . Sean $0 = t_0, t_1, t_2, \dots, t_{d-1}, t_d = t$ los vértices en ello y $k_1, k_2, \dots, k_{d-1}, k_d$ las etiquetas de las aristas donde $k_i \neq k_{i+1}$ para todas las $i \in [d-1]$. Es decir, el camino tiene la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & t_2 & & & t \\ & & & / \quad \backslash & & & / \\ 0 & \searrow^{k_1} & t_1 & & t_3 & \cdots & t_{d-1} \\ & & & \backslash \quad / & & & \backslash \\ & & & t_2 & & & t \end{array} \quad (3.1)$$

Observa que d es el número de aristas en el camino. Procedemos por inducción sobre d , la distancia entre 0 y t .

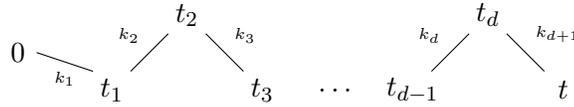
$d = 1$ En este caso $x = \mu_{k_1}(x_i)$ para alguna $i \in [n]$. Si $i \neq k_1$ tenemos $x = x_i$ y no hay nada que mostrar. Entonces, supongamos que $i = k_1$ y calculamos

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{x_i} \left(\prod_{\substack{b_{ji} > 0 \\ \text{en } \tilde{B}(0)}} x_j^{b_{ji}} + \prod_{\substack{b_{ji} < 0 \\ \text{en } \tilde{B}(0)}} x_j^{-b_{ji}} \right) \\ &= \frac{1}{x_i} \left(\prod_{\substack{b_{ji} > 0 \\ \text{en } \tilde{B}(0) \\ j \notin I}} x_j^{b_{ji}} \prod_{\substack{b_{ji} > 0 \\ \text{en } \tilde{B}(0) \\ j \in I}} x_j^{b_{ji}} + \prod_{\substack{b_{ji} < 0 \\ \text{en } \tilde{B}(0) \\ j \notin I}} x_j^{-b_{ji}} \prod_{\substack{b_{ji} < 0 \\ \text{en } \tilde{B}(0) \\ j \in I}} x_j^{-b_{ji}} \right) =: \frac{f(x_1, \dots, x_{n+m})}{x_i} \end{aligned}$$

En el álgebra $\mathcal{A}(\tilde{B}'(0))$ tenemos la variable correspondiente $x' = \mu_{k_1}(x_i) =: x''_i$:

$$\begin{aligned} x''_i &= \frac{1}{x_i} \left(\prod_{b_{ji}>0 \text{ en } \tilde{B}'(0)} x_j^{b_{ji}} + \prod_{b_{ji}<0 \text{ en } \tilde{B}'(0)} x_j^{-b_{ji}} \right) \\ &= \frac{1}{x_i} \left(\prod_{\substack{b_{ji}>0 \text{ en } \tilde{B}(0) \\ j \notin I}} x_j^{b_{ji}} + \prod_{\substack{b_{ji}<0 \text{ en } \tilde{B}(0) \\ j \notin I}} x_j^{-b_{ji}} \right) = \frac{f(x_1, \dots, x_{n+m})}{x_i} \Big|_{x_j=1, \forall j \in I} \end{aligned}$$

$d \mapsto d+1$ Supongamos que el Lema es verdadero para cada vértice $t' \in \mathbb{T}_n$ cuyo distancia a 0 es d . Sea $t \in \mathbb{T}_n$ un vértice a distancia $d+1$ de 0:



Ejercicio 3.1. Sean $x_{1;d}, \dots, x_{n;d}$ las variables de conglomerado de la semilla $(\tilde{\mathbf{x}}(t_d), \tilde{B}(t_d))$ en $\mathcal{A}(\tilde{B}(0))$ y $x'_{1;d}, \dots, x'_{n;d}$ las variables de conglomerado correspondientes en $\mathcal{A}(\tilde{B}'(0))$. Por inducción tenemos expresiones

$$x_{i;d} = \frac{f_{i;d}(x_1, \dots, x_{n+m})}{g_{i;d}(x_1, \dots, x_{n+m})}, \quad \text{tal que} \quad x'_{i;d} = \frac{f_{i;d}(x_1, \dots, x_{n+m})}{g_{i;d}(x_1, \dots, x_{n+m})} \Big|_{x_j=1, \forall j \in I} \quad (3.2)$$

Para nuestra variable x entonces tenemos $x = \mu_{k_{d+1}}(x_{i;d})$ para algún $i \in [n]$. Si $i \neq k_{d+1}$ no hay nada que probar. Prueba que en el caso $i = k_{d+1}$ el Lema es verdadero usando (3.2) y la misma idea que en la base de la inducción. □

El Lema 3.2 nos da el siguiente Corolario útil (con la notación como en el Lema):

Corolario 3.4. Si el álgebra de conglomerado $\mathcal{A}(\tilde{B}(0))$ satisface el fenómeno de Laurent, entonces también el álgebra de conglomerado $\mathcal{A}(\tilde{B}'(0))$ lo satisface.

Ejercicio 3.2. Prueba el Corolario.

Antes de seguir con la prueba del fenómeno de Laurent recordamos algunos hechos sobre funciones racionales. Sean $f, g, f', g' \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_{n+m}]$ entonces en $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_{n+m})$ tenemos

$$\frac{f}{g} = \frac{f'}{g'} \quad \text{si y solo si} \quad fg' = f'g \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_{n+m}]$$

Si escribimos f, g como productos de polinomios irreducibles podemos reducir en cuociente $\frac{f}{g}$ cancelando factores que aparecen en el numerador y el denominador. Sea \tilde{f} la expresión reducida que se obtiene y igualmente sea \tilde{f}' la expresión que se obtiene para $\frac{f'}{g'}$. En particular, tenemos

$$\frac{f}{g} = \frac{f'}{g'} \quad \text{si y solo si} \quad \tilde{f} = u\tilde{f}' \text{ y } \tilde{g} = u\tilde{g}'$$

para una unidad $u \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_{n+m}]$. Vamos a usar las siguientes nociones para polinomios de Laurent:

Definición 3.5. Sean $f, g, h \in \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n+m}^{\pm 1}]$. Definimos

1. $f \sim g$ si y solo si existe un monomio de Laurent $x^a := x_1^{a_1} \cdots x_{n+m}^{a_{n+m}}$ con $a_i \in \mathbb{Z}$ tal que $f = x^a g$ (nota que monomios de Laurent son unidades en $\mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n+m}^{\pm 1}]$);
2. $f \equiv g \pmod{h}$ si y solo si $f - g = ph$ para algún $p \in \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n+m}^{\pm 1}]$.

3.2. Prueba del Teorema 3.1

Continuamos con la misma notación que en §3.1. Sea x una variable de conglomerado arbitraria en una semilla $(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{B}(t))$ para algún vértice $t \in \mathbb{T}_n$ y sea d la distancia entre 0 y t . Es decir, estamos en la misma situación como en (3.1). Procedemos con la inducción por d .

3.2.1. Base de la inducción

La base de inducción incluye los casos $d = 1, 2, 3$.

$d = 1$ Tenemos exactamente n vértices a distancia 1 de 0 los cuales corresponden a una mutación. Sea k_1 la dirección de la mutación entonces $\mu_{k_1}(x_i) = x_i$ para todas las $i \neq k_1$ y

$$\mu_k(x_{k_1}) = \frac{1}{x_{k_1}} \left(\prod_{b_{ik_1} > 0} x_i^{b_{ik_1}} + \prod_{b_{ik_1} < 0} x_i^{-b_{ik_1}} \right)$$

es un polinomio de Laurent en x_1, \dots, x_{n+m} con coeficientes enteros.

$d = 2$ Consideramos semillas de la forma $(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{B}(t)) = (\mu_{k_2} \circ \mu_{k_1})(\tilde{\mathbf{x}}(0), \tilde{B}(0))$. Si $k_1 = k_2$ aplica el Ejercicio 2.13 y tenemos $(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{B}(t)) = (\tilde{\mathbf{x}}(0), \tilde{B}(0))$. Entonces supongamos $k_1 \neq k_2$ y tenemos

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(0) \setminus \{x_{k_1}, x_{k_2}\} \cup \{x'_{k_1}, x'_{k_2}\}$$

donde $x'_{k_1} = \mu_{k_1}(x_{k_1})$ y $x'_{k_2} = \mu_{k_2}(\mu_{k_1}(x_{k_2}))$.

Ejercicio 3.3. Muestra que x'_{k_1} y x'_{k_2} son elementos de $\mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n+m}^{\pm 1}]$.

$d = 3$ Sean k_1, k_2, k_3 las etiquetas de las aristas en el camino de 0 a t . Si los k_i son distintos tenemos

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(0) \setminus \{x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}\} \cup \{x'_{k_1}, x'_{k_2}, x'_{k_3}\}$$

con $x'_{k_1} = \mu_{k_1}(x_{k_1})$, $x'_{k_2} = \mu_{k_2}(\mu_{k_1}(x_{k_2}))$ y $x'_{k_3} = \mu_{k_3}(\mu_{k_2}(\mu_{k_1}(x_{k_3})))$.

Ejercicio 3.4. Verifica que se reduce al argumento del caso $d = 2$.

Si k_1, k_2, k_3 no son distintos, solo el caso $k_1 = k_3$ es de interés, pues si $k_1 = k_2$ o $k_2 = k_3$ se reduce al caso $d = 1$. Nota que sin perder de generalidad podemos suponer $k_1 < k_2$. Tenemos

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(0) \setminus \{x_{k_1}, x_{k_2}\} \cup \{x'_{k_1}, x''_{k_2}\}$$

con $x'_{k_1} = \mu_{k_1}(x_{k_1})$, $x'_{k_2} = \mu_{k_2}(\mu_{k_1}(x_{k_2}))$ y $x''_{k_2} = \mu_{k_2}(\mu_{k_1}(x'_{k_2}))$. Observa que $\mu_{k_1}(x'_{k_2}) = x'_{k_2}$ y esta variable se encuentra en una semilla de distancia $d = 2$ de 0. Entonces, $x'_{k_2} \in \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n+m}^{\pm 1}]$. Falta verificar que $x''_{k_2} \in \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n+m}^{\pm 1}]$. Sean $\tilde{B}(0) =$

$(b_{ij}^\circ)_{ij}, \tilde{B}(t_1) = \mu_{k_1}(\tilde{B}(0)) = (b_{ij})$ y $\tilde{B}(t_2) = \mu_{k_2}(\tilde{B}(t_1)) = (b'_{ij})$ las matrices de intercambio extendidas relevantes.

En general hay dos casos: $b_{k_1 k_2}^\circ = 0 = b_{k_2 k_1}^\circ$ o $b_{k_1 k_2}^\circ b_{k_2 k_1}^\circ < 0$. Observa que en el primer caso $\mu_{k_1} \circ \mu_{k_2} = \mu_{k_2} \circ \mu_{k_1}$ y se reduce al caso $d = 1$. Entonces nos enfocamos en el caso $b_{k_1 k_2}^\circ b_{k_2 k_1}^\circ < 0$. Gracias al siguiente ejercicio podemos suponer sin perder de generalidad que $b_{k_1 k_2}^\circ < 0$ y $b_{k_2 k_1}^\circ > 0$:

Ejercicio 3.5. Muestra que las variables de conglomerado de $\mathcal{A}(\tilde{B}(0))$ y de $\mathcal{A}(-\tilde{B}(0))$ son iguales.

Para cada índice mutable $j \in [n]$ definimos

$$P_j := \prod_{i=1}^{n+m} x_i^{b_{ij}^\circ} + 1 \in \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n+m}^{\pm 1}].$$

Recuerda la equivalencia \sim para en $\mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n+m}^{\pm 1}]$ de la Definición 3.5. Calculamos:

$$x'_{k_1} = \frac{1}{x_{k_1}} \left(\prod_{b_{ik_1}^\circ > 0} x_i^{b_{ik_1}^\circ} + \prod_{b_{ik_1}^\circ < 0} x_i^{-b_{ik_1}^\circ} \right) = \frac{P_{k_1}}{x_{k_1}} \prod_{b_{ik_1}^\circ < 0} x_i^{b_{ik_1}^\circ} \sim \frac{P_{k_1}}{x_{k_1}} \sim P_{k_1}. \quad (3.3)$$

Observamos: si $b_{k_1 k_2}^\circ < 0$ entonces $b_{k_1 k_2} < 0$ y $b'_{k_1 k_2} > 0$ que implica $b'_{k_2 k_1} < 0$. De la misma manera como en (3.3) podemos concluir:

$$x''_{k_1} \sim \frac{1}{x'_{k_1}} \left((x'_{k_2})^{b'_{k_2 k_1}} \prod_{b'_{ik_1} < 0, i \neq k_2} x_i^{-b'_{ik_1}} + 1 \right) \quad (3.4)$$

Ahora para concluir que $x''_{k_1} \in \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n+m}^{\pm 1}]$ es suficiente verificar que es divisible por x'_{k_1} . Lo cual se traduce a verificar que

$$(x'_{k_2})^{b'_{k_2 k_1}} \prod_{b'_{ik_1} < 0, i \neq k_2} x_i^{-b'_{ik_1}} + 1 \equiv 0 \pmod{P_{k_1}}. \quad (3.5)$$

Para x'_{k_2} obtenemos lo siguiente usando la relación de intercambio y $b_{k_1 k_2} < 0$:

$$x'_{k_2} - \frac{1}{x_{k_2}} \prod_{b_{ik_2} > 0} x_i^{b_{ik_2}} = \frac{1}{x_{k_2}} x'_{k_1}^{-b_{k_1 k_2}} \prod_{b_{ik_2} < 0, i \neq j} x_i^{-b_{ik_2}} \stackrel{(3.3)}{\sim} P_{k_1}^{-b_{k_1 k_2}} \equiv 0 \pmod{P_{k_1}}. \quad (3.6)$$

Y lo podemos usar para verificar (3.5). Calculamos $\pmod{P_{k_1}}$:

$$\begin{aligned} (x'_{k_2})^{b'_{k_2 k_1}} \prod_{b'_{ik_1} < 0, i \neq k_2} x_i^{-b'_{ik_1}} + 1 &\stackrel{(3.6)}{\equiv} \left(\frac{1}{x_{k_2}} \prod_{b_{ik_2} > 0} x_i^{b_{ik_2}} \right)^{b'_{k_2 k_1}} \prod_{b'_{ik_1} < 0, i \neq k_2} x_i^{-b'_{ik_1}} + 1 \\ &= \frac{b_{k_2 k_1}}{x_{k_2}^{b_{k_2 k_1}}} \prod_{b_{ik_2} > 0} x_i^{b_{ik_2} b_{k_2 k_1}} \prod_{b'_{ik_1} < 0, i \neq k_2} x_i^{-b'_{ik_1}} + 1 =: (*) \end{aligned}$$

Recuerda la mutación de matrices: $b_{k_2 k_1} > 0$ implica que $b'_{ik_1} = \begin{cases} b_{ik_1} + b_{ik_2} b_{k_2 k_1} & \text{si } b_{ik_2} > 0 \\ b_{ik_1} & \text{si } b_{ik_2} \leq 0 \text{ o } i=k_2 \end{cases}$.
Entonces, continuamos

$$(*) = \prod_i x_i^{b_{ik_1}} + 1 = P_{k_1} \equiv 0$$

y eso es justo lo que queríamos mostrar. En particular, probamos el fenómeno de Laurent para $d = 3$.

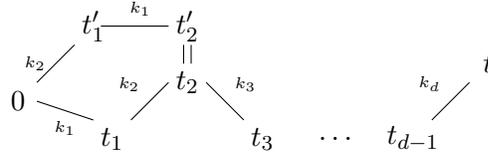
3.2.2. Paso de la inducción

Sea t a distancia d de 0 como en (3.1). La hipótesis de la inducción es la siguiente:

Hipótesis: Cualquier variable de conglomerado $x \in \mathcal{A}(\tilde{B}(0))$ en una semilla que corresponde a $t \in \mathbb{T}_n$ es un polinomio de Laurent con coeficientes enteros en las variables de cualquier otra semilla que corresponde a $t_0 \in \mathbb{T}_n$ que tiene distancia $\leq d - 1$ a t .

Sean k_1 y k_2 las primeras dos etiquetas en el camino de 0 hacia t . Distinguiamos dos casos: $b_{k_1 k_2} = b_{k_2 k_1} = 0$ ó $b_{k_1 k_2} b_{k_2 k_1} < 0$.

Caso 1. Sea $b_{k_1 k_2} = b_{k_2 k_1} = 0$. Entonces $\mu_{k_2} \circ \mu_{k_1} = \mu_{k_1} \circ \mu_{k_2}$ y las semillas $(\tilde{\mathbf{x}}(t_2), \tilde{B}(t_2)) = \mu_{k_2} \circ \mu_{k_1}(\tilde{\mathbf{x}}(0), \tilde{B}(0))$ y $\mu_{k_1} \circ \mu_{k_2}(\tilde{\mathbf{x}}(0), \tilde{B}(0))$ son idénticas. Sea $t'_1, t'_2 \in \mathbb{T}_n$ tal que



donde $t_2 = t'_2$ bajo la relación de equivalencia (2.10). Nota que t_1 y t'_1 están a distancia $d - 1$ de t . Entonces, por la hipótesis de la inducción x es un polinomio de Laurent en las variables $\tilde{\mathbf{x}}(t_1)$ y $\tilde{\mathbf{x}}(t'_1)$. Sea $\tilde{\mathbf{x}}(t_1) = (x_1, \dots, x'_{k_1}, \dots, x_{n+m})$ y $\tilde{\mathbf{x}}(t'_1) = (x_1, \dots, x'_{k_2}, \dots, x_{n+m})$ con $x'_{k_1} = \mu_{k_1}(x_{k_1}) = \frac{M_1 + M_2}{x_{k_1}}$ y $x'_{k_2} = \mu_{k_2}(x_{k_2}) = \frac{M'_1 + M'_2}{x_{k_2}}$ donde M_1, M_2 son monomios en las x_i con $i \neq k_2$ y M'_1, M'_2 son monomios en las x_i con $i \neq k_1$. Tenemos las dos expresiones para x :

$$x = \frac{f(x_1, \dots, x'_{k_1}, \dots, x_{n+m})}{g(x_1, \dots, x'_{k_1}, \dots, x_{n+m})} \quad \text{y} \quad x = \frac{f'(x_1, \dots, x'_{k_2}, \dots, x_{n+m})}{g'(x_1, \dots, x'_{k_2}, \dots, x_{n+m})}$$

donde f, f' son polinomios con coeficientes enteros y g, g' son monomios. Substituimos las expresiones de x'_{k_1}, x'_{k_2} :

$$x = \frac{f_0(x_1, \dots, x_{n+m})}{(M_1 + M_2)^a g_0(x_1, \dots, x_{n+m})} \quad \text{y} \quad x = \frac{f'_0(x_1, \dots, x_{n+m})}{(M'_1 + M'_2)^{a'} g'_0(x_1, \dots, x_{n+m})} \quad (3.7)$$

donde f_0, f'_0 son polinomios con coeficientes enteros en x_1, \dots, x_{n+m} , g_0, g'_0 son monomios y $a, a' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Observamos que las reducciones de las dos expresiones necesariamente son idénticas. Si $x = \frac{e(x_1, \dots, x_{n+m})}{d(x_1, \dots, x_{n+m})}$ es la reducción, entonces cada factor irreducible de d divide los denominadores en (3.7). Nota que los denominadores en (3.7) ya están escritos como productos de sus factores irreducibles, pues ni M_1, M_2 ni M'_1, M'_2 tienen variables en

común. Si logramos mostrar que $M_1 + M_2$ y $M'_1 + M'_2$ son coprimos, entonces ninguno de los dos puede ser factor irreducible de d . En particular, en este caso d es un monomio y la reducción tiene la forma deseada.

Ejercicio 3.6. Prueba que los binomios $M_1 + M_2$ y $M'_1 + M'_2$ son coprimos (es decir, no tienen factores irreducibles en común) para terminar la prueba del Caso 1. **Tip:** Recuerda el Lema 3.2.

Caso 2. Sea $b_{k_1 k_2}^\circ b_{k_2 k_1}^\circ < 0$. En este caso μ_{k_1} y μ_{k_2} no conmutan. Continuamos con la misma notación que en la base de la inducción con $d = 3$. Recuerda que sin perder de generalidad tenemos $b_{k_1 k_2}^\circ < 0$ y $b_{k_2 k_1}^\circ > 0$. Igualmente vamos a suponer que $k_1 = k_3$, pues en otro caso se reduce a la situación de $d - 1$ y usando la hipótesis de inducción no hay nada que mostrar (ver el argumento en el caso $d = 3$).

Ejercicio 3.7. Muestra que la variable x'_{k_1} es coprimo a las variables x'_{k_2} y x''_{k_1} (es decir, como polinomios de Laurent en x_1, \dots, x_{n+m} no tienen factores en común). *Tip:* Podemos suponer que existen dos filas con índices p_1 y p_2 en $\tilde{B}(0)$ tal que $b_{p_1 i}^\circ = \delta_{ik_1}$ y $b_{p_2 i}^\circ = \delta_{ik_2}$ (Corolario 3.4).

1. Calcula las expresiones de $x'_{k_1}, x'_{k_2}, x''_{k_1}$.
2. Muestra que x'_{k_1} y x'_{k_2} son irreducibles.
3. Verifica que x''_{k_1} evaluado en $x_{p_2} = 0$ es coprimo a x'_{k_1} evaluado en $x_{p_2} = 0$.

Con eso podemos terminar la prueba: alargamos la matriz $\tilde{B}(0)$ con dos filas que corresponden a las dos variables congeladas x_{n+m+1} y x_{n+m+2} . Sean

$$b_{n+m+1, i}^\circ = \begin{cases} 1 & i = k_1 \\ 0 & i \neq k_1 \end{cases} \quad \text{y} \quad b_{n+m+2, i}^\circ = \begin{cases} 1 & i = k_2 \\ 0 & i \neq k_2 \end{cases}.$$

Por la hipótesis tenemos expresiones para la variable x en $\tilde{\mathbf{x}}(t_1)$ y $\tilde{\mathbf{x}}(t_3)$. Las únicas variables de esos conglomerados que no aparecen en $\tilde{\mathbf{x}}(0)$ son x'_{k_1}, x'_{k_2} y x''_{k_1} . Sean

$$x = \frac{f_1(x_1, \dots, x_{n+m})}{(x'_{k_1})^a} = \frac{f_3(x_1, \dots, x_{n+m})}{(x'_{k_2})^b (x''_{k_1})^c}.$$

las expresiones de x en $\tilde{\mathbf{x}}(t_1)$ y $\tilde{\mathbf{x}}(t_3)$, es decir $f_1, f_3 \in \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n+m}^{\pm 1}]$. Ya vimos en el caso $d = 3$ de la base de la inducción que $x'_{k_1}, x'_{k_2}, x''_{k_1} \in \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n+m}^{\pm 1}]$. Además, gracias a la afirmación sabemos que x'_{k_1} es coprimo a x'_{k_2} y x''_{k_1} . Pues con la misma idea que en el Ejercicio 3.6 concluimos $a = b = c = 0$.

3.3. Comentarios

Si nos fijamos otra vez en todos los ejemplos que hemos visto de patrones de semillas (Ejemplo 2.32, Ejemplo 2.39, Ejemplo 2.40 y el Ejercicios 2.18) uno se puede dar cuenta que las expresiones de las variables de conglomerado en una semilla inicial no solo son polinomios de Laurent con coeficientes en \mathbb{Z} , pero más bien con coeficientes en $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Esta observación fue formulada por Fomin y Zelevinsky como la **conjetura de la positividad** en su cuarto artículo [FZ07]:

Conjetura 3.1 (Conjetura de la Positividad). En un álgebra de conglomerado (de tipo geométrico) cualquier variable de conglomerado se puede expresar como un polinomio de Laurent con coeficientes enteros positivos en las variables de cualquier otra semilla extendida.

Desde el año 2001 muchos matemáticos han intentado probar la conjetura con métodos de la teoría de representaciones y la teoría de categorías, pero ninguno de esos intentos resolvió el problema. En el año 2012 los ocho matemáticos francés C. Amiot, B. Bertrand, E. Brugallé, V. Fock, I. Itenberg, B. Keller, B. Leclerc, J.-J. Risler, V. Kharlamov. del área decidieron organizar una escuela de verano en Paris con el tema geometría tropical y álgebras de conglomerado. Entre los seis exponentes de mini-cursos hubo Fomin, Mark Gross (trabajando en geometría tropical y biracional) y Maxim Kontsevich (medallista Fields trabajando en física teórica como la simetría especular).

En esas semanas Kontsevich vio por primera vez la definición de un álgebra de conglomerado y los chistes dice que al final de las dos semanas el entendió como se puede probar la conjetura de la positividad. El resultado es lo siguiente:

Teorema 3.6 (Positividad del fenómeno de Laurent). Cada variable de un álgebra de conglomerado (de tipo geométrico) es un polinomio de Laurent en las variables de cualquier semilla con coeficientes enteros positivos.

Sus métodos siguen la teoría de Fock y Goncharov que usan la estructura de conglomerado para definir espacios. El álgebra de conglomerado en este contexto es un álgebra de funciones en la variedad de conglomerado. Resulta que las variedades de conglomerado son variedades **log Calabi–Yau** (es decir tienen una forma de volumen que no se anula en ninguna parte) lo cual da acceso a la maquinaria de la simetría especular que usan para probar el teorema.

3.3.1. \mathcal{A} -Variedades de conglomerado

Revisamos brevemente la definición de una variedad de conglomerado.

Definición 3.7. Los **datos fijos** Γ se refieren a la siguiente información

1. una latiz N con una forma casi-simétrica

$$\{\cdot, \cdot\} : N \times N \rightarrow \mathbb{Q};$$

2. una sublatiz **mutable** $N_{\text{mut}} \subset N$ que es saturada (es decir, para cada $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ y $n \in N$: $kn \in N_{\text{mut}} \Rightarrow n \in N_{\text{mut}}$);
3. un conjunto de índices I cuyo cardinalidad es el rango de N y un subconjunto I_{mut} cuyo cardinalidad es el rango de N_{mut} ;
4. enteros positivos d_i para $i \in I$ con mínimo múltiple en común 1;
5. una sublatiz $N^\circ \subset N$ de índice finito tal que $\{N_{\text{mut}}, N^\circ\} \subset \mathbb{Z}$ y $\{N, N_{\text{mut}} \cap N^\circ\} \subset \mathbb{Z}$;
6. definimos las latices duales $M := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ y $M^\circ := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$

Dado los datos fijos Γ definimos los **datos de una semilla** como una tupla $s = (e_i : i \in I)$ tal que $\{e_i : i \in I\}$ es una base de N , $\{e_i : i \in I_{\text{mut}}\}$ es una base de N_{mut} , y $\{d_i e_i : i \in I\}$ es una base de N° .

Los datos fijos juntos con los datos de una semilla es información equivalente a una semilla como la conocemos. Para entender la conexión definimos otra forma bilineal (no casi-simétrica):

$$[\cdot, \cdot]_s : N \times N \rightarrow \mathbb{Q} \quad \text{como} \quad [e_i, e_j]_s = \epsilon_{ij} := \{e_i, e_j\} d_j. \quad (3.8)$$

Nota que $\{e_i, e_j\} d_j = \{e_i, d_j e_j\} \in \mathbb{Z}$ si $e_i \in N_{\text{mut}}$ porque $d_j e_j \in N^\circ$ y $\{N_{\text{mut}}, N^\circ\} \subset \mathbb{Z}$ según la Definición 3.7.5. Sea $|I_{\text{mut}}| = n$ y $|I| = n + m$, entonces

$$\epsilon_s := (\epsilon_{ij})_{i \in I_{\text{mut}}, j \in I} \in \mathbb{Z}^{n \times (n+m)}.$$

Ejemplo 3.8. Sea $N = \mathbb{Z}^2$, $I = \{1, 2\} = I_{\text{mut}}$ y $d_1 = 2, d_2 = 1$. Fijamos la forma dada de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ con respecto a la base estándar $\{e_1, e_2\}$ de N . Si nuestros datos de la semilla son $s = (e_1, e_2)$ podemos observar que N° tiene base $\{e_1, 2e_2\}$ y $N^\circ \neq N$, lo cual pasa siempre si existe una $i \in I$ tal que $d_i \neq 1$. Calculamos $\epsilon_{12} = \{e_1, e_2\} d_2 = 1$ y $\epsilon_{21} = \{e_2, e_1\} d_1 = -2$ entonces

$$\epsilon_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si tomamos $s = (e_1 + 2e_2, -e_1 - 3e_2)$ calculamos $\epsilon_{12} = \{e_1 + 2e_2, -e_1 - 3e_2\} d_2 = -1$ y $\epsilon_{21} = \{-e_1 - 3e_2, e_1 + 2e_2\} d_1 = 2$

$$\epsilon_s = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

De hecho para cualquier base de \mathbb{Z}^2 obtenemos la misma matriz asociada $\pm \epsilon_s$.

Lema 3.9. La $n \times n$ -submatriz cuadrada de ϵ es una matriz casi-simetrizable.

Prueba. Para $i, j \in I_{\text{mut}}$ calculamos $d_i \epsilon_{ij} = d_i \{e_i, e_j\} d_j = -d_i \{e_j, e_i\} d_j = -d_j \epsilon_{ji}$. \square

En particular, si definimos la matriz transpuesta $\tilde{B}_s := \epsilon_s^T$ es una matriz casi-simetrizable extendida como la conocemos. Para recuperar las variables de conglomerado pasamos primero a la latiz dual: sea $\{e_i^* : i \in I\}$ la base dual de M y definimos

$$f_i := d_i^{-1} e_i^*. \quad (3.9)$$

Para el emparejamiento dual usamos la notación $\langle \cdot, \cdot \rangle : N \times M^\circ \rightarrow \mathbb{Q}$. Pues $\langle d_i e_i, f_j \rangle = \delta_{ij}$, entonces $\{f_i : i \in I\}$ es una base de M° que es dual a la base $\{d_i e_i : i \in I\}$ de N° . Para obtener las variables de conglomerado como las hemos visto introducimos la siguiente notación de la geometría tórica:

$$z^p := x_1^{p_1} \cdots x_{n+m}^{p_{n+m}} \quad \text{para} \quad p = \sum_{i=1}^{n+m} p_i f_i \in M^\circ. \quad (3.10)$$

En particular, identificamos $z^{f_i} = x_i$. A los datos fijos Γ y los datos de la semilla s asociamos entonces la semilla $(\tilde{\mathbf{x}}_s, \tilde{B}_s)$ donde

$$\tilde{\mathbf{x}}_s = (z^{f_1}, \dots, z^{f_{n+m}}) \quad \text{y} \quad \tilde{B}_s = \epsilon^T.$$

Ejercicio 3.8. Muestra que existe una correspondencia entre las semillas en el sentido de la Definición 2.27 y los datos semillas con los datos fijos. Es decir, dado un semilla (\tilde{x}, \tilde{B}) muestra que nos da los datos fijos y los datos de una semilla. **Cuidado: Nota que en el contexto geométrico tenemos $n + m$ multiplicadores d_i y en el contexto algebraico solo n .**

Convención: Para simplificar la exposición en esta sección fijamos los datos fijos Γ con $d_i = 1$ para todos los $i \in I$. En particular, la submatriz cuadrada de ϵ es casi-simétrica. Algebraicamente, estamos en el caso donde la matriz \tilde{B} viene de un carcaj. Nota que también implica

$$N^\circ = N, M^\circ = M, f_i = e_i^*.$$

Recuerda que una latiz es un \mathbb{Z} -módulo con la acción para $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y p en la latiz definida como $k.p := p + \dots + p$ donde la suma tiene justo k sumandos y $-k.p := k.(-p)$. A la latiz N asociamos un toro algebraico:

$$T_N := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \cong (\mathbb{C}^*)^{n+m}$$

La latiz N se llama la **latiz de cocaracteres de T_N** y su latiz dual M es la **latiz de caracteres de T_N** . Los caracteres $p \in M$ corresponden a funciones $\chi^p : T_N \rightarrow \mathbb{C}^*$. Si tenemos una base $\{f_1, \dots, f_{n+m}\}$ de M podemos calcular los valores de los caracteres explícitamente: si $p = \sum_{i=1}^{n+m} p_i f_i$ entonces

$$\chi^p(t_1, \dots, t_{n+m}) := t_1^{p_1} \dots t_{n+m}^{p_{n+m}} \in \mathbb{C}^*.$$

Note que el imagen del punto es un **monomio de Laurent** en las coordenadas del toro. Resulta que todas las funciones (algebraicas) del toro T_N son combinaciones algebraicas de los caracteres, pues son polinomios de Laurent en las coordenadas. El anillo de funciones del toro T_N se denota $\mathbb{C}[M]$ y dado la base $\{f_1, \dots, f_{n+m}\}$ de M lo identificamos

$$\mathbb{C}[M] = \mathbb{C}[z^{\pm f_1}, \dots, z^{\pm f_{n+m}}] \stackrel{(3.10)}{=} \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_{n+m}^{\pm 1}]$$

con el anillo de los polinomios de Laurent en las variables x_1, \dots, x_{n+m} . En términos de la geometría algebraica tenemos $T_N = \text{Spec}(\mathbb{C}[M])$. Es decir, (como conjunto) T_N es el conjunto de todos los ideales primos del anillo $\mathbb{C}[M]$. Nota que tal T_N como $\mathbb{C}[M]$ son independientes de cualquier base de N (o M), pues son independientes de los datos de la semilla $s = (e_i : i \in I)$. Pero los datos de una semilla s nos dan una base para N , una base dual para M que en torno nos da coordenadas del toro. Si estamos pensando en el toro T_N junto con un sistema de coordenadas obtenidas de s escribimos $T_{N;s}$.

Definición 3.10. Dado los datos de una semilla $s = (e_i : i \in I)$ y un índice $k \in I_{\text{mut}}$ definimos la *mutación en la dirección k* como los datos de una semilla $\mu_k(s) = (e'_i : i \in I)$ donde

$$e'_i := \begin{cases} e_i + [e_{ik}]_+ e_k & i \neq k \\ -e_k & i = k \end{cases} \quad (3.11)$$

Ejemplo 3.11. Continuamos con el Ejemplo 3.8, es decir $N = \mathbb{Z}^2$, $I = I_{\text{mut}}$, $d_1 = 2, d_2 = 1$ y la forma dada por $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ con respecto a la base estándar $\{e_1, e_2\}$ de N . Para $s = (e_1, e_2)$ y calculamos

$$\mu_1(s) = (-e_1, e_1 + e_2) \quad \text{y} \quad \mu_2(s) = (e_1, -e_2).$$

Las matrices asociados $\epsilon_{\mu_k(s)}$ se obtienen de $\mu_k(s)$ como lo vimos. Calculamos para $\mu_1(s)$: $\{-e_1, e_1 + e_2\}d_2 = -1$, $\{e_1 + e_2, -e_1\}d_1 = 2$; y para $\mu_2(s)$: $\{e_1, -e_2\}d_2 = -1$, $\{-e_2, e_1\}d_1 = 2$. Entonces,

$$\epsilon_{\mu_1(s)} = \epsilon_{\mu_2(s)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -\epsilon_s.$$

Si empezamos con $s = (e_1 + 2e_2, -e_1 - 3e_2)$ obtenemos

$$\mu_1(s) = (-e_1 + 2e_2, e_1 + e_2) \quad \text{y} \quad \mu_2(s) = (e_1 + 2e_2, e_1 + 3e_2),$$

y no es difícil verificar que otra vez $\epsilon_{\mu_1(s)} = \epsilon_{\mu_2(s)} = -\epsilon_s$. Notamos que en todos los casos $\mu_k(s)$ es otra vez una base de N y las matrices asociados coinciden con la mutación de la matriz ϵ_s .

Ejercicio 3.9. Sean los datos fijos Γ arbitrarios (no necesariamente con $d_i = 1$) y sean $s = (e_i : i \in I)$ los datos de una semilla:

1. muestra que $\mu_k(s) = (e'_i : i \in I)$ son datos de una semilla;
2. verifica que la matriz $\epsilon_{\mu_k(s)}$ con entradas $\epsilon'_{ij} := \{e'_i, e'_j\}d_j$ es igual a la matriz $\mu_k(\epsilon_s) = (\epsilon''_{ij})$ que se obtiene de ϵ_s bajo la mutación de la matriz en la dirección k (como la vimos en (2.6)), es decir:

$$\epsilon''_{ij} := \begin{cases} -\epsilon_{ij} & k \in \{i, j\} \\ \epsilon_{ij} + \text{sgn}(\epsilon_{ik})[\epsilon_{ik}\epsilon_{kj}]_+ & \text{lo demás} \end{cases} \quad (3.12)$$

Lema 3.12. Sean $s = (e_i : i \in I)$ los datos de una semilla y $\{f_i : i \in I\}$ la base dual de M . Para la mutación de los datos de la semilla $\mu_k(s) = (e'_i : i \in I)$ la base $\{f_i : i \in I\}$ asociada cambia según la regla:

$$f'_i = \begin{cases} -f_k + \sum_{j \in I, j \neq k} [-\epsilon_{kj}]_+ f_j & k = i \\ f_i & k \neq i \end{cases} \quad (3.13)$$

Ejemplo 3.13. Antes de la prueba del Lema 3.12 consideramos nuestro ejemplo favorito: sea $N = \mathbb{Z}^2$ con la forma $\{\cdot, \cdot\}$ definida de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ con respecto a la base estándar $\{e_1, e_2\}$ de N . Fijamos $I = I_{\text{mut}} = \{1, 2\}$ y $d_1 = d_2 = 1$. Para los datos de la semilla fijamos $s_0 = (e_1, e_2)$, en particular eso implica que $\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz de intercambio asociada es $B = \epsilon^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ como en el Ejemplo 2.32. En la primeras tres columnas de la Tabla 1 se encuentran la base $\{e_{1,s}, e_{2,s}\}$ de N , la base dual $\{f_{1,s}, f_{2,s}\}$ de M y el conjunto $\{v_{1,s}, v_{2,s}\}$ en M para varias semillas. Nota que los datos de la semilla **no** satisfacen la misma periodicidad que observamos en el Ejemplo 2.32. Para ver como se puede recuperar esta periodicidad ver el Ejemplo 3.15.

Prueba del Lema 3.12. Hay que verificar que $\langle f'_j, e'_i \rangle = \delta_{ji}$ para todas $i, j \in I$ dado $\langle f_j, e_i \rangle = \delta_{ji}$. Si $k \neq j$ tenemos

$$\langle f'_j, e'_i \rangle = \langle f_j, e_i + [\epsilon_{ik}]_+ e_k \rangle = \langle f_j, e_i \rangle + [\epsilon_{ik}]_+ \langle f_j, e_k \rangle \stackrel{j \neq k}{=} \langle f_j, e_i \rangle = \delta_{ij}.$$

Para $j = k$ distinguimos dos casos: si $i = k$ calculamos

$$\langle f'_k, e'_k \rangle = \langle -f_k + \sum_j [-\epsilon_{kj}]_+ f_j, -e_k \rangle = \langle f_k, e_k \rangle + \sum_{j \neq k} [-\epsilon_{kj}]_+ \langle f_j, e_k \rangle = 1$$

| | $e_{1,s}$ | $e_{2,s}$ | ϵ_s | $f_{1,s}$ | $f_{2,s}$ | $v_{1,s}$ | $v_{2,s}$ |
|--------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|-------------|--------------|--------------|
| s_0 | e_1 | e_2 | ϵ | f_1 | f_2 | $-f_2$ | f_1 |
| $s_1 = \mu_1(s_0)$ | $-e_1$ | $e_1 + e_2$ | $-\epsilon$ | $-f_1 + f_2$ | f_2 | f_2 | $f_1 - f_2$ |
| $s_2 = \mu_2(s_1)$ | e_2 | $-e_1 - e_2$ | ϵ | $-f_1 + f_2$ | $-f_1$ | f_1 | $-f_1 + f_2$ |
| $s_3 = \mu_1(s_2)$ | $-e_2$ | $-e_1$ | $-\epsilon$ | $-f_2$ | $-f_1$ | $-f_1$ | f_2 |
| $s_4 = \mu_2(s_3)$ | $-e_1 - e_2$ | e_1 | ϵ | $-f_2$ | $f_1 - f_2$ | $-f_1 + f_2$ | $-f_2$ |
| $s_5 = \mu_1(s_4)$ | $e_1 + e_2$ | $-e_2$ | $-\epsilon$ | f_1 | $f_1 - f_2$ | $f_1 - f_2$ | $-f_1$ |
| $s_6 = \mu_2(s_5)$ | e_1 | e_2 | ϵ | f_1 | f_2 | $-f_2$ | f_1 |

Tabla 1: Los datos de las semillas en el ejemplo A_2 , ver Ejemplo 3.13.

Si $i \neq k$ tenemos

$$\begin{aligned} \langle f'_k, e'_i \rangle &= \langle -f_k + \sum_{j \neq k} [-\epsilon_{kj}]_+ f_j, e_i + [\epsilon_{ik}]_+ e_k \rangle \\ &\stackrel{i \neq k}{=} \sum_{j \neq k} [-\epsilon_{kj}]_+ \langle f_j, e_i \rangle - \langle f_k, [\epsilon_{ik}]_+ e_k \rangle \stackrel{\langle f_j, e_i \rangle = \delta_{ij}}{=} [-\epsilon_{ki}]_+ - [\epsilon_{ik}]_+ \stackrel{\text{Lema 3.9}}{=} 0 \end{aligned}$$

□

Ejercicio 3.10. Prueba el Lema 3.12 en el caso general donde no necesariamente tenemos $d_i = 1$ para todas $i \in I$.

La relación de intercambio (2.8) para las variables de conglomerado se puede recuperar con este lenguaje también. Definimos un mapeo biracional $\mu_k : T_{N^{\circ};s} \dashrightarrow T_{N^{\circ};\mu_k(s)}$ por su pullback

$$\mu_k^* : \mathbb{C}(M) \rightarrow \mathbb{C}(M), \quad z^p \mapsto z^p (1 + z^{v_k})^{-\langle e_k, p \rangle} \quad (3.14)$$

donde $p \in M$ y $v_k := \{e_k, \cdot\} \in M$.

Proposición 3.14. Sean $s = (e_i : i \in I)$ los datos de una semilla y $(\tilde{\mathbf{x}}_s, \tilde{B}_s)$ la semilla asociada con $\tilde{\mathbf{x}}_s = (z^{f_1}, \dots, z^{f_{n+m}})$. Para $k \in I_{\text{mut}}$ sea $s' := \mu_k(s) = (e'_i : i \in I)$ la mutación de s y sea $(\tilde{\mathbf{x}}_{s'}, \tilde{B}_{s'})$ la semilla asociada con $\tilde{\mathbf{x}}_{s'} = (z^{f'_1}, \dots, z^{f'_{n+m}})$. Entonces, $\tilde{\mathbf{x}}_s$ y $\mu_k^*(\tilde{\mathbf{x}}_{s'})$ satisfacen la relación de intercambio (2.8).

Ejemplo 3.15. Continuamos con el Ejemplo 3.13 para calcular la última columna de la Tabla 1. Vamos a aplicar la formula (3.14). Para las variables de la semilla s_1 calculamos:

$$\begin{aligned} \mu_1^*(z^{f_2}) &= z^{f_2} (1 + z^{-f_2})^{-\langle e_1, f_2 \rangle} = z^{f_2} \\ \mu_1^*(z^{-f_1+f_2}) &= z^{-f_1+f_2} (1 + z^{-f_2})^{\langle e_1, -f_1+f_2 \rangle} = z^{-f_1} (1 + z^{f_2}). \end{aligned}$$

Nota que con $x_i := z^{f_i}$ la segunda expresión es $\frac{1+x_2}{x_1}$. Para la semilla s_2 tenemos que hacer dos pullbacks, primero μ_2^* para obtener expresiones en la semilla s_1 y después otra vez μ_1^* para llegar a las expresiones en la semilla s_0 :

$$\begin{aligned} \mu_1^* \left(\mu_2^*(z^{-f_1}) \right) &= \mu_1^* \left(z^{-f_1} (1 + z^{f_1+f_2})^{-\langle e_1+e_2, -f_2 \rangle} \right) = \mu_1^* \left(z^{-f_1} + z^{-f_2} \right) \\ &= z^{-f_1} (1 + z^{-f_2})^{-\langle e_1, -f_1 \rangle} + z^{-f_2} (1 + z^{-f_2})^{-\langle e_1, -f_2 \rangle} = z^{-f_1} + z^{-f_1-f_2} + z^{-f_2} \end{aligned}$$

Traduciendo a nuestras variables x_1, x_2 la expresión se traduce a $\frac{x_2+1+x_2}{x_1 x_2}$ como lo vimos en el Ejemplo 2.32.

| s | $z^{f_{1,s}}$ | $z^{f_{2,s}}$ |
|-------|--------------------------|--------------------------------------|
| s_0 | z^{f_1} | z^{f_2} |
| s_1 | $z^{-f_1} + z^{f_2-f_1}$ | z^{f_2} |
| s_2 | $z^{-f_1} + z^{f_2-f_1}$ | $z^{-f_1} + z^{-f_1-f_2} + z^{-f_2}$ |
| s_3 | $z^{-f_2} + z^{f_1-f_2}$ | $z^{-f_1} + z^{-f_1-f_2} + z^{-f_2}$ |
| s_4 | $z^{-f_2} + z^{f_1-f_2}$ | z^{f_1} |
| s_5 | z^{f_2} | z^{f_1} |

Tabla 2: Los pullbacks de las variables $z^{f_{1,s}}$ y $z^{f_{2,s}}$ a la semilla s_0 . Ver Tabla 1 y el Ejemplo 3.15 para más detalles.

Prueba de la Proposición 3.14. Recuerda que dado los datos de semilla s tenemos $\mathbb{C}[M] \cong \mathbb{C}[z^{\pm f_1}, \dots, z^{\pm f_{n+m}}]$ y dado $\mu_k(s)$ tenemos $\mathbb{C}[M] \cong \mathbb{C}[z^{\pm f'_1}, \dots, z^{\pm f'_{n+m}}]$. Para comparar $\tilde{\mathbf{x}}_s$ y $\tilde{\mathbf{x}}_{s'}$ tenemos que expresar las variables en las mismas coordenadas (como en el caso algebraico donde siempre calculamos con expresiones en las variables de una semilla inicial). Eso es justo lo que hace el mapeo μ_k^* . Entonces, tenemos que verificar

$$\mu_k^*(z^{f'_i}) = \begin{cases} z^{f_i} & i \neq k \\ z^{-f_k} \left(\prod_{\epsilon_{kj} > 0} z^{\epsilon_{kj} f_j} + \prod_{\epsilon_{kj} < 0} z^{-\epsilon_{kj} f_j} \right) & i = k \end{cases}$$

En el caso $i \neq k$ calculamos

$$\mu_k^*(z^{f'_i}) = z^{f'_i} (1 + z^{v_k})^{-\langle e_k, f'_i \rangle} \stackrel{(3.13)}{=} z^{f_i} (1 + z^{v_k})^0 = z^{f_i}.$$

Antes del otro caso necesitamos la observación:

Ejercicio 3.11. Los elementos $v_k \in M$ satisfacen $v_k = \sum_{i \in I} \epsilon_{ki} d_i f_i$.

Para $i = k$ (y $d_i = 1$ para todas $i \in I$) calculamos

$$\begin{aligned} \mu_k^*(z^{f'_k}) &= z^{f'_k} (1 + z^{v_k})^{-\langle e_k, f'_k \rangle} \stackrel{(3.13)}{=} z^{-f_k + \sum_{j \neq k} [-\epsilon_{kj}] + f_j} (1 + z^{v_k}) \\ &= z^{-f_k + \sum_{j \neq k} [-\epsilon_{kj}] + f_j} (1 + z^{\sum_{i \in I} \epsilon_{ki} f_i}) \\ &\stackrel{\epsilon_{kk}=0}{=} z^{-f_k + \sum_{j \neq k} [-\epsilon_{kj}] + f_j} + z^{-f_k + \sum_{j \neq k} (\epsilon_{kj} + [-\epsilon_{kj}]_+) f_j} \\ &= z^{-f_k} \left(\prod_{-\epsilon_{kj} < 0} z^{\epsilon_{kj} f_j} + \prod_{\epsilon_{kj} > 0} z^{\epsilon_{kj} f_j} \right) \end{aligned}$$

□

Ejercicio 3.12. Prueba la Proposición 3.14 en el caso general donde no necesariamente tenemos $d_i = 1$ para todas las $i \in I$.

Sea \mathbb{T}_n en árbol n -regular y consideramos el patrón de semillas obtenidas de los datos de una semilla inicial $s = (e_i : i \in I)$, es decir la semilla inicial es $(\tilde{\mathbf{x}}_s, \tilde{B}_s)$. Sean s_t los datos de la semilla que corresponden a los vértices $t \in \mathbb{T}_n$. Vamos a construir un esquema, lo cual en general requiere la siguiente información:

1. un conjunto de índices, en nuestro caso los vértices $t \in \mathbb{T}_n$,

2. una colección de parches (uno para cada índice) en nuestro caso los toros $T_{N^\circ; s_t}$,
3. para todos $t, t' \in \mathbb{T}_n$ hay mapeos biracionales $\mu_{tt'} : T_{N^\circ; s_t} \dashrightarrow T_{N^\circ; s_{t'}}$ que satisfacen la **condición de cociclos**: μ_{tt} es la identidad, $\mu_{t't} = \mu_{tt'}^{-1}$ y para todos $t, t', t'' \in \mathbb{T}_n$ la relación $\mu_{t't''} \circ \mu_{tt'} = \mu_{tt''}$.

Definimos los mapeos $\mu_{tt'}$ como composiciones de los mapeos de mutación $\mu_k : T_{N^\circ; s} \dashrightarrow T_{N^\circ; \mu_k(s)}$. Para ser más preciso orientamos el árbol \mathbb{T}_n tal que el vértice 0 es la única fuente y todos los demás $t \in \mathbb{T}_n$ tienen una única flecha hacia t (la que viene en el camino de 0) y los demás salen de t .

Definición 3.16. El **árbol n -regular orientado** $\vec{\mathbb{T}}_n$ es la gráfica dirigida obtenida orientando \mathbb{T}_n de tal manera que el vértice 0 es la única fuente y todos los demás $t \in \mathbb{T}_n$ tienen una única flecha hacia t (la que viene en el camino de 0) y los demás salen de t . Ver la Figura 10 para un ejemplo con $n = 3$.

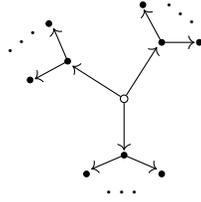


Figura 10: El árbol 3-regular orientado $\vec{\mathbb{T}}_3$ cerca del vértice 0.

Primero definimos los mapeos $\mu_{0t} : T_{N^\circ; s} \dashrightarrow T_{N^\circ; s_t}$ para todos los vértices $t \in \vec{\mathbb{T}}_n$. Sea $0 \xrightarrow{k_0} t_1 \xrightarrow{k_1} \dots \xrightarrow{k_d} t_d = t$ el único camino en $\vec{\mathbb{T}}_n$ de 0 hacia t . Para simplificar la notación fijamos para los datos de las semillas $s_i := s_{t_i}$. Entonces,

$$\mu_{0t} := \begin{cases} \text{id} & 0 = t \\ \mu_{k_d, s_d} \circ \dots \circ \mu_{k_0, s_0} & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Para dos vértices $t, t' \in \mathbb{T}_n$ que no son 0 definimos $\mu_{tt'} := \mu_{0t'} \circ \mu_{0t}^{-1}$. En la Proposición 2.4 de [GHK15] los autores muestran que la colección de los toros $\{T_{N^\circ; s_t} : t \in \vec{\mathbb{T}}_n\}$ junto con la colección de mapeos $\{\mu_{tt'} : T_{N^\circ; s_t} \dashrightarrow T_{N^\circ; s_{t'}} : t, t' \in \vec{\mathbb{T}}_n\}$ satisface la condición de los cociclos. En particular, podemos definir el esquema asociado.

Definición 3.17. La **\mathcal{A} -variedad de conglomerado** es el esquema asociado a los datos fijos y los datos de una semilla s que se obtiene pegando los toros $T_{N^\circ; s_t}$ para $t \in \mathbb{T}_n$ usando los mapeos de transito $\mu_{tt'}$:

$$\mathcal{A}_s := \bigcup_{t \in \mathbb{T}_n} T_{N^\circ; s_t}. \quad (3.15)$$

Recuerda que con $d_i = 1$ para todos los i tenemos $N^\circ = N$, pero la Definición 3.17 es más general. Con respecto a la pregunta si las variables congeladas deberían ser unidad en el álgebra de conglomerado o no, acá tenemos la flexibilidad de pegar copias de $T_{N_{\text{mut}}^\circ; s} \times \mathbb{A}^m$ y en algunas referencias la \mathcal{A} -variedad se define así.

Las álgebras de conglomerado entran en este contexto como sigue:

Definición 3.18. El **álgebra de conglomerado superior** es un anillo de funciones regulares en la \mathcal{A} -variedad de conglomerado:

$$\text{up}(\mathcal{A}_s) := \Gamma(\mathcal{A}_s, \mathcal{O}_{\mathcal{A}_s}) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}_n} \mathbb{C}[z^{\pm f_{1,s_t}}, \dots, z^{\pm f_{n+m,s_t}}]. \quad (3.16)$$

donde $\{f_{1,s_t}, \dots, f_{n+m,s_t}\}$ es la base de M° que corresponde a la semilla s_t .

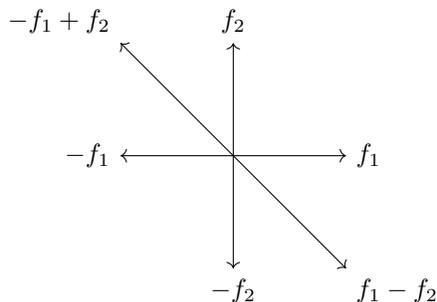
Tenemos el siguiente corolario inmediatamente del fenómeno de Laurent (Teorema 3.1):

Corolario 3.19. Sea s el dato de una semilla y $(\tilde{\mathbf{x}}_s, \tilde{B}_s)$ la semilla asociada. Entonces El álgebra de conglomerado está contenido en el álgebra de conglomerado superior:

$$\mathcal{A}(\tilde{B}_s) \subseteq \text{up}(\mathcal{A}_s). \quad (3.17)$$

3.3.2. Ejercicios

Ejercicio 3.13. Recuerda el Ejemplo 3.13 y la Tabla 1. Dibujando los $f_{i,s}$ en el plano nos damos cuenta que son un abanico completo cuyos conos máximos corresponden a las semillas s_0, \dots, s_5 :



Repite el cálculo de los $f_{i,s}$ en los siguientes casos y verifica si sale también un abanico completo o no:

1. Fijamos $N = \mathbb{Z}^2$ con forma $\{\cdot, \cdot\}$ definida de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ para la base estándar $\{e_1, e_2\}$. Además fijamos $I = I_{\text{mut}}$ con $(d_1, d_2) = (2, 1)$ y para la semilla inicial fijamos $s_0 = (e_1, e_2)$ (como en los Ejemplo 3.8 y 3.11).
2. Fijamos $N = \mathbb{Z}^3$ con forma $\{\cdot, \cdot\}$ definida de $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ para la base estándar $\{e_1, e_2, e_3\}$. Además fijamos $I = I_{\text{mut}}$ con $d_i = 1$ y para la semilla inicial fijamos $s_0 = (e_1, e_2, e_3)$.

4. La clasificación de tipo finito

El objetivo de esta sección es la clasificación de las álgebras de conglomerado que tienen un número finito de semillas no-etiquetadas. Nota que eso implica que el número de variables de conglomerado es finito y vamos a ver que de hecho es una equivalencia.

Para la clasificación de tipo finito necesitamos el lenguaje de las matrices de Cartan y los diagramas de Dynkin. Además vamos a usar técnicas para relacionar distintos álgebras de conglomerado, como subálgebras o plegando los carcajes.

La referencia principal son los capítulos 4 y 5 en el libro de Fomin, Williams y Zelevinsky [FWZ16].

4.1. Subálgebras de conglomerado

Definición 4.1. Sea $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{B})$ una semilla de rango n y sea $x_i \in \tilde{\mathbf{x}}$ una variable de conglomerado. **Congelar** i y x_i se refiere a la semilla obtenido de $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{B})$ reclasificando i y x_i como un índice y una variable congelada y eliminando la columna i de \tilde{B} .

Si \tilde{B} es la matriz de un carcaj, congelar corresponde a reclasificar un vértice mutable como congelado y eliminar las flechas entre los vértices congelados.

Ejercicio 4.1. Congelar variables en una semilla conmuta con la mutación de semillas.

Definición 4.2. Sea $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{B})$ una semilla de rango n con m variables congelados. Sea $I \cup J$ una partición de $[n + m]$ tal que

$$b_{jk} = 0 \quad \text{para } j \in J, k \in [n] \cap I$$

Es decir, las variables mutadas $\mu_i(x_i)$ para $i \in I$ son independientes de las variables x_j con $j \in J$. Definimos las **semilla restringida** como $(\tilde{\mathbf{x}}_I, \tilde{B}_I)$ donde $\tilde{\mathbf{x}}_I = (x_i : i \in I)$ y $\tilde{B}_I = (b_{ij})_{i \in I, j \in [n] \cap I}$ la submatriz de \tilde{B} .

Ejercicio 4.2. Restringir una semilla conmuta con la mutación de semillas.

Definición 4.3. Sea Σ una semilla y Σ' una semilla obtenida de Σ congelando variables tal que para Σ' existe una partición de los índices como en la Definición 4.2. Sea Σ'' la semilla restringida obtenida de Σ' entonces

1. el patrón de semillas definido por Σ'' es un **subpatrón de semillas** del patrón de Σ ;
2. el álgebra de conglomerado definida por Σ'' se llama un **subálgebra de conglomerado** del álgebra de conglomerado definida por Σ .

Ejemplo 4.4. Sea T_n una triangulación de un n -ágono. Vimos en la sección 2.1.1 como se puede asociar un carcaj a T_n que define un álgebra de conglomerado \mathcal{A}_{T_n} cuyos variables son en correspondencia con los arcos de las distintas triangulaciones. Sean s_1, \dots, s_r un conjunto de vértices del n -ágono tal que T_n contiene los arcos $\overline{s_1 s_2}, \overline{s_2 s_3}, \dots, \overline{s_r s_1}$. Entonces, T_n contiene una triangulación del r -ágono con vértices s_1, \dots, s_r . Podemos restringir el carcaj de T_n al carcaj que corresponde a la triangulación del r -ágono $T_r \subset T_n$. El álgebra de conglomerado asociado a T_r es un subálgebra de \mathcal{A}_{T_n} .

El siguiente Lema resume algunas observaciones que nos van a servir en la prueba de la clasificación:

Lema 4.5. 1. Sea \mathcal{P}_n un patrón de semillas y $\mathcal{P}'_{n'}$ un subpatrón de semillas. Entonces, cada subpatrón de semillas de $\mathcal{P}'_{n'}$ es un subpatrón de semillas de \mathcal{P}_n .

2. Si un álgebra de conglomerado tiene un número finito de variables de conglomerado, entonces cada subálgebra de conglomerado tiene un número finito de variables de conglomerado.
3. Cada componente conexa de un carcaj define un subálgebra de conglomerado.

4.2. Plegando Carcajes

Plegar es un procedimiento que produce un nuevo patrón de semillas de una patrón de semillas con algunas simetrías. En particular, en la prueba de la clasificación sirve para obtener patrones de semillas de tipo B, C, F y G de los tipos **simplemente lazados** A, D y E como los vamos a ver en la siguiente sección.

Ejemplo 4.6. Recuerda la matriz casi-simetrizable de rango 2: $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Vimos las relaciones de intercambio del álgebra de conglomerado asociado en el Ejercicio 2.18:

$$x_{k-1}x_{k+1} = \begin{cases} x_k + 1 & k \text{ impar} \\ x_k^2 + 1 & k \text{ par} \end{cases} \quad (4.1)$$

Las mismas relaciones se pueden obtener del álgebra de conglomerado de tipo A_3 aprovechando la \mathbb{Z}_2 -simetría del carcaj $1 \leftarrow 2 \rightarrow 3$. Si identificamos las variables asociadas a los vértices 1 y 3 tenemos

$$x_0 \leftarrow x_1 \rightarrow x_0.$$

Para preservar la simetría podemos mutar en el vértice de x_1 y simultaneamente en los vértices de x_0 lo cual nos da las relaciones de intercambio como en (4.1):

$$x_0x'_0 = x_1 + 1 \quad \text{y} \quad x_1x'_1 = x_0^2 + 1.$$

Las observaciones del Ejemplo 4.6 se pueden formalizar como sigue.

Definición 4.7. Sea Q un carcaj etiquetado con $n + m$ vértices y tal que los vértices $1, \dots, n$ son mutables y los demás congelados. Sea G un grupo finito que actúa en el conjunto de vértices de Q (o equivalentemente en $[n + m]$). Si i y i' están en la misma G -órbita lo escribimos como $i \sim i'$. El carcaj Q (o la matriz $\tilde{B}(Q) = (b_{ij})$) se llama **G -admisibile** si cumple lo siguiente

1. si $i \sim i'$ entonces i es mutable si y solo si i' es mutable;
2. para todos i, j índices y $g \in G$ tenemos $b_{ij} = b_{g(i),g(j)}$;
3. para índices mutables $i \sim i'$ tenemos $b_{ii'} = 0$ (es decir, las G -órbitas son **totalmente desconectadas**);
4. para $i \sim i'$ y j mutable tenemos $b_{ij}b_{i'j} \geq 0$ (es decir, no existen caminos orientados de longitud dos conectando dos vértices en la misma G -órbita por un vértice mutable).

Si Q es un carcaj G -admisibile y I una G -órbita entonces I es **mutable** si todos los $i \in I$ son mutables y en el caso contrario se llama **congelada**. Definimos la matriz $\tilde{B}^G = (b_{IJ}^G)$

cuyos columnos corresponden a las G -orbitas mutables y cuyos filas corresponden a todas las G -orbitas como

$$b_{IJ}^G := \sum_{i \in I} b_{ij}, \quad (4.2)$$

donde $j \in J$ es un índice arbitrario. Este procedimiento se llama **plegar**; la matriz \tilde{B}^G se obtiene **plegando** el carcaj Q . Nuestro objetivo es definir **semillas plegadas**, pero antes tenemos que verificar que nuestra definición de la matriz plegada es buena para este asunto.

Lema 4.8. Para un carcaj G -admisibles Q , la matriz plegada $\tilde{B}(Q)^G$ es una matriz casi-simetrizable extendida.

Prueba. Con la notación $\tilde{B}(Q) = (b_{ij})$ y (4.2) calculamos para I, J mutable

$$|J|b_{IJ}^G = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} b_{ij} = - \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} b_{ji} = -|I|b_{JI}^G$$

En particular, con $d_I := |I|$ la submatriz cuadrada $(b_{IJ}^G)_{I,J}$ mutable es casi-simetrizable según la definición en la página 24. \square

Lema 4.9. Sea Q un carcaj G -admisibles y $\tilde{B}(Q) = (b_{ij})$. Para una G -orbita mutable J y una G -orbita I tenemos que todas las entradas b_{ij} son o no-negativas, o no-positivas. En particular,

$$b_{IJ}^G > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists i \in I, j \in J : b_{ij} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in I \exists j \in J : b_{ij} > 0,$$

y similar para entradas negativas.

Prueba. Sean $i \sim i' \in I$ y $j \sim j' \in J$ y $g \in G$ tal que $g(j) = j'$. Entonces, $b_{ij}b_{i'j'} = b_{ij}b_{g(i')j} \geq 0$ según la Definición 4.7 2 y 4. El resto es una consecuencia de la (4.2). \square

Recuerda en Ejercicio 2.2 sobre la mutación de carcaj que conmuta. La Definición 4.73 asegura que la mutación en vértices de la misma G -orbita de un carcaj G -admisibles conmuta. Entonces, podemos definir para un G -orbita mutable K

$$\mu_K := \prod_{k \in K} \mu_k \quad (4.3)$$

Lema 4.10. Sea Q un carcaj G -admisibles y $\tilde{B}(Q) = (b_{ij})$. Sea K una G -orbita mutable tal que $\mu_K(Q)$ es G -admisibles. Entonces,

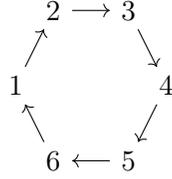
$$\mu_K(\tilde{B})^G = \mu_K(\tilde{B}^G),$$

donde $\mu_K(\tilde{B})$ es la secuencia de mutaciones en todas las $k \in K$ y $\mu_k(\tilde{B}^G)$ es una sola mutación en la dirección K .

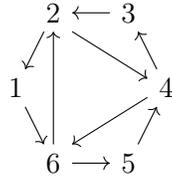
Ejercicio 4.3. Prueba el Lema 4.10 usando la formula de la mutación de matrices (2.4) y el Lema 4.9.

Nota que el Lema 4.10 asume que tal el carcaj Q como el carcaj $\mu_K(Q)$ sean G -admisibles. Desafortunadamente, la G -admisibilidad no se propaga con la mutación del carcaj como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.11. Sea Q el carcaj que es un 6-ciclo orientado con la acción de \mathbb{Z}_2 que manda i a $i + 3$ mód 6.



Una mutación como en (4.3) por ejemplo es la secuencia de mutaciones $\mu_1 \circ \mu_3 \circ \mu_5$. Lo cual da el carcaj:



Nota que $\mu_1 \circ \mu_3 \circ \mu_5(Q)$ no es G -admisibile porque no cumple con la Definición 4.7.3 y 4.

Para la definición de una semilla plegada necesitamos el siguiente semicampo de funciones racionales **libre de substracciones**:

$$\mathbb{Q}_{\text{sf}}(x_1, \dots, x_{n+m}) := \left\{ \frac{f}{g} \in \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_{n+m}) : \exists \frac{f'}{g'} = \frac{f}{g} \text{ y } f', g' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[x_1, \dots, x_{n+m}] \right\}.$$

De manera similar definimos \mathcal{F}_{sf} . Si una función racional es libre de substracciones a veces no es visible en cada representante. Por ejemplo, $\frac{1}{1-x} \in \mathbb{Q}_{\text{sf}}(x)$ pues

$$\frac{1-x}{1-x^2} = \frac{(1-x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{1+x} \in \mathbb{Q}_{\text{sf}}(x).$$

Nota que \mathcal{F}_{sf} casi es un campo, la única operación que no preserva la propiedad de ser libre de substracciones es la substracción. Por eso \mathcal{F}_{sf} es un **semicampo**. Homomorfismos entre semicampos son mapeos que preservan la estructura de los semicampos.

Definición 4.12. Sea G un grupo finito actuando en $[n+m]$ tal que el subconjunto $[n]$ es invariante bajo la acción de G ($g[n] = [n]$ para todos $g \in G$). Sea $(n+m)^G$ el número de G -orbitas y sean \mathcal{F} y \mathcal{F}^G los campos de funciones racionales en $(n+m)$ y $(n+m)^G$ variables independientes. Sea $\psi : \mathcal{F}_{\text{sf}} \rightarrow \mathcal{F}_{\text{sf}}^G$ un homomorfismo de semicampos sobreyectivo.

Para un carcaj Q una semilla $\Sigma = (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{B}(Q))$ en \mathcal{F} con $\tilde{\mathbf{x}} = (x_i)$ es (G, ψ) -**admisibile** si cumple

1. Q es G -admisibile;
2. para $i \sim i'$ tenemos $\psi(x_i) = \psi(x_{i'})$.

En este situación definimos la **semilla plegada** $\Sigma^G = (\tilde{\mathbf{x}}^G, \tilde{B}^G)$ en $\mathcal{F}_{\text{sf}}^G \subset \mathcal{F}^G$ con

1. matriz $\tilde{B}^G = (b_{IJ}^G)_{IJ}$ como en (4.2), y
2. conglomerado extendido $\tilde{\mathbf{x}}^G := (x_I)_{I \text{ } G\text{-orbita}}$ con $(n+m)^G$ elementos definimos por $x_I := \psi(x_i)$.

Nota que los x_I son algebraicamente independientes y generan \mathcal{F}^G pues ψ es sobreyectivo.

Lema 4.13. Sea $\Sigma = (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{B}(Q))$ una semilla (G, ψ) -admisibles como en la Definición 4.12 y sea K una G -órbita mutable. Si el carcaj $\mu_K(Q)$ es G -admisibles, entonces la semilla $\mu_K(\Sigma)$ es (G, ψ) -admisibles y además

$$\mu_K(\Sigma)^G = \mu_K(\Sigma^G).$$

donde $\mu_K(\Sigma)$ es la secuencia de mutaciones en todas las $k \in K$ y $\mu_k(\Sigma^G)$ es una sola mutación en la dirección K .

Prueba. Sea \mathcal{O} el conjunto de G -órbitas. Usamos la notación anterior: $\Sigma = (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{B})$ con $\tilde{\mathbf{x}} = (x_i)$ y $\tilde{B} = \tilde{B}(Q) = (b_{ij})$, y para la semilla plegada $\Sigma^G = (\tilde{\mathbf{x}}^G, \tilde{B}^G)$ con $\tilde{\mathbf{x}}^G = (x_I)_{I \in \mathcal{O}}$ y $\tilde{B}^G = (b_{IJ}^G)$. El Lema 4.10 nos da $\mu_K(\tilde{B})^G = \mu_K(\tilde{B}^G)$, entonces basta verificar que los conglomerados extendidos de $\mu_K(\Sigma)^G$ y $\mu_K(\Sigma^G)$ coinciden. Empezamos con $\mu_K(\tilde{\mathbf{x}}^G)$ que es obtenido de $\tilde{\mathbf{x}}^G$ reemplazando la variable x_K por x'_K que cumple

$$x_K x'_K = \prod_{b_{IK}^G > 0} x_I^{b_{IK}^G} + \prod_{b_{IK}^G < 0} x_I^{-b_{IK}^G}. \quad (4.4)$$

El conglomerado extendido $\mu_K(\tilde{\mathbf{x}})$ se obtiene de $\tilde{\mathbf{x}}$ reemplazando cada x_k con $x \in K$ por x'_k que cumple

$$x_k x'_k = \prod_{b_{ik} > 0} x_i^{b_{ik}} + \prod_{b_{ik} < 0} x_i^{-b_{ik}}. \quad (4.5)$$

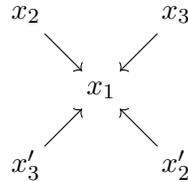
De $\mu_K(\tilde{\mathbf{x}})$ obtenemos el conglomerado extendido $\mu_K(\tilde{\mathbf{x}})^G$ aplicando el homomorfismo ψ . Recuerda que $\psi(x_i) = \psi(x_{i'})$ si i' está en la G -órbita de i que se denotan $[i]$. Como ninguna variable x_i con $[i] \neq K$ cambia bajo las mutaciones de μ_K , pues $\mu_K(\tilde{\mathbf{x}})^G$ contiene todas las variables X_I con $I \in \mathcal{O} - \{K\}$. Basta verificar que $\psi(x'_k) = x'_K$ con x'_K como en (4.4). Entonces aplicamos ψ cada una de las relación de intercambio como en (4.5):

$$x_K \psi(x'_k) = \prod_{b_{ik} > 0} x_{[i]}^{b_{ik}} + \prod_{b_{ik} < 0} x_{[i]}^{-b_{ik}}, \quad (4.6)$$

donde en los monomios al lado derecho una variable x_I tiene exponente positivo si y solo si existe un b_{ik} con $i \in I$ no cero y en este caso el exponente es $b_{IK}^G = \sum_{i \in I} b_{ik}$ para algún $k \in K$. Pero el Lema 4.9 nos dice que $b_{ik} > 0$ si y solo si $b_{IK}^G > 0$ y por eso las ecuaciones (4.4) y (4.6) coinciden. \square

Definición 4.14. Un carcaj Q se llama **globalmente plegable** con respecto a la acción de un grupo finito G actuando el en conjunto de vértices de Q si Q es G -admisibles y para cada secuencia de G -órbitas mutables J_1, \dots, J_s el carcaj $(\mu_{J_1} \circ \dots \circ \mu_{J_s})(Q)$ es G -admisibles.

Ejercicio 4.4. Consideramos el carcaj Q con 5 vértices mutables.



con la acción del grupo $G = \mathbb{Z}_2$ que actúa con una rotación de 180° en Q . Las G -órbitas son $\{x_1\}$, $\{x_2, x'_2\}$ y $\{x_3, x'_3\}$.

1. Verifique que Q es G -admisibile y calcula la matriz plegada \tilde{B}^G .
2. Prueba que Q es globalmente plegable con respecto a la acción de G .

Con la noción de carcajes globalmente plegable junto con el Lema 4.13 obtenemos el siguiente corolario que nos deja construir patrones de semillas plegadas:

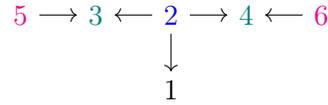
Corolario 4.15. Sea Q un carcaj globalmente plegable con respecto a la acción de un grupo finito G y sea $\Sigma = (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{B}(Q))$ una semilla en $\mathcal{F} = \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_{n+m})$ con $\tilde{\mathbf{x}} = (x_i)$. Sea $\tilde{\mathbf{x}}^G$ la colección de variables formales con índices I en correspondencia con las G -orbitas que generan el campo de funciones racionales \mathcal{F}^G . Definimos

$$\psi : \mathcal{F}_{\text{sf}} \rightarrow \mathcal{F}_{\text{sf}}^G \quad x_i \mapsto x_I \quad \text{con } i \in I.$$

tal que Σ es (G, ψ) -admisibile. Entonces, para cada secuencia de G -orbitas mutables J_1, \dots, J_s la semilla $(\mu_{J_1} \circ \dots \circ \mu_{J_s})(\Sigma)$ es (G, ψ) -admisibile. Además las semillas plegadas $(\mu_{J_1} \circ \dots \circ \mu_{J_s})(\Sigma)^G$ forman un patrón de semillas en \mathcal{F}^G con matriz de intercambio extendida inicial \tilde{B}^G .

El Corolario nos va a servir en particular en el caso que Σ forma un patrón de semillas de tipo finito, pues en este caso también el patrón de semillas plegadas es de tipo finito. El siguiente ejercicio muestra como se puede obtener un patrón de semillas de tipo F_4 de un patrón de semillas de tipo E_6 .

Ejemplo 4.16. Consideramos el carcaj



Con la acción de $G = \mathbb{Z}_2$ que intercambia 3 por 4 y 5 por 6 y fija 1 y 2. Las G -orbitas entonces con $\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}$. Verificamos que Q es G -admisibile:

1. todos los vértices son mutable, pues cumple 1;
2. para i, j y $g \in G$ tenemos $b_{ij} = b_{g(i)g(j)}$: eso se puede verificar en el carcaj como la simetría;
3. no hay flechas entre vértices en la misma G -orbita;
4. $b_{ij}b_{i'j} \geq 0$: el único caso no cero es $b_{32}b_{42} = (-1)^2 = 1$.

Entonces calculamos la matriz plegada \tilde{B}^G cuyos entradas son $b_{IJ}^G = \sum_{i \in I} b_{ij}$ para cualquier $j \in J$. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} b_{\{1\}, \{2\}} &= b_{12} = -1, \\ b_{\{1\}, \{3,4\}} &= b_{13} = 0, \\ b_{\{3,4\}, \{2\}} &= b_{32} + b_{42} = -2, \\ b_{\{2\}, \{3,4\}} &= b_{23} = -1, \\ b_{\{3,4\}, \{5,6\}} &= b_{35} + b_{45} = -1. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\tilde{B}^G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.5. Verifica que el carcaj Q en el Ejemplo 4.16 es globalmente plegable.

4.3. Matrices de Cartan y Diagramas de Dynkin

Las diagramas de Dynkin y sus matrices de Cartan asociadas clasifican varios objetos matemáticos, como los sistemas de raíces finitos, los grupos de Weyl finitos, las álgebras y los grupos de Lie simples; los diagramas de Dynkin simplementelazados clasifican además las álgebras de caminos de tipo de representaciones finito, singularidades Du Val/de Klein/simples de tipo superficies. Otro objeto matemático que se aprovecha de los diagramas de Dynkin para su clasificación son las álgebras de conglomerado de tipo finito, con los diagramas de Dynkin simplementelazados clasificando las álgebras de conglomerado casi-simétricas de tipo finito.

Para establecer el lenguaje que vamos a utilizar primero repasamos brevemente las definiciones y las notaciones claves. Si no están familiar con los sistemas de raíces y sus diagramas de Dynkin recomiendo la lectura de [Hum80, § III].

Definición 4.17. Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{i,j \in [n]}$ es una **matriz simetrizable generalizada de Cartan** si cumple lo siguiente:

1. $a_{ii} = 2$ para todas las $i \in [n]$;
2. $a_{ij} \leq 0$ para todas las $i \neq j$;
3. existe una matriz diagonal con entradas positivas tal que DA es simétrica.

La matriz A se llama **positiva** si DA es definida positiva, lo cual es equivalente a la condición que todos sus menores principales $\Delta_{I,I}(A)$ sean positivos. En particular tenemos para $i \neq j$

$$\Delta_{\{i,j\},\{i,j\}}(A) = \det \begin{pmatrix} 2 & a_{ij} \\ a_{ji} & 2 \end{pmatrix} = 4 - a_{ij}a_{ji} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij}a_{ji} \leq 3. \quad (4.7)$$

Si A cumple (4.7) se llama una **matriz de Cartan (de tipo finito)**.

Las matrices de Cartan están en correspondencia de los grupos de Weyl finitos que corresponden a los sistemas de raíces finitos. En el caso $n = 2$ tenemos lo siguiente:

Ejemplo 4.18. Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1,2\}}$ es una matriz simetrizable generalizada si es de forma

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -a \\ -b & 2 \end{pmatrix}$$

para $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Si A es una matriz de Cartan de tipo finito solo quedan los casos:

1. $a = b = 0$;
2. $a = b = 1$;

3. $a = 1, b = 2$ o $a = 2, b = 1$;

4. $a = 1, b = 3$ o $a = 3, b = 1$.

Definición 4.19. El diagrama de Dynkin de una matriz de Cartan $A = (a_{ij})_{i,j \in [n]}$ es una grafica con n vértices y las siguientes aristas

$$i \bullet \text{---} \bullet j \quad \text{si } a_{ij} = -1 \text{ y } a_{ji} = -1$$

$$i \bullet \text{---} \text{---} \bullet j \quad \text{si } a_{ij} = -1 \text{ y } a_{ji} = -2$$

$$i \bullet \text{---} \text{---} \text{---} \bullet j \quad \text{si } a_{ij} = -1 \text{ y } a_{ji} = -3$$

Si el diagrama de Dynkin de A solo tiene aristas simples (es decir $a_{ij} \in \{0, -1\}$ para todas las $i \neq j$), entonces A se llama **simplemente lazado**. Si el diagrama de Dynkin de A es conectado, A se llama **indecomponible**.

Ejemplo 4.20. Continuamos con las matrices de Cartan de rango 2 del Ejemplo 4.18. Sus diagramas de Dynkin son

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad 1 \bullet \quad \bullet 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad 1 \bullet \text{---} \bullet 2$$

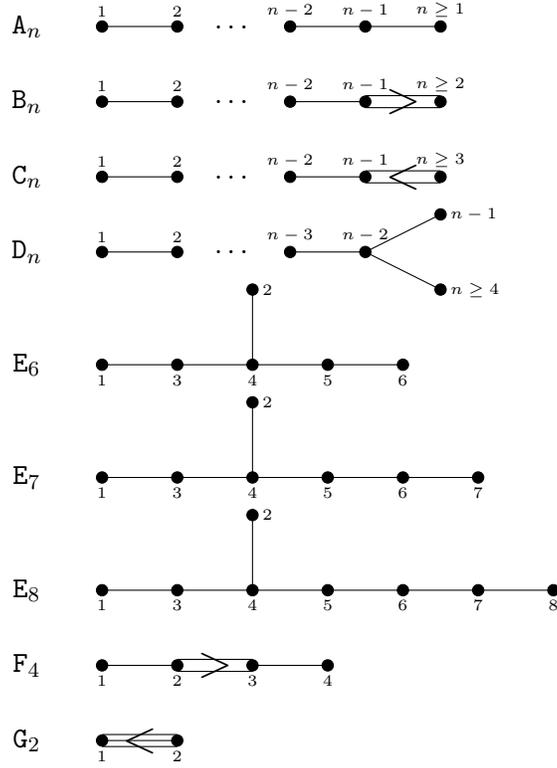
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad 1 \bullet \text{---} \text{---} \bullet 2 \quad \text{o} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad 1 \bullet \text{---} \text{---} \bullet 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad 1 \bullet \text{---} \text{---} \text{---} \bullet 2 \quad \text{o} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad 1 \bullet \text{---} \text{---} \text{---} \bullet 2$$

El significado de una arista doble o triple en un diagrama de Dynkin es muy distinta de una flecha doble en un carcaj. Por ejemplo, la arista doble $\bullet \text{---} \text{---} \bullet$ corresponde a una submatriz de forma $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ de la matriz de Cartan A . Por el otro lado, dos flechas dirigidas $\bullet \text{---} \text{---} \bullet$ corresponde a una submatriz de forma $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ de la matriz de intercambio $B(Q)$.

El **tipo** de A se refiere a las multiplicidades de las componentes conexas de su diagrama de Dynkin. Las matrices de Cartan (de tipo finito) son clasificadas por sus diagramas de Dynkin. El siguiente teorema famoso es la **clasificación de Cartan–Killing**:

Teorema 4.21 (Clasificación de Cartan–Killing). Los diagramas de Dynkin conexos que corresponden a matrices de Cartan de tipo finito son los siguientes:



Para diagramas de Dynkin que no son conexos usamos la notación $X_n \sqcup Y_m$ para escribir la unión disjunta de los diagramas de tipo X_n y Y_m . La conexión con las álgebras de conglomerado es dada por la siguiente definición.

Definición 4.22. Sea $B = (b_{ij})_{i,j \in [n]}$ una matriz casi-simetrizable con entradas enteras. La **compañera de Cartan** de B es la matriz $A := A(B) = (a_{ij})_{i,j \in [n]}$ con entradas

$$a_{ij} := \begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ -|b_{ij}| & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (4.8)$$

Ejemplo 4.23. La compañera de Cartan de una matriz de intercambio de rango dos

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{pmatrix} \quad \text{es} \quad A(B) = \begin{pmatrix} 2 & -a \\ -b & 2 \end{pmatrix}$$

En particular, $A(B)$ es de tipo finito solo para los casos

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

que corresponden a los diagramas de Dynkin $A_1 \sqcup A_1, A_2, B_2, G_2$.

Estamos preparado para formular el teorema clave de este capítulo: la clasificación de las álgebras de conglomerado de tipo finito que fue probado por Fomin y Zelevinsky en [FZ03a].

Teorema 4.24 (La clasificación de tipo finito). Un patrón de semillas (y su álgebra de conglomerado asociado) es de tipo finito si y solo si contiene una matriz de intercambio B tal que $A(B)$ (ver (4.8)) es una matriz de Cartan de tipo finito.

Nota que el Teorema 4.24 se refiere exclusivamente a la **matriz de intercambio** y no a la **matriz de intercambio extendida**. Un corolario entonces es que la parte abajo de una matriz de intercambio extendida \tilde{B} que recuerda la relación entre las direcciones congeladas y las direcciones mutables no tiene ningún efecto en la propiedad de ser de tipo finito o no. Definimos el tipo de un álgebra de conglomerado de tipo finito como sigue:

Definición 4.25. Sea X_n un diagrama de Dynkin con n vértices. Un patrón de semillas (o su álgebra de conglomerado) es de **tipo** X_n si una de sus matrices de intercambio B tiene compañera de Cartan $A(B)$ que corresponde al diagrama de Dynkin X_n .

Dada la definición uno puede preguntar si el tipo de un álgebra de conglomerado es único. A priori el mismo patrón de semillas podría tener matrices de intercambio de distintos tipos.

Nota que si B es casi-simétrica, entonces $A(B)$ es simétrica. En particular, $A(B)$ corresponde a un diagrama de Dynkin simplemente lazado, es decir de tipo ADE si y solo si B es una orientación del mismo diagrama. Recuerda que en el Ejercicio 2.5 probamos que dos orientaciones del mismo árbol son equivalentes bajo mutación.

Más general tenemos el siguiente resultado cuyo prueba vamos a ver más tarde:

Teorema 4.26. Sean B y B' dos matrices de intercambio cuyas compañeras de Cartan $A(B)$ y $A(B')$ son matrices de Cartan de tipo finito. Entonces los siguientes son equivalentes

1. las matrices de Cartan $A(B)$ y $A(B')$ tienen el mismo tipo;
2. B y B' son equivalentes bajo mutación.

En particular, el tipo de un patrón de semillas de tipo finito es definido de forma única.

Idea de la Prueba del Teorema 4.24:

\Leftarrow La prueba trata todos los casos separados. Es decir, para cada diagrama de Dynkin de en la clasificación se construye un álgebra de conglomerado del mismo tipo. Más precisamente se va a construir una matriz de intercambio que tiene \mathbb{Z} -rango completo y se prueba que el álgebra de conglomerado asociado tiene un número finito de semillas. Es suficiente dado el siguiente corolario cuya prueba vamos a ver más tarde.

Corolario 4.27. Sean $\mathcal{P}_1 = (\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{B}(t))_{t \in \mathbb{T}_n}$ y $\mathcal{P}_2 = (\tilde{\mathbf{x}}'(t), \tilde{B}'(t))_{t \in \mathbb{T}_n}$ dos patrones de semillas que satisfacen

1. $B(t) = B'(t)$ para todas $t \in \mathbb{T}_n$;
2. el \mathbb{Z} -espacio generado por las filas de $\tilde{B}(0)$ contiene las filas de $\tilde{B}'(0)$.

En este caso, si $(\tilde{\mathbf{x}}(t_1), \tilde{B}(t_1)) = (\tilde{\mathbf{x}}(t_2), \tilde{B}(t_2))$ para $t_1, t_2 \in \mathbb{T}_n$ entonces también $(\tilde{\mathbf{x}}'(t_1), \tilde{B}'(t_1)) = (\tilde{\mathbf{x}}'(t_2), \tilde{B}'(t_2))$.

Nota que si el \mathbb{Z} -espacio generado por las filas de $\tilde{B}(0)$ es \mathbb{Z}^n (es decir, $\tilde{B}(0)$ tiene \mathbb{Z} -rango completo) entonces se satisface punto 2 en el Corolario 4.27 para cualquier matriz $\tilde{B}'(0)$ que cumple 1.

Más concretamente, las estrategias para los distintos casos son como sigue:

- A_n Se usa la correspondencia con triangulaciones del $n + 3$ -ágono y el anillo de coordenadas homogéneas de la Grassmanniana $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+3})$ con respecto a su encaje de Plücker (ver §1.3.2).
- D_n Se usa la correspondencia con triangulaciones etiquetadas del $n + 3$ -ágono con una pinchadura que domina la combinatoria de las mutaciones en este caso (ver [FWZ16, §5.4]).
- B_n Este caso se obtiene del caso D_{n+1} usando la técnica de plegar en los carcajes.
- C_n Este caso se obtiene del caso A_{2n-1} usando la técnica de plegar en los carcajes.
- $E_{6/7/8}$ Para E_8 se usan los programas `sage` con un paquete de Musiker y Stump [MS11] y el `MutationApp` de Bernhard Keller. Los tipos E_6 y E_7 se realizan como subpatrones de conglomerado de E_8 .
- F_4 Se obtiene de E_6 plegando un carcaj como en el Ejemplo 4.16.
- G_2 Se obtiene de D_4 plegando un carcaj (ver [FWZ16, §5.7]).

\Rightarrow Para la dirección opuesta se muestra que cada patrón de semillas de tipo finito viene de una matriz de Cartan de tipo finito usando el hecho que los patrones de semillas de tipo finito son 2-finitos (una generalización de las observaciones en el Ejemplo 4.18):

Definición 4.28. Una matriz casi-simetrizable $B = (b_{ij})_{i,j \in [n]}$ se llama **2-finita** si y solo si para cada matriz $B' = (b'_{ij})$ equivalente a B bajo mutación y cada par de índices i, j tenemos $|b'_{ij}b'_{ji}| \leq 3$.

Ejercicio 4.6. En este ejercicio vamos a probar que cada patrón de semillas de tipo finito es 2-finito.

1. Considera el grupo $W \subset \text{GL}_2$ generado de $s_1 = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & -1 \end{pmatrix}$ y muestra que es un grupo finito si y solo si $ab \leq 3$.

Sea $B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ con $ab \geq 4$ y sean

$$\mathbf{x}(0) = (x_1, x_2), \quad \mathbf{x}(1) = (x_3, x_2), \quad \mathbf{x}(2) = (x_3, x_4), \dots \quad (4.9)$$

los conglomerados en el campo \mathcal{F} asociados al patrón de semillas definido por B . Consideramos el semicampo $U = \{u^r : r \in \mathbb{R}\}$ donde u es una variable formal y U tiene las operaciones

$$u^r \oplus u^s = u^{\max\{r,s\}}, \quad \text{y} \quad u^r \cdot u^s = u^{r+s}.$$

2. Construye un homomorfismo de semicampos $\psi : \mathcal{F} \rightarrow U$ tal que el conjunto $\{\psi(x_t) : t \in \mathbb{Z}\} \subset U$ es infinito. **Tipp:** en el caso $ab = 4$ toma $\psi(x_1) = u$ y $\psi(x_2) = u^a$, para $ab > 4$ toma $\psi(x_1) = u^b$ y $\psi(x_2) = u^{\lambda+1}$ para un eigenvalor λ de la matriz $s_1 s_2$ en 1.
3. Muestra que un patrón de semillas de tipo finito es también 2-finito.

4.4. Tipo A

Sea T una triangulación del $(n + 3)$ -ágono y $Q(T)$ el carcaj asociado como en la Definición 2.7. La matriz de intercambio (no extendida) asociada $B(T) := B(Q(T)) = (b(T)_{ij})_{ij}$ que corresponde a la parte mutable de $Q(T)$ tiene entradas

$$b(T)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ y } j \text{ son dos lados de un triángulo en } T \text{ y } j \text{ sigue } i \text{ en el orden del reloj} \\ -1 & \text{si } i \text{ y } j \text{ son dos lados de un triángulo en } T \text{ y } i \text{ sigue } j \text{ en el orden del reloj} \\ 0 & \text{si } i \text{ y } j \text{ no corresponden al mismo triángulo en } T \end{cases} \quad (4.10)$$

Lema 4.29. Un patrón de semillas es de tipo A si y solo si una (o equivalentemente todas) de sus matrices de intercambio puede ser identificada con la matriz de intercambio $B(T)$ de una triangulación T del $(n + 3)$ -ágono.

Prueba. Un carcaj que es una orientación del diagrama de Dynkin de tipo A_n se puede obtener (como la parte mutable) de un carcaje de una triangulación del $(n + 3)$ -ágono donde todos los triángulos comparten a un vértice. Por ejemplo,

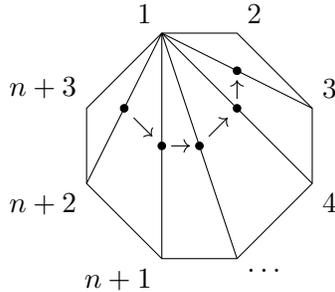


Figura 11: La triangulación T_0 del $n + 3$ -ágono.

Basta saber que todas las orientaciones de A_n son equivalentes bajo mutación, lo cual es una consecuencia del Corolario 2.17. \square

Recuerda la Grassmanniana $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+3})$ cuyos puntos corresponden a espacios vectoriales $V \subset \mathbb{C}^{n+3}$ de dimensión 2. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interior común en V , es decir para $u, v \in V$ el producto $\langle u, v \rangle$ es el determinante de la matriz con columnas u y v . El grupo SL_2 actúa en $V = \mathbb{C}^2$ cambiando de una base a otra. Esta acción se extiende a V^{n+3} y al campo de funciones racionales en V^{n+3} , un campo de funciones racionales en $2n + 6$ variables que corresponden a los entradas de $n + 3$ vectores $v_1, \dots, v_{n+3} \in V$. Sea \mathcal{F} el campo de funciones racionales invariantes bajo la acción de SL_2 . Las coordenadas de Plücker p_{ij} desde este punto de vista son los determinantes $\langle v_i, v_j \rangle$ en los $2n + 6$ variables.

En el Ejercicio 1.6 vimos que las coordenadas de Plücker satisfacen las relaciones de Plücker (1.4), es decir para todas las $1 \leq i < j < k < l \leq n + 3$:

$$p_{ij}p_{kl} - p_{ik}p_{jl} + p_{il}p_{jk} = 0$$

Definimos el **álgebra de Plücker** (o también conocido como el anillo de coordenadas de la Grassmanniana $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+3})$ bajo su encaje de Plücker) como

$$R_{2,n+3} := \mathbb{C}[p_{ij} : 1 \leq i < j \leq n + 3] / I_{2,n+3}$$

donde $I_{2,n+3}$ es el ideal generado de las relaciones de Plücker (1.4). Nota que $R_{2,n+3} \subset \mathcal{F}$ dado la identificación $p_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$.

Lema 4.30. Sea T una triangulación del $n + 3$ -ágono y sea $\overline{ij} \in T$ un arco de T o una arista del $n + 3$ -ágono. Entonces, la colección de las coordenadas de Plücker $P_T := \{p_{ij} : \overline{ij} \in T\}$ es un conjunto algebraicamente independiente en \mathcal{F} .

Prueba. Observamos que dado las relaciones de Plücker (1.4) cada coordenada de Plücker es una función racional en las coordenadas de P_T (compara con el Ejercicio 1.1). En particular, P_T es un conjunto de generadores de \mathcal{F} .

Para verificar que es algebraicamente independiente, notamos que la cardinalidad de P_T es $2n + 3$ (son n arcos interiores más $n + 3$ aristas del $n + 3$ -ágono). Como $2n + 3$ es también la dimensión de Krull de $R_{2,n+3}$ (o igualmente la dimensión del cono afín de $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^{n+3})$), es también el grade de trascendencia del \mathcal{F} sobre \mathbb{C} . \square

Teorema 4.31. Cada patrón de semillas de tipo **A** es de tipo finito.

Prueba. Primero mostramos que el patrón de semillas del anillo $R_{2,n+3}$ es de tipo finito. Dado una triangulación del $n + 3$ -ágono T asociamos una semilla en \mathcal{F} . Definimos

$$\tilde{\mathbf{x}}(T) := \{p_{ij} : \overline{ij} \in T\} \quad \text{y} \quad \tilde{B}(T) = \tilde{B}(Q(T)),$$

donde $Q(T)$ es el carcaj de T . Nota que $(\tilde{\mathbf{x}}(T), \tilde{B}(T))$ es una semilla en \mathcal{F} gracias al Lema 4.30. En el Lema 2.9 vimos que la mutación del carcaj corresponde al flip de la triangulación. Además vimos que las relaciones de Plücker corresponden a las relaciones de intercambio. En particular, las semillas asociadas a las triangulaciones son un patrón de semillas y como solo hay un número finito de triangulaciones, pues es de tipo finito.

Para ver que cada patrón de semillas de tipo **A** es de tipo finito basta ver que $\tilde{B}(T)$ tiene \mathbb{Z} -rango completo para luego usar el Corolario 4.27. Consideramos la triangulación T_0 de la Figura 11. Ordenamos los arcos $\overline{1, n+2}, \overline{1, n+1}, \dots, \overline{13}$ y las aristas del $n + 3$ -ágono $\overline{1, n+3}, \overline{n+3, n+2}, \dots, \overline{3, 2}, \overline{2, 1}$. Entonces la matriz de intercambio extendida es

$$\tilde{B}(T_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

donde la línea separa la $n \times n$ -matriz de intercambio de las filas que corresponden a las direcciones congeladas. Nota que la matriz de intercambio junto con la primera fila congelada ya tiene rango n . \square

Como corolario del Teorema 4.31 obtenemos varios resultados enumerativos sobre los patrones de tipo **A_n** que son independientes de las variables congeladas. La prueba del Teorema 4.31 nos da la correspondencia en la Tabla 3.

| | |
|--|--|
| semillas variables del conglomerado mutación | triangulaciones del $n + 3$ -ágono arcos del $n + 3$ -ágono flip |
|--|--|

Tabla 3: Correspondencia entre un patrón de semillas del tipo A_n y las triangulaciones del $n + 3$ -ágono.

Corolario 4.32. Cualquier patrón de semillas de tipo A tiene $\frac{n(n+3)}{2}$ variables de conglomerado distintos y $C_{n+1} = \frac{1}{n+2} \binom{2n+2}{n+1}$ semillas.

Ejercicio 4.7. Para probar el Corolario 4.32, pruebe las siguientes afirmaciones:

1. En un $n + 3$ -ágono hay $\frac{n(n+3)}{2}$ arcos distintos.
2. Sean d y d' dos arcos distintos del $n + 3$ -ágono. Verifica que las variables de conglomerado asociados son distintos.
3. El número de triangulaciones del $n + 3$ -ágono es el número de Catalán $C_{n+1} = \frac{1}{n+2} \binom{2n+2}{n+1}$.

4.5. Tipo C

Un patrón de semillas es de tipo C_n si (bajo permutación y signo) una de sus matrices de intercambio tiene la forma

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

El teorema principal de esta sección es:

Teorema 4.33. Cada patrón de semillas de tipo C es de tipo finito.

Para probarlo vamos a plegar un carcaj de tipo A_{2n-1} . Antes necesitamos algunos observaciones más sobre plegar carcajes.

Lema 4.34. Sea Q un carcaj con una acción de un grupo finito G tal que Q es globalmente plegable. Sea Q' un carcaj que se obtiene de Q agregando vértices congelados y flechas entre los vértices nuevos y los vértices mutables de Q . Extendimos la acción de G a Q' tal que cada vértice nuevo es fijo bajo la acción.

Entonces, también Q' es globalmente plegable con respecto a la acción de G .

Corolario 4.35. Sea Q un carcaj sin vértices congelados y globalmente plegable con respecto a la acción de un grupo finito G . Supongamos que cada patrón de semillas con matriz de intercambio inicial $B(Q)$ (independientemente de las direcciones congeladas) es de tipo finito.

Entonces cada patrón de semillas con matriz de intercambio inicial $B(Q)^G$ es de tipo finito.

Ejercicio 4.8. Pruebe el Lema 4.34 y el Corolario 4.35.

Prueba del Teorema 4.33. Vamos a obtener un carcaj inicial para plegar de una triangulación centralmente simétrica de un $2n + 2$ -ágono (que corresponde al tipo A_{2n-1}). La triangulación inicial es simétrica bajo rotación de 180° en el centro del arco de 1 a $n + 1$. Los demás arcos de la triangulación T_0 tienen como un extremo 1 o $n + 1$. Por ejemplo, para $n = 3$ tenemos la siguiente triangulación del octágono:

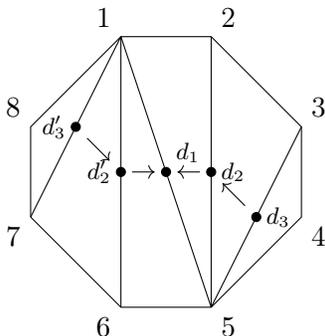


Figura 12: La triangulación inicial centralmente simétrica T_0 del $2n + 2$ -ágono, acá para $n = 3$.

En el carcaj $Q(T_0)$ etiquetamos los vértices que corresponden a arcos $\overline{i, n + 1}$ como i y a los vértices en la misma órbita bajo la simetría central como i' , como en la Figura 12. El carcaj $Q(T_0)$ es una orientación del diagrama de Dynkin de tipo A_{2n+2} con vértices (en orden) $n', \dots, 3', 2', 1, 2, 3, \dots, n$ y flechas orientadas al vértice central 1.

Sea $G = \mathbb{Z}_2$ actuando en $Q(T_0)$ de tal manera que intercambia los vértices i y i' para $i \in [2, n]$ y que fija 1.

Ejercicio 4.9. Verifica que $Q(T_0)$ es G -admisibles y que la matriz de intercambio plegada $B(Q(T_0))^G$ es como en (4.11).

Basta probar que $Q(T_0)$ es globalmente plegable. Las G -órbitas mutables son $\{i, i'\}$ para $i \in [2, n]$ y $\{1\}$. Cada mutación en una G -órbita mutable corresponde a una secuencia de flips en T_0 que transforma T_0 a otra triangulación centralmente simétrica. Y no es difícil ver que cada carcaj que corresponde a una triangulación centralmente simétrica es G -admisibles. En particular, $Q(T_0)$ es globalmente plegable. Combinando el Teorema 4.31 con el Corolario 4.35 terminamos la prueba. \square

4.6. Enumeración y tipo dos-finito

Esta sección tiene dos objetivos: uno, probar el Teorema 4.26 y dos, complementar la prueba de Teorema 4.24. Para establecer uno, vamos a usar resultados enumerativos sobre las álgebras de conglomerado de tipo finito.

Proposición 4.36. El número de semillas y el número de las variables de conglomerado de un álgebra de tipo finito son como en la Tabla 4:

La Proposición 4.36 se prueba caso por caso. Por ejemplo, en tipo A_n estos resultados se encuentran en el Corolario 4.32.

| X_n | A_n | B_n/C_n | D_n | E_6 | E_7 | E_8 | F_4 | G_2 |
|-----------------------------|-----------------------------------|-----------------|------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| #semillas | $\frac{1}{n+2} \binom{2n+2}{n+1}$ | $\binom{2n}{n}$ | $\frac{3n-2}{n} \binom{2n-2}{n-1}$ | 833 | 4160 | 25080 | 105 | 8 |
| # variables de conglomerado | $\frac{n(n+3)}{2}$ | $n(n+1)$ | n^2 | 42 | 70 | 128 | 28 | 8 |

Tabla 4: Enumeración de las semillas y las variables de conglomerado de tipo finito

Ejercicio 4.10. Prueba que los patrones de semillas de tipo C_n tienen $\binom{2n}{n}$ semillas y $n(n+1)$ variables de conglomerado usando el modelo geométrico de la sección §4.5.

Para los demás casos recomiendo la lectura de [FWZ16, §5]. El número de las variables de conglomerado se puede describir alternativamente usando los sistemas de raíces. Para el diagrama de Dynkin de tipo X_n sea Φ el conjunto de las raíces asociado. Entonces,

$$\# \left\{ \begin{array}{l} \text{variables de con-} \\ \text{glomerado de tipo } X_n \end{array} \right\} = \frac{1}{2} |\Phi| + n.$$

Más precisamente, existe una correspondencia entre las variables de conglomerado y las **raíces casi-positivas**, que son las raíces positivas (de las cuales hay $\frac{|\Phi|}{2}$) y las raíces simples negativas (de las cuales hay n). También se usa la notación $\Phi_{\geq -1}$. Más información en esta dirección se encuentra en [FZ03b].

Estamos preparados para la prueba del Teorema 4.26. Recuerda que B y B' son dos matrices de intercambio cuyas compañeras de Cartan son $A(B)$ y $A(B')$, ambas de tipo finito.

Prueba del Teorema 4.26. \Rightarrow Supongamos que $A(B)$ y $A(B')$ son del mismo tipo. Hay que mostrar que B y B' son equivalentes bajo mutación. Si $A(B)$ y $A(B')$ son simplemente lazados, entonces B y B' son orientaciones del mismo diagrama de Dynkin de tipo ADE. En este caso el Corolario 2.17 aplica. Si $A(B)$ y $A(B')$ no son simplemente lazados, es decir de tipo BCFG, entonces tenemos que ajustar los argumentos de la prueba del Ejercicio 2.5 usando los resultados de la sección §4.2. Los detalles son parte del Ejercicio 4.11.

\Leftarrow Supongamos que B y B' son equivalentes bajo mutación. Restringimos nuestra atención al caso que $A(B)$ y $A(B')$ corresponden a diagramas de Dynkin conexas (los demás casos se tratan en el Ejercicio 4.12). Sean X_n y X'_n los diagramas de Dynkin asociados. Dado la Proposición 4.36 el número de las semillas y las variables de conglomerado no depende de las variables congeladas. Además, con la única excepción de los tipos B_n y C_n , el número de semillas determina de manera única el tipo. Entonces, supongamos que $X_n = B_n$ y $X'_n = C_n$. Nota que si $n = 2$ no hay nada que mostrar pues $B_2 = C_2$. Vamos a probar la siguiente afirmación:

Afirmación: Un patrón de semillas no puede ser simultáneamente del tipo B_n y del tipo C_n con $n \geq 3$.

Prueba: Sin perder de generalidad podemos suponer que la matriz B' es como en (4.11). Entonces, sin perder de generalidad B es la matriz transpuesta B'^T (de tipo B_n). En la Proposición 2.24.1. vimos que los multiplicadores d_1, \dots, d_n que simetrizan B' son invariantes bajo mutación. Pero B' tiene multiplicadores $(2, 1, \dots, 1)$ mientras la matriz transpuesta B tiene multiplicadores $(1, 2, \dots, 2)$, una contradicción. \square

Ejercicio 4.11. Sean B y B' dos matrices de intercambio tal que sus compañeras de Cartan $A(B)$ y $A(B')$ corresponden al mismo diagrama de Dynkin no simplemente lazado. Entonces, B y B' son equivalentes bajo mutación.

Ejercicio 4.12. En este ejercicio tratamos el caso de un álgebra de conglomerado de tipo descomponible. Para un diagrama de Dynkin X_n sea $s(X_n)$ el número de semillas de un álgebra de conglomerado de tipo X_n y sea $vc(X_n)$ el número de las variables de conglomerado.

Pruebe las siguientes afirmaciones.

1. Si \mathcal{A} es un álgebra de conglomerado de tipo $X_n \sqcup Y_{n'}$, entonces el número de las variables de conglomerado de \mathcal{A} es $vc(X_n) + vc(Y_{n'})$ y el número de semillas de \mathcal{A} es $s(X_n) \cdot s(Y_{n'})$.
2. Si la compañera de Cartan de una matriz de intercambio es de tipo finito (posiblemente descomponible) entonces el patrón de semillas es de tipo finito. **Tipp: Puedes usar el hecho que cada patrón de semillas de tipo X_n es de tipo finito donde X_n es un diagrama de Dynkin conexo.**
3. Si B y B' son matrices de intercambio y $A(B)$ y $A(B')$ son sus compañeras de Cartan de tipo finito (posiblemente descomponibles), entonces $A(B)$ y $A(B')$ son del mismo tipo si y solo si B y B' son equivalentes bajo mutación.

Nos falta la otra implicación en el Teorema 4.24 de la clasificación de tipo finito que afirma que cada patrón de semillas de tipo finito tiene una matriz de intercambio B cuya compañera de Cartan $A(B)$ corresponde a un diagrama de Dynkin. Seguimos la referencia original [FZ03a] y el libro [FWZ16, §5.10]

El objetivo para el resto de esta sección es probar la siguiente Proposición:

Proposición 4.37. Sea $B = (b_{ij})$ una matriz casi-simetrizable con entradas enteros y 2-finita. Entonces existe una matriz B' equivalente a B bajo mutación tal que $A(B')$ es una matriz de Cartan de tipo finito.

Junto con el Ejercicio 4.6 y la ida de la prueba del Teorema 4.24 obtenemos lo siguiente como una consecuencia directa:

Corolario 4.38. Sea \tilde{B} una matriz de intercambio extendida y B la submatriz de intercambio. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. el patrón de semillas determinado por (\tilde{x}, \tilde{B}) es de tipo finito;
2. la matriz B es de 2-finita.

Para la prueba de la Proposición 4.37 vamos a usar la noción de 2-finito de la Definición 4.28 y carcajes con pesos que se pueden asociar a matrices casi-simetrizables como sigue:

Definición 4.39. Sea $B = (b_{ij})_{i,j \in [n]}$ una matriz casi-simetrizable. Definimos su **diagrama** $\Gamma(B)$ como el carcaj con pesos en las aristas con n vértices que tiene una arista de i a j si y solo si $b_{ij} > 0$ y esta arista tiene peso $|b_{ij}b_{ji}|$.

Nota que si B es casi-simétrica entonces $\Gamma(B) = Q$ es el carcaj con $B(Q) = Q$. En general, el diagrama de una matriz no determina la matriz, por ejemplo:

$$\Gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 1 \xrightarrow{4} 2.$$

Pero junto con los multiplicadores de la matriz B , el diagrama $\Gamma(B)$ si recupera la matriz: sea c_{ij} el peso de la flecha entre i y j en Γ con $c_{ij} < 0$ si en Γ tenemos $i \leftarrow j$. Entonces

$$b_{ij} = \operatorname{sgn}(c_{ij}) \sqrt{\frac{|c_{ij}|d_i}{d_j}}.$$

Así del diagrama $1 \xrightarrow{4} 2$ con los multiplicadores $(1, 1)$ se recupera $b_{12} = \sqrt{\frac{4}{1}} = 2$ y $b_{21} = -\sqrt{\frac{4}{1}} = -2$; pero con multiplicadores $(1, 4)$ tenemos $b_{12} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$ y $b_{21} = -\sqrt{\frac{4 \cdot 4}{1}} = -4$.

Ejercicio 4.13. El diagrama $\Gamma' := \Gamma(\mu_k(B))$ se determina de manera única del diagrama $\Gamma(B)$ y la dirección mutable k . Más precisamente Γ' se obtiene de Γ en los siguientes pasos:

1. la orientación de las flechas adyacentes a k se invierta y se quedan con los mismos pesos;
2. para cada camino $i \xrightarrow{a} k \xrightarrow{b} j$ distinguimos dos casos (ambos incluyen el caso que no existen flechas entre i y j):
 - si existe una flecha $i \xrightarrow{c} j$: en este caso en Γ' tenemos

$$\begin{array}{ccc} & k & \\ a \swarrow & & \nwarrow b \\ i & \xrightarrow{c'} & j \end{array} \quad \text{donde } c' = (\sqrt{ab} + \sqrt{c})^2;$$

- si existe una flecha $i \xleftarrow{c} j$: en este caso en Γ' tenemos

$$\begin{array}{ccc} & k & \\ a \swarrow & & \nwarrow b \\ i & \xleftarrow{c'} & j \end{array} \quad \text{donde } c' = (\sqrt{ab} - \sqrt{c})^2;$$

3. todos los demás flechas se quedan iguales.

Tipp: considera la matriz casi-simétrica $S(B) = (s_{ij})$ asociada con B con entradas $s_{ij} := \operatorname{sgn}(b_{ij})\sqrt{b_{ij}b_{ji}}$ y prueba que $\mu_k(S(B)) = S(\mu_k(B))$.

Nota que el Ejercicio 4.13 extiende la definición de matrices a la mutación de diagramas. Dos diagramas Γ' y Γ son **equivalentes bajo mutación** si existe una matriz casi-simetrizable B y secuencia de mutaciones $\mu_{k_1}, \dots, \mu_{k_s}$ tal que $\Gamma = \Gamma(B)$ y $\Gamma' = \Gamma(\mu_{k_1} \circ \dots \circ \mu_{k_s}(B))$. En este caso escribimos $\Gamma \sim \Gamma'$.

Definición 4.40. El diagrama $\Gamma(B)$ de una matriz casi-simetrizable B se llama 2-finito si y solo si para cada diagrama $\Gamma' \sim \Gamma$ los pesos de sus aristas son iguales a 1, 2 o 3. Si no es 2-finito lo llamamos 2-infinito.

Nota que $\Gamma(B)$ es 2-finito si y solo si B es 2-finita. En términos de diagramas podemos reformular la Proposición 4.37:

Proposición 4.41. Cada diagrama 2-finito es equivalente bajo mutación a una orientación de un diagrama de Dynkin donde los pesos representan los multiplicidades de las flechas.

Recuerda que todas las orientaciones de un diagrama de Dynkin son equivalentes bajo mutación (Corolario 2.17) y más general lo mismo vale para todas las orientaciones de un árbol.

Un **subdiagrama** de un diagrama es la subgráfica inducida con todos los pesos del diagrama en las aristas correspondientes.

Lema 4.42. Cada subdiagrama de un diagrama 2-finito es 2-finito.

Lema 4.43. Si B es 2-finita entonces las aristas de cada triangulo en $\Gamma(B)$ son orientados de manera cíclica.

Prueba. Supongamos al contrario que existen tres índices distintos i, j, k tal que $b_{ij}, b_{kj}, b_{ik} > 0$. Entonces para $B' = \mu_k(B)$ tenemos $b'_{ij} = b_{ij} + b_{ik}b_{kj} \geq 2$ y $b'_{ji} = b_{ji} - b_{jk}b_{ki} \leq -2$. Pues B no es 2-finita. \square

La estrategia para la prueba de la Proposición 4.41 es catalogar una lista suficientemente larga de diagramas que son 2-infinitos tal que cada gráfica que no contiene ninguno de esos diagramas de la lista como subdiagrama ya es una orientación de un diagrama de Dynkin. Empezamos con diagramas de forma de arboles y ciclos.

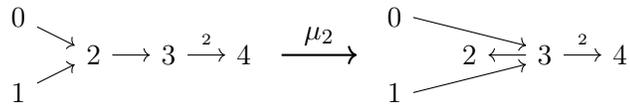
4.6.1. Los Árboles

Proposición 4.44. Cada diagrama 2-finito en forma de árbol es una orientación de un diagrama de Dynkin conexo.

En la prueba de la Proposición vamos a usar los siguientes gráficas: una gráfica es una **extensión de un diagrama de Dynkin** si no es un diagrama de Dynkin y cada subgráfica propia es un diagrama de Dynkin. Dada la lista de las diagramas de Dynkin conexas del Teorema 4.21 uno puede verificar que las extensiones que son árboles son las diagramas de la lista en la Figura 13.

Prueba de la Proposición 4.44. Probamos equivalentemente que cada orientación de una extensión de un diagrama de Dynkin es 2-infinito. Dado el Teorema 2.16 podemos escoger una orientación arbitrariamente en cada caso como todas las orientaciones son equivalentes bajo mutación. Dividimos la prueba en casos:

B/C/D: Sea $\mathbf{x}_n^{(1)}$ uno de los diagramas $\mathbf{B}_n^{(1)}, \mathbf{C}_n^{(1)}$ o $\mathbf{D}_n^{(1)}$ y fijamos la equiorientación de todas las arista de la izquierda así a la derecha. Sea $n_0 := \min\{n\}$ (es decir, $n_0 \in \{2, 3, 4\}$ respectativamente). Si $n > n_0$ podemos encontrar una subgráfica en un carcaj equivalente bajo mutación que corresponde es una orientación del diagrama $\mathbf{x}_{n-1}^{(1)}$. Por ejemplo, en el caso $\mathbf{B}_4^{(1)}$:



El subcarcaj con vértices 0, 1, 3, 4 obtenido del lado derecho es una orientación del diagrama $\mathbf{B}_3^{(1)}$. De manera similar podemos reducir a los casos $\mathbf{C}_2^{(1)}$ (con mutación μ_1) y $\mathbf{D}_4^{(1)}$ (con mutación μ_2). Entonces basta verificar cada uno de los casos $\mathbf{B}_3^{(1)}, \mathbf{C}_2^{(1)}$ y $\mathbf{D}_4^{(1)}$.

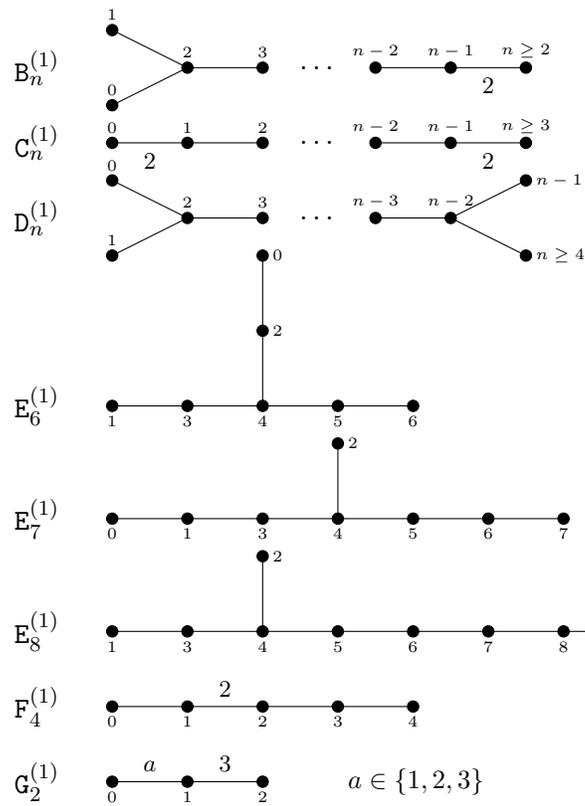


Figura 13: Las extensiones de los diagramas de Dynkin e que son arboles. Cada diagrama tiene $n + 1$ vértices y el vértice que no está en el diagrama de Dynkin correspondiente tiene el índice 0

Para el caso $D_4^{(1)}$ basta verificar que despues de la secuencia de mutaciones $\mu_1 \circ \mu_3 \circ \mu_2$ el carcaj contiene un triangulo no orientado de manera cíclico (Lema 4.43). Para el caso $C_2^{(1)}$ utilizamos lo siguiente:

Ejercicio 4.14. Si B es una matriz 2-finita entonces para todas las i, j, k distintas tenemos

$$b_{ij}b_{jk}b_{ki} = -b_{ji}b_{kj}b_{ik}.$$

Además los pesos de triángulos en $\Gamma(B)$ son $\{1, 1, 1\}$ o $\{2, 2, 1\}$. **Tipp: Sin perder de generalidad puedes suponer que B es una matriz 3×3 .**

En el caso $C_2^{(1)}$ la mutación en el vértice 1 da un diagrama de forma de un triangulo con pesos $\{2, 2, 4\}$ (Ejercicio 4.14). Para el caso $B_3^{(1)}$ observamos que mutación en el vértice 2 da un diagrama que contiene $C_2^{(1)}$ como subdiagrama (Lema 4.42).

F/G: Para $F_4^{(1)}$ orientamos todas las aristas de la izquierda a la derecha y mutamos $\mu_4 \circ \mu_3 \circ \mu_2 \circ \mu_1$. El diagrama obtenido contiene un subdiagrama inducido por los vértices 0,2,4 de forma $C_2^{(1)}$. Para el caso de $G_2^{(1)}$ orientamos los vértices de la izquierda a la derecha y aplicamos la mutación en el vértice 1. El resultado viola las obsevaciones del Ejercicio 4.14.

E Para los diagramas de tipo E uno puede probar de manera similar que $E_6^{(1)}/E_7^{(1)}/E_8^{(1)}$ son equivalente bajo mutación a diagrama con subdiagramas de tipo $D_5^{(1)}/E_6^{(1)}/E_1^{(1)}$ (más detalles en [FZ03a, §9.2]).

□

4.6.2. Los Ciclos

Seguimos con el caso de ciclos.

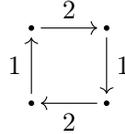
Proposición 4.45. Sea Γ un diagrama 2-finito cuyo gráfica subyacente es un ciclo con n vértices. Entonces, Γ cumple una de los siguientes casos

1. Γ es orientado de manera cíclica con todos los pesos igual a uno (en particular, $\Gamma \sim D_n$);
2. Γ es un triangulo orientado de manera ciclica con pesos $\{2, 2, 1\}$ (en particular, $\Gamma \sim B_3$);
3. Γ es un cuadrado orientado de manera cíclica con pesos $\{2, 1, 2, 1\}$ (en particular, $\Gamma \sim F_4$).

Prueba. Procedemos con inducción sobre n . Si $n = 3$ el Lemas 4.43 y el Ejercicio 4.14 implican la afirmación. Sea $n \geq 4$ y sea $k \in \Gamma$ un vértice con una flecha entrando y una flecha saliendo de él. Si tal vértice no existe podemos hacer una mutación que preserva la forma de la gráfica subyacente de Γ . Sea $\Gamma' := \mu_k(\Gamma)$ y $\Gamma'' := \Gamma' - \{v\}$ la subgráfica inducida. Por construcción Γ'' es un $(n - 1)$ -ciclo y por inducción es orientado de manera cíclica. Por lo tanto Γ es una orientación cíclica del n -ciclo.

Nota que el producto de todos los pesos de flechas en Γ'' coincide con el producto de todos los pesos de flechas en Γ : si en Γ tenemos $i \xrightarrow{a} k \xrightarrow{b} j$ entonces en Γ'' tenemos $i \xrightarrow{ab} j$ pues no hay flechas entre i y j en Γ (Ejercicio 4.13). Por inducción el producto de los pesos de flechas

en Γ'' es 1 (en el caso 1.) o 4 (en los casos 2. y 3.) En el primer caso tenemos que Γ es un n -ciclo orientado y según el Ejercicio 4.16 tenemos $\Gamma = S_{1,1,1}^{n-3} \sim T_{1,1,n-3} = D_n$. En el segundo o tercer caso, Γ tiene dos pesos 2 y los demás son 1. Como $n \geq 4$ tenemos dos casos: Si $n > 4$ observamos que Γ tiene una subgráfica del tipo $C_m^{(1)}$ para algún m adecuado. Por lo tanto la Proposición 4.44 implica que no es 2-finito. Si $n = 4$, entonces Γ es



Ejercicio 4.15. Muestra que en este caso $\Gamma \sim F_4$.

□

Prueba de la Proposición 4.41. Para la prueba de la Proposición 4.37 o equivalentemente la Proposición 4.41 nos falta probar que cada diagrama 2-finito es equivalente bajo mutación a uno orientación de un diagrama de Dynkin.

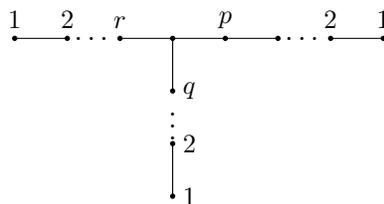
La prueba procede por inducción en el número de vértices del diagrama con la base de la inducción dado por $n = 3$. Para el paso de la inducción sea Γ un diagrama con $n + 1$ vértices y sea k un vértice tal que $\Gamma' := \Gamma - \{k\}$ es conexo. Entonces, Γ' es equivalente bajo mutación a una orientación de un diagrama de Dynkin. Además podemos suponer que es Γ' tiene una orientación específica pues todas las orientaciones de los diagrams de Dynkin son equivalentes bajo mutación (Corolario 2.17). La prueba procede en tres casos,

1. todos los vértices de Γ' tienen dos flechas adyacentes, pues Γ' es de tipo A_n, B_n, C_n, F_4, G_2
2. Γ' es de tipo D_n ;
3. Γ' es de tipo E_n con $n \in \{6, 7, 8\}$.

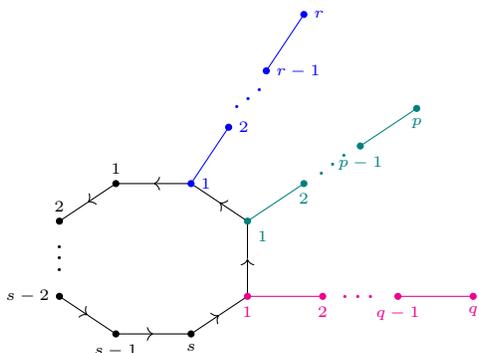
En todos los casos uno analiza la vecindad del vértice v en Γ y usa los resultados anteriores para excluir todas las configuraciones que inducen subdiagramas 2-infinitos. Dejamos los detalles de la prueba como un ejercicio o alternativamente como un lectura de [FZ03a, §9.4]. □

4.6.3. Ejercicios

Ejercicio 4.16. Sean $p, q, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $T_{p,q,r}$ la gráfica con $p + q + r + 1$ vértices que se forma de tres cadenas de gráficas de tipo A_{r+1}, A_{p+1} y A_{q+1} plegadas en un vértice:



Sean $p, q, r \in \mathbb{Z}_{> 0}$ y $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Definimos el diagrama $S_{r,p,q}^s$ con $p + q + r + s$ vértices que consiste de un $s + 3$ -ciclo orientado y tres gráficas de tipo A_{r-1}, A_{p-1} y A_{q-1} plegadas a tres vértices consecutivos del ciclo:



Todos los pesos en las flechas son uno y las orientaciones de las aristas en los subdiagramas de tipo A son arbitrarias. Muestra que el diagrama $S_{r,p,q}^s$ es equivalente bajo mutación a un diagrama de tipo $T_{p+r-1,q,s}$.

5. Coeficientes

En esta sección vamos a cambiar nuestro punto de vista a las álgebras de conglomerado un poco. Analizamos de nuevo que es la información necesaria para determinar un álgebra de conglomerado de manera única y en el camino vamos a descubrir que son las álgebras de conglomerado más allá del tipo geométrico. Antes necesitamos un poco de notación sobre semicampos:

5.1. Semicampos

Definición 5.1. Un **semicampo** es un triple $(\mathbb{P}, \oplus, \cdot)$ donde (\mathbb{P}, \cdot) es un grupo abeliano multiplicativo junto con una operación \oplus que se llama la **adición auxiliar** que es conmutativa, asociativa, y distributiva con respecto a la multiplicación. Con $\mathbb{Z}\mathbb{P}$ denotamos el anillo del grupo (\mathbb{P}, \cdot) con campo de funciones asociados $\mathbb{Q}\mathbb{P}$.

Cabe mencionar que (\mathbb{P}, \oplus) no necesariamente es un grupo, pero es un semigrupo. Como \mathbb{P} tiene inversos multiplicativos, no contiene una unidad aditiva.

Definición 5.2. El **semicampo tropical** $\text{Trop}(y_1, \dots, y_n)$ es un grupo multiplicativo generado de manera libre de variables y_1, \dots, y_n con la adición auxiliar:

$$\prod_i y_i^{a_i} \oplus \prod_i y_i^{b_i} = \prod_i y_i^{\min\{a_i, b_i\}} \quad (5.1)$$

Nota que $\mathbb{P} = \text{Trop}(y_1, \dots, y_n)$ corresponde a monomials de Laurent en las variables y_1, \dots, y_n con la multiplicación usual y la adición auxiliar. Pues el anillo $\mathbb{Z}\mathbb{P} = \mathbb{Z}[\mathbb{P}]$ son polinomios de Laurent en las variables y_1, \dots, y_n con coeficientes enteros y su campo de fracciones $\mathbb{Q}\mathbb{P} = \mathbb{Q}(y_1, \dots, y_n)$.

Ejercicio 5.1. La adición auxiliar del semicampo tropical como definida en (5.1) es conmutativa, asociativa y distributiva con respecto a la multiplicación usual, es decir: $(p \oplus q)r = pr \oplus qr$. En particular, $\text{Trop}(y_1, \dots, y_n)$ es un semicampo.

Ejercicio 5.2. Muestra que $\mathbb{Z}\mathbb{P}$ es un dominio integral para cualquier \mathbb{P} .

Sea $\tilde{B} = (b_{ij})_{i \in [n+m], j \in [n]}$ una matriz de intercambio extendida. Definimos una tupla $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \text{Trop}(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})^n$:

$$y_j := \prod_{i=n+1}^{n+m} x_i^{b_{ij}}. \quad (5.2)$$

Afirmamos que la matriz de intercambio B y la tupla $(y_1, \dots, y_n) \in \text{Trop}(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})^n$ capturan la misma información que la matriz de intercambio extendida \tilde{B} analizando la formula de intercambio para una dirección mutable k

$$x_k x'_k = \prod_{i=1}^{n+m} x_i^{[b_{ik}]_+} + \prod_{i=1}^{n+m} x_i^{[-b_{ik}]_+} = \frac{y_k}{y_k \oplus 1} \prod_{i=1}^n x_i^{[b_{ik}]_+} + \frac{1}{y_k \oplus 1} \prod_{i=1}^n x_i^{[-b_{ik}]_+}, \quad (5.3)$$

pues con la definición de la adición auxiliar tropical tenemos

$$\frac{y_k}{y_k \oplus 1} = \frac{\prod_{i=n+1}^{n+m} x_i^{b_{ik}}}{\prod_{i=n+1}^{n+m} x_i^{b_{ik}} \oplus 1} \stackrel{(5.2)}{=} \prod_{i=n+1}^{n+m} x_i^{[b_{ik}]_+}.$$

El comportamiento de los coeficientes (y_1, \dots, y_n) bajo mutación se puede formalizar:

Proposición 5.3. Sea $\tilde{B} = (b_{ij})_{i \in [n+m], j \in [n]}$ una matriz de intercambio extendida y $B' = \mu_k(B)$ para una dirección mutable k . Sean (y_1, \dots, y_n) y (y'_1, \dots, y'_n) las tuplas de elementos de $\text{Trop}(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ asociados como en (5.2). Entonces,

$$y'_j = \begin{cases} y_k^{-1} & j = k, \\ y_j \left(1 \oplus y_k^{\text{sgn}(-b_{kj})}\right)^{-b_{kj}} & j \neq k. \end{cases} \quad (5.4)$$

En particular, la matriz de intercambio $B = (b_{ij})_{i, j \in [n]}$ junta con la tupla $(y_1, \dots, y_n) \in \text{Trop}(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})^n$ determina de manera única el álgebra de conglomerado $\mathcal{A}_{\tilde{B}}$. En lo que sigue vamos a ver como se definen álgebras de conglomerado que no son de tipo geométrico generalizando la formula (5.4) y cambiando el semicampo $\text{Trop}(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$.

Para probar la Proposición 5.3 vamos a usar una construcción relacionada y de gran importancia para el resto de este capítulo:

Teorema 5.4. Sean $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{B})$ y $(\tilde{\mathbf{x}}', \tilde{B}')$ dos semillas etiquetadas relacionadas por la mutación en la dirección mutable k . Sean $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_{n+m})$, $\tilde{\mathbf{x}}' = (x'_1, \dots, x'_{n+m})$ y $\tilde{B} = (b_{ij})$, $\tilde{B}' = (b'_{ij})$. Definimos las n -tuplas $\hat{\mathbf{y}} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)$ y $\hat{\mathbf{y}}' = (\hat{y}'_1, \dots, \hat{y}'_n)$:

$$\hat{y}_j := \prod_{i=1}^{n+m} x_i^{b_{ij}} \quad \text{y} \quad \hat{y}'_j := \prod_{i=1}^{n+m} x'_i{}^{b'_{ij}}. \quad (5.5)$$

Entonces la tupla $\hat{\mathbf{y}}'$ se obtiene de $\hat{\mathbf{y}}$ de la siguiente manera:

$$\hat{y}'_j = \begin{cases} \hat{y}_k^{-1} & j = k, \\ \hat{y}_j \left(1 + \hat{y}_k^{\text{sgn}(-b_{kj})}\right)^{-b_{kj}} & j \neq k. \end{cases} \quad (5.6)$$

Prueba. Si $j = k$ calculamos

$$\hat{y}'_k = \prod_{i=1}^{n+m} x_i^{b'_{ik}} = \prod_{i \neq k} x_i^{b'_{ik}} = \prod_{i \neq k} x_i^{-b_{ik}} = \hat{y}_k^{-1}.$$

Para $j \neq k$ distinguimos dos casos: $b_{kj} \geq 0$ y $b_{kj} \leq 0$. Si $b_{kj} \leq 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \hat{y}'_j &= x_k^{b'_{kj}} \prod_{i \neq k} x_i^{b'_{ij}} = x_k^{-b_{kj}} \prod_{i \neq k} x_i^{b_{ij}} \prod_{b_{ik} < 0} x_i^{-b_{ik} b_{kj}} \\ &= x_k^{b_{kj}} \left(\prod_{b_{ik} > 0} x_i^{b_{ik}} + \prod_{b_{ik} < 0} x_i^{-b_{ik}} \right)^{-b_{kj}} \prod_{i \neq k} x_i^{b_{ij}} \prod_{b_{ik} < 0} x_i^{-b_{ik} b_{kj}} \\ &= \hat{y}_j \left(\prod_{i=1}^{n+m} x_i^{b_{ik}} + \prod_{b_{ik} < 0} x_i^{-b_{ik} + b_{ik}} \right)^{-b_{kj}} = \hat{y}_j (\hat{y}_k + 1)^{-b_{kj}}. \end{aligned}$$

Si $b_{kj} \geq 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \hat{y}'_j &= x_k^{b'_{kj}} \prod_{i \neq k} x_i^{b'_{ij}} = x_k^{-b_{kj}} \prod_{i \neq k} x_i^{b_{ij}} \prod_{b_{ik} > 0} x_i^{b_{ik} b_{kj}} \\ &= x_k^{b_{kj}} \left(\prod_{b_{ik} > 0} x_i^{b_{ik}} + \prod_{b_{ik} < 0} x_i^{-b_{ik}} \right)^{-b_{kj}} \prod_{i \neq k} x_i^{b_{ij}} \prod_{b_{ik} < 0} x_i^{-b_{ik} b_{kj}} \\ &= \hat{y}_j \left(\prod_{b_{ik} > 0} x_i^{b_{ik} - b_{ik}} + \prod_{i=1}^{n+m} x_i^{-b_{ik}} \right)^{-b_{kj}} = \hat{y}_j (1 + \hat{y}_k^{-1})^{-b_{kj}}. \end{aligned}$$

□

Usando el Teorema 5.4 podemos recurrir a la Proposición 5.3, solo necesitamos acordarnos del semicampo de funciones racionales libre de subtracciones:

$$\mathbb{Q}_{\text{sf}}(x_1, \dots, x_n) = \left\{ \frac{f}{g} \in \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n) : \exists f', g' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[x_1, \dots, x_n] \text{ t.q. } \frac{f}{g} \sim \frac{f'}{g'} \right\}.$$

Este semicampo se llama el **semicampo universal** por la siguiente propiedad universal que satisface:

Lema 5.5. Sea \mathbb{P} un semicampo y $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}$. Entonces existe un único homomorfismo de semicampos $\mathbb{Q}_{\text{sf}}(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \mathbb{P}$ tal que $x_i \mapsto p_i$.

Ejercicio 5.3. Prueba el Lema 5.5. En particular, muestra que cada identidad en el semicampo universal es válida en cualquier otro semicampo.

Prueba de la Proposición 5.3. Sea $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_{n+m})$ una colección de variables y definimos el homomorfismo de semicampos $f : \mathbb{Q}_{\text{sf}}(x_1, \dots, x_{n+m}) \rightarrow \text{Trop}(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$:

$$f(x_i) := \begin{cases} 1 & i \leq n \\ x_i & i > n \end{cases}$$

El homomorfismo f es único (Lema 5.5). La mutación en una dirección mutable k de $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{B})$ nos da una semilla $(\tilde{\mathbf{x}}', \tilde{B}')$ con $x_k x'_k = M_1 + M_2$. Nota que los dos monomios M_1 y M_2 son coprimos y además no tienen ninguna variable congelada x_i en común. Aplicamos el homomorfismo de semicampos y obtenemos

$$1 \cdot f(x'_k) = f(M_1) \oplus f(M_2) \stackrel{(5.1)}{=} 1$$

En particular, todas las variables mutables en $\tilde{\mathbf{x}}$ y $\tilde{\mathbf{x}}'$ tienen imágenes uno bajo f . Entonces $f(\hat{\mathbf{y}}) = \mathbf{y}$ y $f(\hat{\mathbf{y}}') = \mathbf{y}'$. Nota que la relación de mutación de los \hat{y}_j (5.6) se satisface en $\mathbb{Q}_{\text{sf}}(x_1, \dots, x_{n+m})$. En particular, aplicando f a esas relaciones obtenemos las relaciones (5.4) en $\text{Trop}(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$. \square

5.2. Y-patrones y álgebras de conglomerado con coeficientes

En esta sección formalizamos las observaciones que hicimos en la sección anterior y introducimos el concepto de Y -patrones. Nos van a servir como coeficientes (generalizando las variables congeladas) para las álgebras de conglomerado en plena generalidad.

Definición 5.6. Una Y -semilla etiquetada (casi-simetrizable) en un semicampo \mathbb{P} es un par (\mathbf{y}, B) donde

- $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ es una tupla de elementos en \mathbb{P} ;
- $B = (b_{ij})_{i,j \in [n]}$ es una matriz casi-simetrizable con entradas enteros.

El **rango** de la Y -semilla es n .

Definición 5.7. Sea (\mathbf{y}, B) una Y -semilla etiquetada en \mathbb{P} . La mutación $\mu_k(\mathbf{y}, B)$ en la dirección $k \in [n]$ es la Y -semilla (\mathbf{y}', B') obtenida de (\mathbf{y}, B) de la siguiente manera:

1. $B' = \mu_k(B)$ según la formula para mutación de matrices (2.5);
2. la tupla $\mathbf{y}' = (y'_1, \dots, y'_n)$ se obtiene de $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$:

$$y'_j = \begin{cases} y_k^{-1} & j = k \\ y_j \left(y_k^{\text{sgn}(-b_{kj})} \oplus 1 \right)^{-b_{kj}} & j \neq k, \end{cases} \quad (5.7)$$

donde \oplus es la adición auxiliar de \mathbb{P} .

Ejercicio 5.4. Muestra que la mutación de Y -semillas es una involución.

Definición 5.8. Un Y -patrón es una asignación de una Y -semilla $(\mathbf{y}(t), B(t))$ en \mathbb{P} de rango n a cada vértice $t \in \mathbb{T}^n$, tal que para cada arista $t \xrightarrow{k} t'$ en \mathbb{T}^n tenemos

$$\mu_k(\mathbf{y}(t), B(t)) = (\mathbf{y}(t'), B(t')).$$

Nota que como en el caso de patrones de semillas, también un Y -patrón se determina de manera única por una Y -semilla inicial.

| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----------|-------|--|---|---|--|-------|
| $y_{1;t}$ | y_1 | y_1^{-1} | $\frac{y_2}{y_1 y_2 \oplus y_1 \oplus 1}$ | $\frac{y_1 y_2 \oplus y_1 \oplus 1}{y_2}$ | y_2^{-1} | y_2 |
| $y_{2;t}$ | y_2 | $\frac{y_1 y_2}{y_1 \oplus 1}$ | $\frac{y_1 \oplus 1}{y_1 y_2}$ | $\frac{1}{y_1 (1 \oplus y_2)}$ | $y_1 (1 \oplus y_2)$ | y_1 |
| $x_{1;t}$ | x_1 | $\frac{y_1 + x_2}{x_1 (1 \oplus y_1)}$ | $\frac{y_1 + x_2}{x_1 (1 \oplus y_1)}$ | $\frac{x_1 y_2 + 1}{x_2 (1 \oplus y_2)}$ | $\frac{x_1 y_2 + 1}{x_2 (1 \oplus y_2)}$ | x_2 |
| $x_{2;t}$ | x_2 | x_2 | $\frac{x_1 y_1 y_2 + x_2 + y_1}{x_1 x_2 (1 \oplus y_1 \oplus y_1 y_2)}$ | $\frac{x_1 y_1 y_2 + x_2 + y_1}{x_1 x_2 (1 \oplus y_1 \oplus y_1 y_2)}$ | x_1 | x_1 |

Tabla 5: Un Y -patrón y un patrón de semillas en tipo A_2 (ver el Ejemplo 5.9 y el Ejemplo 5.15).

Ejemplo 5.9. Sea $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz del carcaj $1 \rightarrow 2$ de tipo A_2 y sea $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ una tupla en un semicampo \mathbb{P} . Asociamos la Y -semilla (\mathbf{y}, B) al vértice 0 del árbol $\mathbb{T}^2 \equiv \mathbb{Z}$. Para $t \in \mathbb{Z}$ escribimos $\mathbf{y}(t) = (y_{1;t}, y_{2;t})$ y tenemos $B(t) = (-1)^t B$ (compara con el Ejemplo 2.32). Calculamos para t par

$$y_{1;t+1} = \begin{cases} y_{1;t}^{-1} & t \text{ par} \\ y_{1;t} (y_{2;t}^{-1} \oplus 1)^{-1} & t \text{ impar} \end{cases} \quad \text{y} \quad y_{2;t+1} = \begin{cases} y_{2;t} (y_{1;t}^{-1} \oplus 1)^{-1} & t \text{ par} \\ y_{2;t}^{-1} & t \text{ impar} \end{cases}.$$

Así tenemos, por ejemplo para la primera mutación en 1:

$$\mu_1(y_1) = \frac{1}{y_1}, \quad \text{y} \quad \mu_1(y_2) = y_2 (y_1^{-1} \oplus 1)^{-1} = \frac{y_2}{y_1^{-1} \oplus 1} = \frac{y_1 y_2}{1 \oplus y_1},$$

y para la siguiente mutación en 2:

$$\begin{aligned} \mu_2(y_{1;1}) &= y_{1;1} (1 \oplus y_{2;1}^{-1})^{-1} = \frac{1}{y_1} \left(1 \oplus \frac{y_1 \oplus 1}{y_1 y_2} \right)^{-1} = \frac{y_2}{1 \oplus y_1 \oplus y_1 y_2}, \\ \mu_2(y_{2;1}) &= y_{2;1}^{-1} = \frac{1 \oplus y_1}{y_1 y_2}. \end{aligned}$$

Obtenemos el Y -patrón como en la Tabla 5. Nota que la periodicidad coincide con la 5-precocidad en el Ejemplo 2.32. Observamos también que los elementos de un Y -patrón en general no satisfacen un fenómeno de Lauerent. Por ejemplo, si $\mathbb{P} = \mathbb{Q}_{\text{sf}}(y_1, y_2)$ entonces

$$y_{1;2} = \frac{y_2}{y_1 y_2 + y_1 + 1} \notin \mathbb{Z}[y_1^{\pm 1}, y_2^{\pm 1}].$$

Hay varios aspectos en las cuales la mutación de semillas y la mutación de Y -semillas son distintos. Por ejemplo, en la mutación de semillas en una dirección k solo cambia la variable de conglomerado x_k y todos los demás siguen iguales. Observamos el mismo fenómeno en la mutación tropical de los f_i 's (3.13).

La mutación de Y -semillas se comporta diferente: las variables que cambian bajo mutación en una dirección k son y_k y todos los y_j con $b_{kj} \neq 0$. Si la matriz de intercambio B viene de

un carcaj Q , observamos que se transforman la variable y_k y todos las variable y_j donde j es en la **vecindad de k** en Q , es decir existe una flecha entre j y k . Recuerda que la mutación de los datos de una semilla en el contexto geométrico muestra un comportamiento similar (3.11). Además no hay direcciones congeladas en Y -patrones. Esta observación se explica con el siguiente Corolario:

- Corolario 5.10.** 1. Las tuplas $(y_1, \dots, y_n) \in \text{Trop}(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})^n$ asociados a una matriz de intercambio extendida \tilde{B} como en la Proposición 5.3 juntas con las matrices de intercambio B forman un Y -patrón en el semicampo $\text{Trop}(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$.
2. Las tuplas $\hat{\mathbf{y}} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)$ asociadas a semillas etiquetadas $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{B})$ como en el Teorema 5.4 juntas con las matrices de intercambio B forman un Y -patrón en el semicampo $\mathbb{Q}_{\text{sf}}(x_1, \dots, x_{n+m})$.

Recuerda el campo \mathcal{F} ambiente.

Definición 5.11. Una **semilla etiquetada** en el campo \mathcal{F} es un triple $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ donde

- (\mathbf{y}, B) es una Y -semilla en un semicampo \mathbb{P} ;
- $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ es una n -tupla en \mathcal{F} que es un conjunto de generadores libre, es decir los elementos de \mathbf{x} son algebraicamente independiente sobre $\mathbb{Q}\mathbb{P}$ y $\mathcal{F} \cong \mathbb{Q}\mathbb{P}(x_1, \dots, x_n)$.

Los elementos de la tupla \mathbf{x} son las **variables de conglomerado**, los elementos de \mathbf{y} se llaman los **coeficientes** y B es la **matriz de intercambio**.

Para verificar que las semillas de tipo geométrico de la Definición 2.27 son un caso especial de la Definición 5.11 con $\mathbb{P} = \text{Trop}(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ basta ver que los campos ambiente de las dos definiciones coinciden:

$$\mathbb{Q}\mathbb{P}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{Q}(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_{n+m}).$$

Definición 5.12. Sea $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ una semilla como en la Definición 5.11 de rango n y $k \in [n]$. La **mutación** en la dirección k de $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ es una semilla $\mu_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B) = (\mathbf{x}', \mathbf{y}', B')$ obtenida de la siguiente manera:

1. $B' = \mu_k(B)$ según (2.5);
2. $\mathbf{y}' = \mu_k(\mathbf{y})$ según (5.7);
3. $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)$ donde $x'_j = x_j$ si $j \neq k$ y para $j = k$ satisface la siguiente **relación de intercambio**:

$$x_k x'_k = \frac{y_k}{y_k \oplus 1} \prod x_i^{[b_{ik}]_+} + \frac{1}{y_k \oplus 1} \prod x_i^{[-b_{ik}]_+} \quad (5.8)$$

La relación de intercambio se puede simplificar usando la notación $p_k^+ = \frac{y_k}{y_k \oplus 1}$ y $p_k^- = \frac{1}{y_k \oplus 1}$:

$$x_k x'_k = p_k^+ \prod x_i^{[b_{ik}]_+} + p_k^- \prod x_i^{[-b_{ik}]_+}. \quad (5.9)$$

La $2n$ -tupla $\mathbf{p} = (p_1^+, p_1^-, \dots, p_n^+, p_n^-)$ satisface la **condición normalizando** $p_k^+ \oplus p_k^- = 1$.

Nota que la relación de intercambio 5.8 generaliza la relación de intercambio 2.8 según el calculo que hicimos en (5.3) y el Corolario 5.10.1:

Corolario 5.13. 1. Sea $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{B})$ una semilla de tipo geométrico según la Definición 2.27 y sea $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ la tupla asociada en $\text{Trop}(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})^n$ de (5.2). Entonces, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ es una semilla en el sentido de la Definición 5.11 y para cada dirección mutable k con $\mu_k(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{B}) = (\tilde{\mathbf{x}}', \tilde{B}')$ y tupla asociada $\mathbf{y}' = (y'_1, \dots, y'_n)$ tenemos $\mu_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B) = (\mathbf{x}', \mathbf{y}', B')$.

2. Sea $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{B})$ una semilla de tipo geométrico según la Definición 2.27 y sea $\hat{\mathbf{y}} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)$ la tupla asociada en $\mathbb{Q}_{\text{sf}}(x_1, \dots, x_{n+m})^n$ de (5.5). Entonces, $(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}, B)$ es una semilla en el sentido de la Definición 5.11. y para cada dirección mutable k con $\mu_k(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{B}) = (\tilde{\mathbf{x}}', \tilde{B}')$ y tupla asociada $\hat{\mathbf{y}}' = (\hat{y}'_1, \dots, \hat{y}'_n)$ tenemos $\mu_k(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}, B) = (\mathbf{x}', \hat{\mathbf{y}}', B')$.

Definición 5.14. Un **patrón de semillas de rango n** es una asignación de una semilla etiquetada $(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), B(t))$ a cada vértice t del árbol n -regular \mathbb{T}_n tal que para arista $t \xrightarrow{k} t'$ en \mathbb{T}_n tenemos

$$\mu_k(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), B(t)) = (\mathbf{x}(t'), \mathbf{y}(t'), B(t')).$$

Usamos la notación $\mathbf{x}(t) = (x_{1;t}, \dots, x_{n;t})$, $\mathbf{y}(t) = (y_{1;t}, \dots, y_{n;t})$ y $B(t) = (b_{ij}^t)_{i,j \in [n]}$.

Ejercicio 5.5. La condición normalizando junto con la mutación de Y -semillas determina de manera única las tuplas $\mathbf{p}(t) = (p_{1;t}^+, p_{1;t}^-, \dots, p_{n;t}^+, p_{n;t}^-)$ con $p_{k;t}^+ := \frac{y_{k;t}}{y_{k;t} \oplus 1}$ y $p_{k;t}^- := \frac{1}{y_{k;t} \oplus 1}$.

Ejemplo 5.15. Sean $Q = 1 \rightarrow 2$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ una dupla en un semicampo \mathbb{P} . Sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ un conglomerado en $\mathcal{F} = \mathbb{Q}\mathbb{P}(x_1, x_2)$. Calculamos el patrón de semillas asociado, tenemos

$$\mu_1(y_1) = \frac{1}{y_1}, \quad \mu_1(y_2) = \frac{y_1 y_2}{y_1 \oplus 1}, \quad \mu_1(x_1) = \frac{1}{x_1} \left(\frac{y_1}{y_1 \oplus 1} + \frac{x_2}{y_1 \oplus 1} \right) = \frac{y_1 + x_2}{x_1(y_1 \oplus 1)},$$

donde las mutaciones de los y_i 's son como en la Tabla 5 y el Ejemplo 5.9. Para la siguiente mutación en 2 obtenemos

$$\mu_2(x_{2;1}) = \frac{1}{x_2} \left(\frac{y_{2;1}}{1 \oplus y_{2;1}} + \frac{x_{1;1}}{1 \oplus y_{2;1}} \right) = \frac{1}{x_2} \left(\frac{\frac{y_1 y_2}{1 \oplus y_1}}{1 \oplus \frac{y_1 y_2}{1 \oplus y_1}} + \frac{\frac{y_1 + x_2}{x_1(1 \oplus y_1)}}{1 \oplus \frac{y_1 y_2}{1 \oplus y_1}} \right) = \frac{x_1 y_1 y_2 + y_1 + x_2}{x_1 x_2 (1 \oplus y_1 \oplus y_1 y_2)}.$$

Nota que todas las variables de conglomerado son polinomios de Laurent en x_1, x_2 con coeficientes en $\mathbb{Z}\mathbb{P}$.

Definición 5.16. Dado un patrón de semillas $\mathcal{P} = \{(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), B(t))\}_{t \in \mathbb{T}_n}$ sea

$$\mathcal{X} = \bigcup_{t \in \mathbb{T}_n} \mathbf{x} = \{x_{i;t} : t \in \mathbb{T}_n, 1 \leq i \leq n\}.$$

El **álgebra de conglomerado** asociado es el $\mathbb{Z}\mathbb{P}$ -subálgebra de \mathcal{F} generado por \mathcal{X} :

$$\mathcal{A}_{\mathcal{P}} = \mathbb{Z}\mathbb{P}[\mathcal{X}] \subset \mathcal{F}$$

donde \mathbb{P} es el semicampo del Y -patrón $\{(\mathbf{y}(t), B(t))\}_{t \in \mathbb{T}_n}$ y \mathcal{F} es el campo de funciones racionales en n variables con coeficientes en $\mathbb{Q}\mathbb{P}$. El álgebra de conglomerado (o el Y -patrón o el patrón de semillas) es de **tipo geométrico** si \mathbb{P} es un semicampo tropical.

Ejemplo 5.17. Seguimos con el Ejemplo 5.15. El álgebra de conglomerado asociado a un patrón de semillas de tipo \mathbf{A}_2 con coeficientes en un semicampo arbitrario \mathbb{P} con semilla inicial $((x_1, x_2), (y_1, y_2), 1 \rightarrow 2)$

$$\mathcal{A} = \mathbb{Z}\mathbb{P} \left[x_1, x_2, \frac{y_1 + x_2}{x_1(1 \oplus y_1)}, \frac{x_1 y_1 y_2 + x_2 + y_1}{x_1 x_2 (1 \oplus y_1 \oplus y_1 y_2)}, \frac{x_1 y_2 + 1}{x_2(1 \oplus y_2)} \right] \subset \mathbb{Q}\mathbb{P}(x_1, x_2)$$

Nota que los denominadores de las expresiones solo dependen de la adición auxiliar \oplus de \mathbb{P} y los numeradores solo dependen de la adición usual en \mathcal{F} . Este fenómeno se llama la **separación de la adición** y probar lo en general es el tema de la siguiente sección.

Además podemos observar que $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}\mathbb{P}[x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}]$, es decir \mathcal{A} satisface un fenómeno de Laurent similar al fenómeno de Laurent para álgebras de conglomerado de tipo geométrico que vimos en el Teorema 3.1.

En su primer artículo Fomin y Zelevinsky prueban el fenómeno de Laurent para álgebras de conglomerado con coeficientes arbitrarios [FZ02, Theorem 3.1]:

Teorema 5.18 (El fenómeno de Laurent). El álgebra de conglomerado \mathcal{A} asociado con una semilla inicial $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, B)$ satisface el fenómeno de Laurent, es decir para \mathbb{P} el semicampo subyacente y $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ tenemos

$$\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}\mathbb{P}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}].$$

Es decir, cada variable de conglomerado es un polinomio de Laurent en las variables iniciales x_1, \dots, x_n con coeficientes en el anillo $\mathbb{Z}\mathbb{P}$.

Para álgebras de conglomerado de tipo geométrico podemos refinar el resultado:

Proposición 5.19. [Proposición 11.2 en [FZ03a]] Sea \mathcal{A} un álgebra de conglomerado de tipo geométrico de rango n con semicampo $\mathbb{P} = \text{Trop}(p_j : j \in J)$ y sea $\mathcal{P} := \{p_{i,t}^+, p_{i,t}^- : 1 \leq i \leq n, t \in \mathbb{T}_n\}$. Si \mathcal{A} satisface

1. $p_j \in \mathcal{P}$ para todas las $j \in J$, y
2. cada $p \in \mathcal{P}$ es un monomio con coeficientes no-negativas en los generadores $\{p_j : j \in J\}$.

Entonces, cada variable de conglomerado es un polinomio de Laurent en las variables de conglomerado de cualquier semilla con coeficientes en $\mathbb{Z}[\mathcal{P}]$.

5.2.1. Ejercicios

Ejercicio 5.6. Prueba la Proposición 5.19, es decir prueba que para cada generador p_j de \mathbb{P} y cada variable de conglomerado z que z es un polinomio en p_j . **Tipp:** usa inducción sobre la distancia entre una semilla que contiene la variable z y la semilla inicial como en la prueba del Teorema 3.1.

Ejercicio 5.7. Sean $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}^1$ cuatro puntos en la línea proyectiva. Entonces, $P_i = [a_i : b_i]$ en coordenadas proyectivas. Definimos

$$Y(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{P_{14}P_{23}}{P_{12}P_{34}}$$

donde $P_{ij} := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix}$. Nota que Y está relacionada a la razón cruzada convencional bajo $Y(P_1, P_2, P_3, P_4) = -(P_1, P_3; P_4, P_2)$. La razón cruzada es una invariante de cuatro puntos colineales y se puede generalizar para n -tuplas de puntos P_1, \dots, P_n en \mathbb{P}^1 .

1. Dado seis puntos $P_1, \dots, P_6 \in \mathbb{P}^1$ calcula las razones cruzadas de los puntos $\{P_i, P_4, P_5, P_6\}$ en términos de las razones cruzadas de los puntos $\{P_i, P_1, P_2, P_3\}$.
2. Dado una triangulación del n -ágono T sea B_T la matriz de intercambio (no extendida) del carcaj Q_T (Definición 2.7). Cada arco $d \in T$ es la diagonal de un cuadrilátero con vértices i, j, k, l . Definimos $Y_d := Y(P_i, P_j, P_k, P_l)$. Sea $Y_T := (Y_d : d \in T)$.
Muestra que (Y_T, B_T) es un Y -patrón.
3. Concluye que para saber los $\binom{n}{4}$ razones cruzadas de $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{P}^1$ es suficiente calcular $n - 3$ de ellas.

5.3. Formulas de separación

En esta sección analizamos el comportamiento de los Y -patrones y su interacción con las variables de conglomerado en un patrón de semillas. El resultado más importante es la **formula de la separación de adición** de Fomin–Zelevinsky [FZ07] que ya observamos en el Ejemplo 5.17. Para formular el resultado necesitamos un tipo de coeficientes especiales, llamados los **coeficientes principales** que juegan un papel importante también en la teoría de las variedades de conglomerado.

Definición 5.20. Un Y -patrón $\{(\mathbf{y}(t), B(t))\}_{t \in \mathbb{T}_n}$ en un semicampo \mathbb{P} (o un patrón de semillas o el álgebra de conglomerado) tiene **coeficientes principales** si existe un $t_0 \in \mathbb{T}_n$ con

$$\mathbf{y}(t_0) = (y_1, \dots, y_n) \quad \text{y} \quad \mathbb{P} = \text{Trop}(y_1, \dots, y_n).$$

Decimos que el Y -patrón (o un patrón de semillas o el álgebra de conglomerado) tiene **coeficientes principales en t_0** .

Recuerda que trabajando sobre el semicampo tropical una Y -semilla (\mathbf{y}, B) contiene la misma información que una matriz de intercambio extendida \tilde{B} (Proposición 5.3). La Y -semilla $(\mathbf{y}(t_0), B(t_0))$ se traduce según la formula (5.2) a la matriz extendida

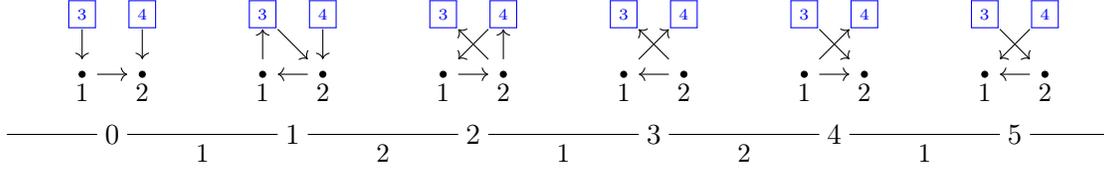
$$\tilde{B}(t_0) = \begin{pmatrix} B(t_0) \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2n \times n}, \tag{5.10}$$

donde $\mathbf{1}$ es la $n \times n$ -matriz de identidad. En particular, si $B(t_0)$ es la matriz de un carcaj Q (es decir, es anti-simétrica) entonces la matriz $\tilde{B}(t_0)$ corresponde al carcaj Q^{prin} obtenido de Q de la siguiente manera

1. agregue n vértices congelados a Q , uno para cada vértice de Q ;
2. agregue flechas de cada vértice congelado así al vértice correspondiente mutable.

Nota que Q no tiene vértices congelados.

Ejemplo 5.21. Calculamos el patrón de semillas con coeficientes principales en el caso A_2 . Sea Q el carcaj $1 \rightarrow 2$, entonces el carcaj Q^{prin} y sus mutaciones son



Definición 5.22. Sea $\{(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), B(t))\}_{t \in \mathbb{T}_n}$ un patrón de semillas con coeficientes principales en t_0 donde

$$\mathbf{x}(t_0) = (x_1, \dots, x_n), \quad \mathbf{y}(t_0) = (y_1, \dots, y_n) \quad \text{y} \quad B(t_0) = B^0 = (b_{ij}^0)_{i,j \in [n]}. \quad (5.11)$$

Entonces, $\mathbb{P} = \text{Trop}(y_1, \dots, y_n)$ y todos los coeficientes en las relaciones de intercambio (5.8) son monomios en y_1, \dots, y_n . Pues cada variables de conglomerado $x_{i;t}$ tiene una expresión como función racional libre de substracciones en las variables $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ obtenido iterando las relaciones de intercambio. Sea

$$X_{i;t} := X_{i;t}^{B^0; t_0} \in \mathbb{Q}_{\text{sf}}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \quad (5.12)$$

esta expresión que depende de t_0 y B^0 . Definimos las expresiones $F_{i;t}$ evaluando los $X_{i;t}$ en $x_1 = \dots = x_n = 1$:

$$F_{i;t} := F_{i;t}^{B^0; t_0} := X_{i;t}(1, \dots, 1; y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{Q}_{\text{sf}}(y_1, \dots, y_n) \quad (5.13)$$

Ejemplo 5.23. Continuamos con el Ejemplo 5.15 y calculamos las expresiones $X_{i;t}$ y $F_{i;t}$. Recuerda que ya tenemos todas las expresiones de las variables de conglomerado en el caso \mathbb{A}_2 con coeficientes arbitrarias en la Tabla 5. Los $X_{i;t}$ se pueden obtener de la tabla especializando al semicampo $\mathbb{P} = \text{Trop}(y_1, y_2)$. Nota que en este caso $y_1 \oplus 1 = 1$. Luego evaluando las $X_{i;t}$ en $x_1 = x_2 = 1$ nos da las $F_{i;t}$. De los resultados en la Tabla 6 se pueden observar dos cosas:

1. los $F_{i;t}$ son polinomios en $\mathbb{Z}_{\geq 0}[y_1, y_2]$;
2. los $X_{i;t}$ son polinomios de Laurent en x_1, x_2 con coeficientes en $\mathbb{Z}_{\geq 0}[y_1, y_2]$.

Para un patrón de semillas con coeficientes principales la Proposición 5.19 nos da el siguiente resultado que confirme las observaciones del Ejemplo 5.23(salvo la positividad de los coeficientes):

Proposición 5.24. [Proposición 3.6 en [FZ07]] Sea \mathcal{A} un álgebra de conglomerado con coeficientes principales en la semilla $(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{y}(t_0), B(t_0))$ con $\mathbf{x}(t_0) = (x_1, \dots, x_n)$ y $\mathbf{y}(t_0) = (y_1, \dots, y_n)$. Entonces, cada variable de conglomerado de \mathcal{A} es un polinomio de Laurent en las variables x_1, \dots, x_n con coeficientes en $\mathbb{Z}[y_1, \dots, y_n]$. En particular tenemos

$$X_{i;t} \in \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}, y_1, \dots, y_n] \quad \text{y} \quad F_{i;t} \in \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_n]. \quad (5.14)$$

Ejercicio 5.8. Prueba la Proposición 5.24 usando la Proposición 5.19.

Recuerda la propiedad universal del semicampo $\mathbb{Q}_{\text{sf}}(x_1, \dots, x_n)$ (Lema 5.5) y el Ejercicio 5.3. Sea \mathbb{P} un semicampo y $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}$ con homomorfismo $f : \mathbb{Q}_{\text{sf}}(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \mathbb{P}$

| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----------|-------|-------------------------|---|---|---------------------------|-------|
| $F_{1;t}$ | 1 | $y_1 + 1$ | $y_1 + 1$ | $y_2 + 1$ | $y_2 + 1$ | 1 |
| $F_{2;t}$ | 1 | 1 | $y_1 y_2 + y_1 + 1$ | $y_1 y_2 + y_1 + 1$ | 1 | 1 |
| $X_{1;t}$ | x_1 | $\frac{y_1 + x_2}{x_1}$ | $\frac{y_1 + x_2}{x_1}$ | $\frac{x_1 y_2 + 1}{x_2}$ | $\frac{x_1 y_2 + 1}{x_2}$ | x_2 |
| $X_{2;t}$ | x_2 | x_2 | $\frac{x_1 y_1 y_2 + x_2 + y_1}{x_1 x_2}$ | $\frac{x_1 y_1 y_2 + x_2 + y_1}{x_1 x_2}$ | x_1 | x_1 |

Tabla 6: Las expresiones $F_{i;t}$ y $X_{i;t}$ de la Definición 5.22 en el caso \mathbf{A}_2 . Las matrices de intercambio corresponden a los carcajes del Ejemplo 5.21. Más detalles se encuentran en el Ejemplo 5.23.

definido por $x_i \mapsto p_i$. Vamos a adaptar la siguiente notación: para $g \in \mathbb{Q}_{\text{sf}}(x_1, \dots, x_n)$ escribimos

$$g|_{\mathbb{P}}(p_1, \dots, p_n) := f(g(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{P}. \quad (5.15)$$

Por ejemplo, sea $\mathbb{P} = \text{Trop}(u_1, u_2)$ y $p_i = u_i$. Entonces tenemos para $g = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2$ tenemos

$$g|_{\mathbb{P}}(u_1, u_2) = f(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = f\left(\frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1 + x_2}\right) = \frac{u_1^3 \oplus u_2^3}{u_1 \oplus u_2} = 1.$$

Estamos preparados para el resultado principal de esta sección que se encuentra en [FZ07, Teorema 3.7]

Teorema 5.25 (Formula de separación). Sea \mathcal{A} un álgebra de conglomerado sobre un semicampo arbitrario \mathbb{P} de rango n con semilla inicial en un vértice $t_0 \in \mathbb{T}_n$ con la notación como en (5.11). Entonces todas las variables de conglomerado $x_{i;t} \in \mathcal{A}$ se pueden expresar en la semilla inicial como

$$x_{i;t} = \frac{X_{i;t}|_{\mathcal{F}}(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)}{F_{i;t}|_{\mathbb{P}}(y_1, \dots, y_n)}, \quad (5.16)$$

donde $X_{i;t} = X_{i;t}^{B^0; t_0}$ y $F_{i;t} = F_{i;t}^{B^0; t_0}$.

La formula (5.16) se llama la **formula de la separación** porque "separa" la adición auxiliar \oplus del semicampo \mathbb{P} que solo se encuentra en el denominador de la adición usual del campo \mathcal{F} que se encuentra exclusivamente en el numerador.

En la prueba del Teorema 5.25 se utilizan los Y -patrones $\hat{\mathbf{y}}$ que definimos en el Teorema 5.4 para patrones de semillas de tipo geométrico. Se puede generalizar:

Corolario 5.26. [Proposición 3.9 en [FZ07]] Sea $\{(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), B(t))\}_{t \in \mathbb{T}_n}$ un patrón de semillas de rango n con coeficientes en un semicampo \mathbb{P} . Definimos $\hat{\mathbf{y}}(t) = (\hat{y}_{1;t}, \dots, \hat{y}_{n;t})$ con entradas

$$\hat{y}_{j;t} := y_{j;t} \prod_{i=1}^n x_i^{b_{ij}^t} \quad (5.17)$$

Entonces, $\{(\hat{\mathbf{y}}(t), B(t))\}_{t \in \mathbb{T}_n}$ es un Y -patrón en \mathcal{F} que satisface la mutación (5.6).

Definición 5.27. Sea $((y_1, \dots, y_n), B^0)$ una semilla inicial de un Y -patrón de rango n en $\mathbb{Q}_{sf}(y_1, \dots, y_n)$. Entonces para cada $t \in \mathbb{T}_n$ el coeficiente $y_{i;t}$ es una función racional libre de substraciones en las variables y_1, \dots, y_n :

$$Y_{i;t} := Y_{i;t}^{B^0; t_0} \in \mathbb{Q}_{sf}(y_1, \dots, y_n). \quad (5.18)$$

Nota que las expresiones $Y_{i;t}$ en el caso de A_2 donde $B^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ se pueden obtener de las expresiones de los coeficientes $y_{i;t}$ en la Tabla 5 especializando la adición auxiliar \oplus a $+$ en $\mathbb{Q}_{sf}(y_1, y_2)$.

Las expresiones $Y_{i;t}$ junto con la propiedad universal del semicampo universal nos permiten evaluar en cualquier otro semicampo como en (5.15). Así obtenemos el siguiente Lema:

Lema 5.28. Sea $\{(\mathbf{y}(t), B(t))\}_{t \in \mathbb{T}_n}$ un Y -patrón en el semicampo \mathbb{P} de rango n con semilla inicial $((y_1, \dots, y_n), B^0)$ en $t_0 \in \mathbb{T}_n$. Entonces, $y_{i;t} = Y_{i;t}^{B^0; t_0} |_{\mathbb{P}(y_1, \dots, y_n)}$. En particular, con respecto al Corolario 5.26

$$\hat{y}_{i;t} = Y_{i;t}^{B^0; t_0} |_{\mathcal{F}(\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)}$$

En la prueba del Teorema 5.25 se utiliza la siguiente relación entre las expresiones $Y_{i;t}$ y $F_{i;t}$. Nota que ambos son elementos en el semicampo universal. La deferencia es que las $Y_{i;t}$ juegan el papel de coeficientes "generales" que se pueden especializar a cualquier tipo de coeficientes según el Lema 5.28, mientras las $F_{i;t}$ provienen de los coeficientes principales.

Proposición 5.29. [Proposición 3.12 en [FZ07]] Con la notación anterior sea $t \xrightarrow{k} t'$ en \mathbb{T}_n y $B(t) = (b_{ij})_{i,j \in [n]}$. Entonces,

$$F_{k;t'} = \frac{Y_{k;t} + 1}{(Y_{k;t} + 1) |_{\text{Trop}(y_1, \dots, y_n)}} F_{k;t}^{-1} \prod_{i=1}^n F_{i;t}^{[-b_{ij}]_+} \quad (5.19)$$

Prueba. Sea $\{(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), B(t))\}_{t \in \mathbb{T}_n}$ un patrón de semillas con coeficientes principales en t_0 y semilla inicial como en (5.11). Consideramos las semillas en t y t' relacionadas por una mutación en la dirección k . Tenemos desde la relación de intercambio

$$x_{k;t'} = x_{k;t}^{-1} \frac{1}{y_{k;t} \oplus 1} \left(y_{k;t} \prod_{i=1}^n x_{i;t}^{[b_{ik}^t]_+} + \prod_{i=1}^n x_{i;t}^{[-b_{ik}^t]_+} \right) \stackrel{(5.17)}{=} x_{k;t}^{-1} \frac{\hat{y}_{k;t} + 1}{y_{k;t} \oplus 1} \prod_{i=1}^n x_{i;t}^{[-b_{ik}^t]_+} \quad (5.20)$$

En particular, en terminos de las expresiones $X_{i;t}$ y $Y_{i;t}$ tenemos

$$X_{k;t'} = X_{k;t}^{-1} \frac{Y_{k;t} |_{\mathcal{F}(\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)} + 1}{(Y_{k;t} + 1) |_{\text{Trop}(y_1, \dots, y_n)}(y_1, \dots, y_n)} \prod_{i=1}^n X_{i;t}^{[-b_{ik}^t]_+} \quad (5.21)$$

Recuerda que las $F_{i;t}$ se obtiene de las $X_{i;t}$ evaluando $x_1 = \dots = x_n = 1$. Para $\hat{y}_{k;t}$ evaluando en $x_1 = \dots = x_n = 1$ nos da

$$\hat{y}_{k;t} |_{x_1 = \dots = x_n = 1} = y_{k;t}.$$

En particular, para $F_{k;t'}$ obtenemos de la relación (5.21)

$$F_{k;t'} = F_{k;t}^{-1} \frac{Y_{k;t} |_{\mathcal{F}(y_1, \dots, y_n)} + 1}{(Y_{k;t} \oplus 1) |_{\text{Trop}(y_1, \dots, y_n)}} \prod_{i=1}^n F_{i;t}^{[-b_{ik}^t]_+}.$$

Nota que $Y_{k;t} |_{\mathcal{F}(y_1, \dots, y_n)} = Y_{k;t}$ pues $\mathcal{F} = \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$. \square

Estamos preparados para la prueba del Teorema 5.25.

Prueba del Teorema 5.25. Procedemos por inducción sobre la distancia entre el vértice t y el vértice inicial $t_0 \in \mathbb{T}_n$. Si $t = t_0$ el lado derecho de la ecuación (5.16) es $x_{i;t}$ pues hay nada que probar.

Sea entonces t un vértice tal que la ecuación (5.16) se satisface para todas $x_{i;t}$ con $i \in [n]$. Consideramos un vértice t' con $t \overset{k}{--} t'$ en \mathbb{T}_n y tenemos que verificar la ecuación para todas las variables $x_{i;t'}$. Calculamos

$$x_{k;t'} \stackrel{(5.20)}{=} \frac{\hat{y}_{k;t} + 1}{y_{k;t} \oplus 1} x_{k;t}^{-1} \prod_{i=1}^n x_{i;t}^{[-b_{ik}^t]_+} \stackrel{\text{Lema 5.28}}{=} \frac{Y_{k;t}|_{\mathcal{F}}(\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n) + 1}{(Y_{k;t} + 1)|_{\mathbb{P}}(y_1, \dots, y_n)} x_{k;t}^{-1} \prod_{i=1}^n x_{i;t}^{[-b_{ik}^t]_+} \quad (5.22)$$

donde $y_i = y_{i;t_0}$ y \hat{y}_i es como definido en (5.17) y $B(t) = (b_{ij}^t)_{i,j \in [n]}$. En el caso de un patrón de semillas con coeficientes principales en t_0 nuestro calculo se especializa a lo siguiente

$$X_{k;t'} = \frac{Y_{k;t}|_{\mathcal{F}}(\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n) + 1}{(Y_{k;t} + 1)|_{\text{Trop}(y_1, \dots, y_n)}(y_1, \dots, y_n)} X_{k;t}^{-1} \prod_{i=1}^n X_{i;t}^{[-b_{ik}^t]_+}. \quad (5.23)$$

Antes de seguir nota que evaluando (5.19) en \mathbb{P} obtenemos

$$F_{k;t'}^{-1}|_{\mathbb{P}}(y_1, \dots, y_n) = \frac{(Y_{k;t} + 1)|_{\text{Trop}(y_1, \dots, y_n)}(y_1, \dots, y_n) F_{k;t}|_{\mathbb{P}}(y_1, \dots, y_n)}{(Y_{k;t} + 1)|_{\mathbb{P}}(y_1, \dots, y_n) \prod_{i=1}^n F_{i;t}|_{\mathbb{P}}(y_1, \dots, y_n)^{[-b_{ik}^t]_+}}. \quad (5.24)$$

Continuamos con el calculo (5.22): usando la hipotesis de inducción podemos substituir las variables $x_{i;t}$ para sus expresiones según (5.16)

$$\begin{aligned} &= \frac{(Y_{k;t}|_{\mathcal{F}}(\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n) + 1) F_{k;t}|_{\mathbb{P}}(y_1, \dots, y_n) \prod_{i=1}^n X_{i;t}|_{\mathcal{F}}(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)^{[b_{ik}^t]_+}}{(Y_{k;t} + 1)|_{\mathbb{P}}(y_1, \dots, y_n) X_{k;t}|_{\mathcal{F}}(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) \prod_{i=1}^n F_{i;t}|_{\mathbb{P}}(y_1, \dots, y_n)^{[b_{ik}^t]_+}} \\ (5.24) \quad &\stackrel{=}{=} \frac{(Y_{k;t}|_{\mathcal{F}}(\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n) + 1) \prod_{i=1}^n X_{i;t}|_{\mathcal{F}}(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)^{[-b_{ik}^t]_+}}{(Y_{k;t} + 1)|_{\text{Trop}(y_1, \dots, y_n)}(y_1, \dots, y_n) X_{k;t}|_{\mathcal{F}}(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) F_{k;t'}|_{\mathbb{P}}(y_1, \dots, y_n)} \\ (5.23) \quad &\stackrel{=}{=} \frac{X_{k;t'}|_{\mathcal{F}}(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)}{F_{k;t'}|_{\mathbb{P}}(y_1, \dots, y_n)}. \end{aligned}$$

□

5.3.1. Ejercicios

Ejercicio 5.9. Sea $t \in \mathbb{T}_n$ y $j \in [n]$.

1. Prueba que

$$Y_{j;t} = Y_{j;t}|_{\text{Trop}(y_1, \dots, y_n)} \prod_{i=1}^n F_{i;t}^{b_{ij}^t} \quad (5.25)$$

donde $B(t) = (b_{ij}^t)_{i,j \in [n]}$ es la matriz de intercambio en t .

2. Prueba que si $b_{ij}^t \geq 0$ para todas las $i \in [n]$, entonces $Y_{i;t}$ es un polinomio de Laurent en los coeficientes iniciales y_1, \dots, y_n .

5.4. F-polinomios, g-vectores y c-vectores

Esta sección es un breve resumen de los resultados de [FZ07, §6 y §7] donde Fomin–Zelevinsky describen una graduación en las álgebras de conglomerado con coeficientes principales. Con su punto de visto algebraico ellos hicieron varias conjeturas que se tardaron algunos años en probar. Hoy en día casi todas las conjeturas quedan probados y vamos a ver algunos de ellos aún sin pruebas porque se utilizaron maquinaria desde distintos puntos de vista como la teoría de representaciones, la categorificación de las álgebras de conglomerado y la geometría biracional de las variedades de conglomerado.

Recuerda: en esta sección \mathcal{A} es un álgebra de conglomerado de rango n dado de patrón de semillas $\{(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), B(t))\}_{t \in \mathbb{T}_n}$ con coeficientes principales en $t_0 \in \mathbb{T}_n$, la semilla inicial

$$\mathbf{x}(t_0) = (x_1, \dots, x_n), \quad \mathbf{y}(t_0) = (y_1, \dots, y_n), \quad B(t_0) = B^0 = (b_{ij})_{i,j \in [n]}.$$

Entonces, el semicampo es $\mathbb{P} = \text{Trop}(y_1, \dots, y_n)$. Las expresiones $X_{i;t}^{B^0, t_0} =: X_{i;t}$ definidos en (5.12) que pertenecen al anillo $\mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}, y_1, \dots, y_n]$ según (5.14) satisfacen lo siguiente:

Proposición 5.30 (Proposición 6.1 de [FZ07]). Cada polinomio de Laurent $X_{i;t}$ es homogéneo con respecto a una \mathbb{Z}^n -graduación en $\mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}, y_1, \dots, y_n]$ definida por

$$\deg(x_j) = e_j^*, \quad \text{y} \quad \deg(y_j) = - \sum_{i=1}^n b_{ij} e_i^*, \quad (5.26)$$

donde $\{f_i : i \in [n]\}$ es la base estándar de $M = \mathbb{Z}^n$. En particular, el álgebra de conglomerado \mathcal{A} es un subálgebra M -graduado de $\mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}, y_1, \dots, y_n]$.

Prueba. Recuerda las $\hat{y}_{j;t}$ de la ecuación (5.17). Para $t = t_0$ tenemos $\hat{y}_{j;t_0} =: \hat{y}_j$ que tiene grado

$$\deg(\hat{y}_j) = \deg \left(y_j \prod_{i=1}^n x_i^{b_{ij}} \right) = 0.$$

Procedemos por inducción sobre la distancia entre el vértice $t \in \mathbb{T}_n$ y el vértice t_0 . Supongamos que la afirmación se satisface para un vértice t y sea $t' \stackrel{k}{--} t$ en \mathbb{T}_n tal que la distancia entre t' y t_0 es más grande que la distancia entre t y t_0 . Tenemos que verificar que cada polinomio de Laurent $X_{j;t'}$ es homogéneo dado que todos los polinomios $X_{j;t}$ lo son. Dado la ecuación (5.23) hay que verificar que

$$\frac{Y_{k;t} |_{\mathcal{F}(\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)} + 1}{(Y_{k;t} + 1) |_{\text{Trop}(y_1, \dots, y_n)}(y_1, \dots, y_n)} X_{k;t}^{-1} \prod_{i=1}^n X_{i;t}^{[-b_{ik}]_+}$$

es homogéneo:

- por inducción el producto $X_{k;t}^{-1} \prod_{i=1}^n X_{i;t}^{[-b_{ik}]_+}$ es homogéneo;
- el denominador $(Y_{k;t} + 1) |_{\text{Trop}(y_1, \dots, y_n)}(y_1, \dots, y_n)$ es un monomio de Laurent, pues es homogéneo;
- $Y_{k;t} |_{\mathcal{F}(\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)}$ es una funciones racional evaluada en $\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n$, pero $\deg(\hat{y}_j) = 0$ entonces también el numerador es homogéneo de grado cero.

La segunda afirmación es una consecuencia del fenómeno de Laurent para álgebras de conglomerado con coeficientes principales (Proposición 5.24). \square

Definición 5.31. El \mathbf{g} -vector de una variable de conglomerado $x_{i;t} \in \mathcal{A}$ se define como

$$\deg(X_{i;t}) = \sum_{i=1}^n g_i e_i^* =: \mathbf{g}_{i;t} \quad (5.27)$$

Para cada $t \in \mathbb{T}_n$ la matriz $G_t^{B^0, t_0}$ cuyas columnas son $\mathbf{g}_{1;t}, \dots, \mathbf{g}_{2;t}$ se llama una G -matriz.

Nota tan las matrices de intercambia también las G -matrices son únicas solo si consideramos semillas etiquetadas. Pasando a las semillas no etiquetadas (Definición 2.36) las consideramos bajo permutación simultanea de sus columnas. No es necesaria cambiar el orden de las filas pues no se cambia la base de la latiz $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ de M .

Ejemplo 5.32. Continuamos con nuestro ejemplo favorita, el álgebra de conglomerado del tipo A_2 . En el caso que tiene coeficientes principales en la semilla $0 \in \mathbb{Z} = \mathbb{T}_2$ calculamos las expresiones de los $X_{i;t}$ en la Tabla 6. Recuerda que B^0 es la matriz del carcaj $1 \rightarrow 2$, entonces las coeficientes iniciales tienen grados

$$\deg(y_1) = -b_{21}e_2^* = e_2^*, \quad y \quad \deg(y_2) = -b_{12}e_1^* = -e_1^*$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \deg(x_1) &= e_1^*, \quad \deg(x_2) = e_2^*, \quad \deg(X_{1;1}) = \deg\left(\frac{y_1 + x_2}{x_1}\right) = -e_1^* + e_2^*, \\ \deg(X_{2;2}) &= \deg\left(\frac{x_1 y_1 y_2 + x_2 + y_1}{x_1 x_2}\right) = -e_1^*, \quad \deg(X_{1;3}) = \deg\left(\frac{x_1 y_2 + 1}{x_2}\right) = -e_2^*. \end{aligned}$$

Dibujando $e_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $e_2^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en el plano nos da un abanico simplicial completo cuyos conos maximales corresponden a las semillas:

$$\begin{array}{c|c} & 1 & \\ \hline 2 & & 0 \\ \hline & 3 & 4 \end{array}$$

En la Tabla 7 comparamos las G -matrices asociadas con las matrices de intercambio extendidas asociados a los carcajes equivalente bajo mutación a Q^{prin} (ver Ejemplo 5.21): Nota que las G -matrices coinciden con las parte extendida de las matrices de intercambio extendidas transpuestas bajo permutación. Además las filas de las matrices $G_t^{B^0, t_0}$ tienen entradas o no-negativas o no-positivas.

Ejercicio 5.10. Repiten el Ejemplo 5.32 con el algebra de conglomerado asociado al carcaj $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ de tipo A_3 con coeficientes principales y verifica que también en este caso tenemos:

1. las G -matrices coinciden con las parte extendida de las matrices de intercambio extendidas transpuestas bajo permutación;

| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------------|---|--|---|---|--|---|
| $\tilde{B}(t)$ | $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| G_t | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| C_t | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ |

Tabla 7: Las matrices de intercambio extendidas, las G -matrices y las C -matrices en el caso A_2 con coeficientes principales.

2. las filas de las G_t tienen entradas o no-negativas o no-positivas.

El siguiente resultado es una aplicación de la formula de separación Teorema 5.25. Nos da una receta para calcular la expresión de una variable de conglomerado en la semilla inicial:

Corolario 5.33 (Corolario 6.3 en [FZ07]). Sea $\mathcal{A}(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{y}(t_0), B(t_0))$ el álgebra de conglomerado asociado a la semilla inicial en \mathcal{F} dado por $\mathbf{x}(t_0) = (x_1, \dots, x_n)$, $B(t_0) = B^0 = (b_{ij})_{i,j \in [n]}$ y $\mathbf{y}(t_0) = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{P}^n$ donde \mathbb{P} es una semicampo arbitrario. Entonces, la variable de conglomerado $x_{j,t}$ satisfice

$$x_{j;t} = \frac{F_{j;t}^{B^0, t_0} |_{\mathcal{F}}(\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)}{F_{j;t}^{B^0, t_0} |_{\mathbb{P}}(y_1, \dots, y_n)} \mathbf{x}^{\mathbf{g}_{j;t}}, \quad (5.28)$$

donde $\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n$ son como en (5.17) y $\mathbf{x}^{\mathbf{g}_{j;t}}$ es el monomio de Laurent en x_1, \dots, x_n cuyo multiexponente es $\mathbf{g}_{j;t}$.

Entonces, para calcular las expresiones de las variables de conglomerado de cualquier álgebra de conglomerado en términos de una semilla inicial basta calcular los F -polinomios y los \mathbf{g} -vectores. Los F -polinomios se pueden calcular de manera recursiva:

Proposición 5.34 (Proposición 5.1 en [FZ07]). Sea $\tilde{B}(t)$ la matriz de intercambio extendida en el Y -patrón con coeficientes principales en t_0 (ver (5.10)). Los F -polinomios son determinados de manera única de las condiciones iniciales $F_{i;t_0} = 1$ para $i \in [n]$ y para $t \dashdash t'$ en \mathbb{T}_n tal que la distancia entre t y t_0 es menor que la distancia entre t' y t_0 . Entonces, $F_{j;t'} = F_{j;t}$ si $j \neq k$ y

$$F_{k;t'} = F_{k;t}^{-1} \left(\prod_{i=1}^n y_i^{[b_{n+i,k}^t]_+} F_{i;t}^{[b_{ik}^t]_+} + \prod_{i=1}^n y_i^{[-b_{n+i,k}^t]_+} F_{i;t}^{[-b_{ik}^t]_+} \right) \quad (5.29)$$

Vamos a omitir la prueba de la Proposición 5.34 que es esencialmente una aplicación de la relación de intercambio. Teniendo el Corolario 5.33 en mente nos falta una manera de calcular los \mathbf{g} -vectores. Continuamos con la misma notación como en la Proposición 5.34:

Proposición 5.35 (Proposición 6.6 en [FZ07]). Los \mathbf{g} -vectores $\mathbf{g}_{j;t}$ de la Definición 5.31 se determinan de manera única de las condiciones iniciales $\mathbf{g}_{j;t_0} = e_j^*$ y la recurrencia $\mathbf{g}_{j;t'} = \mathbf{g}_{j;t}$ para $j \neq k$ y

$$\mathbf{g}_{k;t'} = -\mathbf{g}_{k;t} + \sum_{i=1}^n ([b_{ik}^t] \mathbf{g}_{i;t} - [b_{n+i,k}^t]_+ \mathbf{b}_i^0) = -\mathbf{g}_{k;t} + \sum_{i=1}^n ([-b_{ik}^t] \mathbf{g}_{i;t} - [-b_{n+i,k}^t]_+ \mathbf{b}_i^0) \quad (5.30)$$

donde \mathbf{b}_i^0 es la columna i de la matriz inicial B^0 .

Observa que evaluando la ecuación (5.25) del Ejercicio 5.9 en el semicampo \mathbb{P} nos da una expresión similar a la ecuación (5.28) para los coeficientes $y_{j;t}$ del álgebra de conglomerado $\mathcal{A}(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{y}(t_0), B(t_0))$ como en el Corolario 5.28:

$$y_{j;t} = y_1^{c_1} \cdots y_n^{c_n} \prod_{i=1}^n F_{i;t} |_{\mathbb{P}}(y_1, \dots, y_n)^{b_{ij}^t}, \quad (5.31)$$

donde $y_1^{c_1} \cdots y_n^{c_n} = Y_{j;t} |_{\text{Trop}(y_1, \dots, y_n)}(y_1, \dots, y_n)$ es independiente de \mathbb{P} . El vector

$$\mathbf{c}_{j;t} := \mathbf{c}_{j;t}^{B^0, t_0} := (c_1, \dots, c_n)^T \quad (5.32)$$

se llama el **c-vector**. Nota que $\mathbf{c}_{j,t}$ naturalmente es un elemento en la latiz N dual a M . Entonces, $\mathbf{c}_{j;t} = \sum_{i=1}^n c_i e_i$ donde $\{e_i \in N : i \in [n]\}$ es la base dual a $\{e_i^* \in M : i \in [n]\}$. Para cada $t \in \mathbb{T}_n$ la matriz $C_t^{B^0, t_0}$ cuyas columnas son $\mathbf{c}_{1;t}, \dots, \mathbf{c}_{n;t}$ se llama una **C-matriz**.

Ejemplo 5.36. En el caso A_2 podemos calcular los **c**-vectores desde las expresiones para los $y_{i;t}$ que tenemos en la Tabla 5. Recuerda que las expresiones $Y_{i;t}$ se obtienen especializando las entradas de la tabla al caso $\mathbb{P} = \text{Trop}(y_1, y_2)$. Entonces, calculamos:

| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|-------|------------|---------------------|------------|------------|-------|
| $Y_{1;t} _{\text{Trop}(y_1, y_2)}(y_1, y_2)$ | y_1 | y_1^{-1} | y_2 | y_2^{-1} | y_2^{-1} | y_2 |
| $Y_{2;t} _{\text{Trop}(y_1, y_2)}(y_1, y_2)$ | y_2 | $y_1 y_2$ | $y_1^{-1} y_2^{-1}$ | y_1^{-1} | y_1 | y_1 |

Así obtenemos las **C**-matrices en la Tabla 7 cuyas columnas son los exponentes de los monomios $Y_{i;t} |_{\text{Trop}(y_1, y_2)}(y_1, y_2)$. Nota que los signos de las entradas en cada columna de una **C**-matriz son o no-negativas o no-positivas.

Fomin y Zelevinsky observaron una relación íntima entre los F -polinomios y los **c**-vectores:

Proposición 5.37 (Proposición 5.5 en [FZ07]). Dada una semilla inicial las siguientes propiedades son equivalentes

1. Cada polinomio $F_{i;t}(y_1, \dots, y_n)$ tiene término constante 1.
2. Los **c**-vectores satisfacen la **coherencia de signos**, es decir para cada $i \in [n]$ y $t \in \mathbb{T}_n$ el vector $\mathbf{c}_{i;t}$ tiene o entradas no-negativas o no-positivas.

El segundo punto de la Proposición 5.37 se conoce como la **conjetura de la coherencia de los signos** y fue probado en el caso más general varios años después por Gross, Hacking, Keel y Kontsevich en [GHKK18]. Las **C**- y **G**-matrices están relacionadas de una manera curiosa que se conoce como una **dualidad tropical**. Nakanishi y Zelevinsky probaron el siguiente resultado:

Teorema 5.38 (Dualidad tropical, Teorema 1.2 en [NZ12]). Dado que los \mathbf{c} -vectores satisfacen la coherencia de los signos tenemos para cada matriz de intercambio casi-simetrizable B y para todos $t, t_0 \in \mathbb{T}_n$

$$\left(G_t^{B;t_0}\right)^T = \left(C_t^{-B^T;t_0}\right)^{-1} \quad (5.33)$$

y además

$$C_t^{B;t_0} = \left(C_{t_0}^{-B;t}\right)^{-1} \quad (5.34)$$

donde $t \mapsto B_t$ es el patrón definido por la matriz $B = B_{t_0}$ y B^T es la matriz transpuesta.

Nota in particular que (5.33) dice que $\left\{\mathbf{g}_{i;t}^{B;t_0} \in M : i \in [n]\right\}$ y $\left\{\mathbf{c}_{j;t}^{-B^T;t_0} \in N : j \in [n]\right\}$ son bases duales de las latices M y N respectivamente:

$$\left\langle \mathbf{g}_{i;t}^{B;t_0}, \mathbf{c}_{j;t}^{-B^T;t_0} \right\rangle = \delta_{ij}$$

Ejemplo 5.39. Verificamos la ecuación (5.34) en el caso A_2 . Nota primero que $B = -B^T$ en este caso, pues la ecuación es equivalente a $G_t^T = C_t^{-1}$. Calculamos para cada $t \in \{1, 2, 4\}$ $G_t^T C_t$ (para los demás es obviamente correcto):

$$\begin{aligned} G_1^T C_1 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ G_2^T C_2 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ G_4^T C_4 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Una consecuencia del Teorema 5.38 es la siguiente relación de los \mathbf{g} -vectores bajo cambio de la semilla inicial. Esta formula fue una conjetura en [FZ07] y en [NZ12] muestran que es una consecuencia de la dualidad tropical entre G - y C -matrices junto con la coherencia de los signos para \mathbf{c} -vectores:

Corolario 5.40 (Proposición 4.2 en [NZ12] y Conjetura 7.12 en [FZ07]). Sean $t_0 \overset{k}{--} t_1$ dos vértices adyacentes en \mathbb{T}_n y sea $B' = \mu_k(B^0)$. Entonces, para cada $t \in \mathbb{T}_n$ y cada $j \in [n]$ los \mathbf{g} -vectors $\mathbf{g}_{j;t}^{B^0,t_0} = (g_1, \dots, g_n)$ y $\mathbf{g}_{j;t}^{B',t_1} = (g'_1, \dots, g'_n)$ son relacionados a través de la formula

$$g'_i = \begin{cases} -g_k & i = k \\ g_i + [b_{ik}]_+ g_k - b_{ik} \min\{0, g_k\} & i \neq k \end{cases} \quad (5.35)$$

5.5. El \mathbf{g} -abanico

En esta sección analizamos los \mathbf{g} -vectores desde el punto de vista de la geometría poliédrica. Empezamos con las nociones básicas:

Definición 5.41. Un **cono poliédrico** en \mathbb{R}^n es un conjunto de combinaciones no-negativas de un número finito de vectores

$$\langle v_1, \dots, v_k \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}} := \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i : \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \right\}.$$

Los vectores $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ son los **rayos** del cono. Equivalentemente cada cono poliédrico tiene una descripción como intersección de un número finito de semiespacios cerrados. Las intersección del cono con los hiperplanos secundarios son las **caras** del cono.

La **dimensión** de un cono $C = \langle v_1, \dots, v_k \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ es la dimensión del espacio vectorial $\langle v_1, \dots, v_k \rangle_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^n$. El cono se llama **simplicial** si el número de sus rayos coincide con su dimensión.

Definición 5.42. Un **abanico poliédrico** es una colección de conos poliédricos $\mathcal{F} = \{C_1, \dots, C_q\} \subset \mathbb{R}^n$ que cumple

- Si $C \in \mathcal{F}$ y $F \subset C$ es una cara, entonces $F \in \mathcal{F}$;
- Si $C, C' \in \mathcal{F}$ entonces $C \cap C' \in \mathcal{F}$ es una cara de C y de C' .

El **soporte** de un abanico es la unión de todos sus conos. El abanico se llama **completo** si su soporte es todo el espacio \mathbb{R}^n . Se llama **simplicial** si cada cono $C \in \mathcal{F}$ es simplicial. Los **conos maximales** de \mathcal{F} son conos que no son cara propia de cualquier otro cono en \mathcal{F} . La **dimensión** de \mathcal{F} es el máximo de las dimensiones de sus conos maximales. Si todos los conos maximales de \mathcal{F} tienen la misma dimensión, entonces \mathcal{F} se llama **puro**. Los **rayos** de \mathcal{F} son los conos de dimensión uno.

Regresamos a los álgebras de conglomerado con coeficientes principales en un vértice $t_0 \in \mathbb{T}_n$ definida por una matriz de intercambio B^0 . Para cada $t \in \mathbb{T}_n$ definimos un cono simplicial que se llama el **g-cono**:

$$\mathbb{R}_{\geq 0}G_t := \mathbb{R}_{\geq 0}G_t^{B^0, t_0} := \left\langle \mathbf{g}_{1;t}^{B^0, t_0}, \dots, \mathbf{g}_{n;t}^{B^0, t_0} \right\rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \quad (5.36)$$

Los **g-conos** realmente son asociados a semillas no-etiquetadas. Para ver como consideramos dos vértices $t, t' \in \mathbb{T}_n$ cuyos semillas asociadas coinciden como semillas no-etiquetadas se asigna el mismo cono maximal en $\mathcal{F}_{\mathbf{g}}(B^0)$. Sabemos por la Definición 2.36 que para cada variable $x_{i;t}$ existe un índice $j \in [n]$ tal que $x_{i;t} = x_{j;t'}$. En particular, para cada $\mathbf{g}_{i;t}$ existe un índice $j \in [n]$ tal que $\mathbf{g}_{i;t} = \mathbf{g}_{j;t'}$. Como la definición del **g-cono** solo depende del conjunto de **g-vectores** pues $\mathbb{R}_{\geq 0}G_t = \mathbb{R}_{\geq 0}G_{t'}$.

El siguiente Teorema fue probado por varios matemáticos en distintas generalidades. Aun existe una versión para álgebras de conglomerado de tipo geométrico arbitrario nos enfocamos en el caso de tipo finito por el momento.

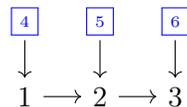
Teorema 5.43. Sea $\mathcal{F}_{\mathbf{g}}(B^0)$ la colección de todos los **g-conos**

$$\mathcal{F}_{\mathbf{g}}(B^0) := \left\{ \mathbb{R}_{\geq 0}G_t^{B^0, t_0} : t \in \mathbb{T}_n \right\}. \quad (5.37)$$

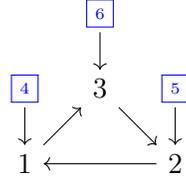
Entonces, $\mathcal{F}_{\mathbf{g}}(B^0)$ es un abanico simplicial completo en \mathbb{R}^n .

Este teorema fue probado primero en el caso que el álgebra de conglomerado $\mathcal{A}^{\text{prin}}(B^0)$ es acíclico: es decir, B^0 es antisimétrica y proviene de un carcaj Q^0 que no tiene ciclos orientados. Equivalentemente la compañera de Cartan $A(B^0)$ es una matriz de Cartan de tipo finito.

Ejemplo 5.44. Sea $Q = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ y $B^0 = B(Q)$. Entonces, el álgebra de conglomerado con coeficientes principales en t_0 asociado con



es acíclico. Pero si cambiamos Q por $\mu_2(Q)$ y definimos $B^0 = B(\mu_2(Q))$ entonces el álgebra de conglomerado con coeficientes principales es asociada al carcaj



y pues no es acíclico. Aun las álgebras de conglomerado $\mathcal{A}(Q)$ y $\mathcal{A}(\mu_2(Q))$ son iguales, para las álgebras de conglomerado con coeficientes principales tenemos

$$\mathcal{A}^{\text{prin}}(Q) = \mathcal{A}(Q^{\text{prin}}) \neq \mathcal{A}(\mu_2(Q)^{\text{prin}}) = \mathcal{A}^{\text{prin}}(\mu_2(Q)).$$

El primer resultado para el caso acíclico fue [RS09] donde Reading y Speyer probaron que los **g**-abanicos (en casos especiales) coinciden con los **abanicos Cambrian** que se pueden asociar elementos de Coxeter de un grupo de Coxeter finito. Dichos abanicos son completos y simpliciales por definición. Reading y Speyer conjeturaron que sus resultados sean validas para cualquier álgebra de conglomerado acíclico con coeficientes principales y su conjetura fue probada por Yang y Zelevinsky en [YZ08]. En [Rea14, Theorem 10.6] Reading explica como el caso general (cualquier álgebra de conglomerado de tipo finito) se puede obtener de los resultados de [RS09] usando el Corolario 5.40. En [HPS18] Hohlweg, Pilaud y Stella prueban además que los **g**-abanicos son **politopales**, es decir son abanicos normales de un politopo. Los politopos asociados se llaman los **asociahedros generalizados**.

Corolario 5.45. Los conos maximales en $\mathcal{F}_{\mathbf{g}}(B^0)$ son en biyección con las semillas no-etiquetadas del álgebra de conglomerado $\mathcal{A}(B^0)$. Los rayos de $\mathcal{F}_{\mathbf{g}}(B^0)$ son en biyección con las variables de conglomerado.

Ejercicio 5.11. Sea $Q = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ como en el Ejemplo 5.44. Calcula el **g**-abanico del álgebra de conglomerado definido por Q^{prin} .

6. Variedades de conglomerado

La referencia principal para las definiciones y resultados de este capítulo es el artículo [GHK15] de Gross, Hacking y Keel.

6.1. Las variedades de conglomerado

Recuerda las siguientes definiciones de la §3.3.1:

- los **datos fijos** Γ son dado por la siguiente información (Definición 3.7)
 1. una latiz N con una forma casi-simétrica $\{\cdot, \cdot\} : N \times N \rightarrow \mathbb{Q}$,
 2. una sublatiz saturada $N_{\text{mut}} \subset N$,
 3. dos conjuntos de índices $I_{\text{mut}} \subset I$ tal que $n + m := |I|$ es el rango de N y $n := |I_{\text{mut}}|$ es el rango de N_{mut} ,

4. enteros positivos d_i para cada $i \in I$ con mínimo múltiple en común 1,
 5. una sublatiz $N^\circ \subset N$ tal que $\{N_{\text{mut}}, N^\circ\} \subset \mathbb{Z}$ y $\{N, N_{\text{mut}} \cap N^\circ\} \subset \mathbb{Z}$,
 6. las latices duales $M := \text{hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ y $M^\circ := \text{hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$;
- los **datos de una semilla** $s = (e_i : i \in I)$ tal que $\{e_i : i \in I\}$ es una base de N , $\{e_i : i \in I_{\text{mut}}\}$ es una base de N_{mut} y $\{d_i e_i : i \in I\}$ es una base de N° ;
 - las bases duales a los datos de una semilla son $\{e_i^* : i \in I\}$ para M y $\{d_i^{-1} e_i =: f_i : i \in I\}$ para M° .
 - la forma bilineal asociada a los datos de una semilla es $[\cdot, \cdot]_s : N \times N \rightarrow \mathbb{Q}$ definida por $[e_i, e_j]_s := \epsilon_{ij} := \{e_i, e_j\} d_j$ con matriz asociada $\epsilon_s := (\epsilon_{ij})_{i \in I_{\text{mut}}, j \in I} \in \mathbb{Z}^{n \times (n+m)}$
 - la mutación en la dirección $k \in I_{\text{mut}}$ de los datos de una semilla es $\mu_k(s) = (e'_i : i \in I)$ donde

$$e'_i := \begin{cases} e_i + [\epsilon_{ik}]_+ e_k & i \neq k \\ -e_k & i = k \end{cases},$$

la transformación de la matriz ϵ_s que coincide con la mutación de matrices (ϵ^T es una matriz de intercambio extendida), y la mutación de la base dual $\{f'_i := e'_i d_i : i \in I\}$ de M° con

$$f'_i = \begin{cases} -f_k + \sum_{j \in I} [-\epsilon_{kj}]_+ f_j & k = i \\ f_i & k \neq i \end{cases}$$

Dado los datos fijos de una semilla s que nos da bases para las latices N, N°, M, M° escribimos $N_s, N_s^\circ, M_s, M_s^\circ$ para enfatizar que escogimos bases.

Definición 6.1. Dado los datos fijos y los datos de una semilla $s = (e_i : i \in I)$ definimos dos toros algebraicos

$$T_{M;s} = M_s \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* = \text{Spec}(\mathbb{C}[N_s]), \quad \text{y} \quad T_{N^\circ;s} = N_s^\circ \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* = \text{Spec}(\mathbb{C}[M_s^\circ]) \quad (6.1)$$

donde $\mathbb{C}[N_s] = \mathbb{C}[z^{\pm e_i} : i \in I]$ y $\mathbb{C}[M_s^\circ] = \mathbb{C}[z^{f_i} : i \in I]$. Más precisamente los datos de la semilla nos dan coordenadas para los toros (equivalentemente un conjunto de generadores para sus anillos de funciones):

$$\{y_i := z^{e_i} : i \in I\} \quad \text{y} \quad \{x_i := z^{f_i} : i \in I\}. \quad (6.2)$$

Las coordenadas identifican ambos toros con $(\mathbb{C}^*)^{n+m}$.

Nota que las coordenadas x_i son variables de conglomerado (Ejercicio 3.8). Recuerda el emparejamiento entre una latiz y su dual $\langle \cdot, \cdot \rangle : N \times M \rightarrow \mathbb{Z}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle : N^\circ \times M^\circ \rightarrow \mathbb{Z}$. Además recuerda los elementos $v_k := \{e_k, \cdot\} \in M^\circ$ para cada $k \in I_{\text{mut}}$.

Definición 6.2. Para cada índice $k \in I_{\text{mut}}$ definimos mapeos biracionales $\mu_{k;\mathcal{X}} : T_{M;s} \dashrightarrow T_{M;\mu_k(s)}$ y $\mu_{k;\mathcal{A}} : T_{N^\circ;s} \dashrightarrow T_{N^\circ;\mu_k(s)}$ por sus pullbacks:

$$\begin{array}{ll} \mu_{k;\mathcal{X}}^* : \mathbb{C}(N_{\mu_k(s)}) \rightarrow \mathbb{C}(N_s) & \mu_{k;\mathcal{A}}^* : \mathbb{C}(M_{\mu_k(s)}^\circ) \rightarrow \mathbb{C}(M_s^\circ) \\ z^n \mapsto z^n (1 + z^{e_k})^{-[n, e_k]_s} & z^m \mapsto z^m (1 + z^{v_k})^{-\langle d_k e_k, m \rangle} \end{array} \quad (6.3)$$

donde $z^n \in \mathbb{C}[N_{\mu_k(s)}]$, $m \in \mathbb{C}[M_{\mu_k(s)}^\circ]$ y $s = (e_i : i \in I)$.

Ejercicio 6.1. Sean L una latiz y $L^* := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Z})$ su latiz dual. Con $\langle \cdot, \cdot \rangle : L \times L^* \rightarrow \mathbb{Z}$ denotamos su emparejamiento dual y fijamos $(\ell, \ell') \in L \times L^*$ tal que $\langle \ell, \ell' \rangle = 0$. En el cuerpo de fracciones del álgebra del grupo $\mathbb{C}[L^*]$ definimos el mapeo

$$\mu_{(\ell, \ell')}^* : \mathbb{C}(L^*) \rightarrow \mathbb{C}(L^*), \quad z^a \mapsto z^a(1 + z^{\ell'})^{\langle a, \ell \rangle} \quad (6.4)$$

donde $z^a \in \mathbb{C}[L^*]$. Muestra que los pullback en la Definición 6.2 son de la forma $\mu_{(\ell, \ell')}^*$.

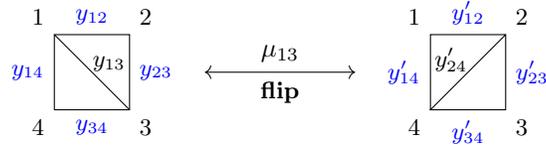
En lo que sigue utilizamos la noción de un Y -patrón con direcciones congeladas:

Definición 6.3. Sea $\tilde{B} \in \mathbb{Z}^{(n+m) \times n}$ una matriz de intercambio extendida y fijamos la tupla $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{n+m}) \in \mathbb{P}^{n+m}$. Entonces (\mathbf{y}, \tilde{B}) es una **Y -semilla de rango n con m direcciones congeladas**. Un Y -patrón de rango n con m direcciones congeladas es una biyección entre los vértices $t \in \mathbb{T}_n$ con Y -semillas de rango n con m direcciones congeladas $(\mathbf{y}(t), \tilde{B}(t))$ tal que para cada arista $t \overset{k}{--} t'$ en \mathbb{T}_n se cumple

$$\mu_k(\mathbf{y}(t)) = \mathbf{y}(t'), \quad \text{y} \quad \mu_k(\tilde{B}(t)) = \tilde{B}(t').$$

Nota que por la diferencia entre la mutación de las Y -semillas y las semillas de conglomerado las Y -variables congeladas se pueden cambiar bajo la mutación en direcciones mutables. Su dinámica se puede entender mejor en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 6.4. Consideramos los dos triangulaciones del cuadrado y su relación por el flip y asociamos una Y -semilla en el semicampo universal a cada uno:



La matriz de intercambio extendida para la triangulación T_{13} es $\tilde{B} = (0, -1, 1, -1, 1)^T$ escrita con respecto al orden $\overline{13}, \overline{12}, \overline{23}, \overline{34}, \overline{14}$. Bajo mutación de Y -semillas obtenemos las siguientes relaciones entre las Y -variables:

$$y'_{24} = y_{13}^{-1}, \quad y'_{12} = y_{12}(1 + y_{13}), \quad y'_{23} = y_{23}(1 + y_{13}^{-1})^{-1} = \frac{y_{23}}{1 + y'_{24}}, \quad (6.5)$$

$$y'_{34} = y_{34}(1 + y_{13}), \quad y_{14} = \frac{y_{14}}{1 + y'_{24}}. \quad (6.6)$$

Dada una latiz L escribimos $\mathbb{Q}(L)$ para el campo de funciones de $\mathbb{Z}[L]$. Vamos a utilizar la notación $\mathbb{Q}_{\text{sf}}(L)$ para el semicampo de funciones racionales libre de substraciones en $\mathbb{Q}(L)$.

Proposición 6.5. Sean $s = (e_i : i \in I)$ y $s' := \mu_k(s) = (e'_i : i \in I)$ los datos de dos semillas relacionados por la mutación en la dirección $k \in I_{\text{mut}}$. Entonces los conjuntos $\{y_i = z^{e_i} : i \in I\}$ y $\{y'_i = z^{e'_i} : i \in I\}$ son dos Y -semillas relacionadas por pullback y la mutación de Y -semillas con m direcciones congeladas (5.7) en $\mathbb{Q}_{\text{sf}}(N)$, es decir

$$\mu_{k; \mathcal{X}}^*(y'_j) = \begin{cases} y_k^{-1} & k = j \\ y_j \left(1 + y_k^{-\text{sgn}(\epsilon_{jk})}\right)^{-\epsilon_{jk}} & j \neq k \end{cases} \quad (6.7)$$

Prueba. Recuerda que la matriz $\epsilon_s = (\epsilon_{ij})_{i \in I_{\text{mut}}, j \in I}$ es la transpuesta de una matriz extendida de intercambio lo cual explica la diferencia entre los índices en (5.7) y en (6.7):

$$-\text{sgn}(\epsilon_{jk}) = \text{sgn}(-b_{kj}), \quad \text{y} \quad -\epsilon_{jk} = -b_{kj}.$$

Calculamos para $j = k$

$$\mu_{k;\mathcal{X}}^*(y'_k) = z^{e'_k} (1 + z^{e_k})^{-[e'_k, e_k]_s} = z^{-e_k} = y_k^{-1}.$$

Para $j \neq k$ tenemos

$$\begin{aligned} \mu_{k;\mathcal{X}}^*(y'_j) &= z^{e'_j} (1 + z^{e_k})^{-[e'_j, e_k]_s} = z^{e_j + [\epsilon_{jk}] + e_k} (1 + z^{e_k})^{-\{e_j + [\epsilon_{ik}] + e_k, d_k e_k\}} \\ &= z^{e_j + [\epsilon_{jk}] + e_k} (1 + z^{e_k})^{-\epsilon_{jk}} = \begin{cases} z^{e_j} (1 + z^{e_k})^{-\epsilon_{jk}} = y_j (1 + y_k)^{-\epsilon_{jk}} & \epsilon_{jk} \leq 0 \\ z^{e_j + \epsilon_{jk} e_k} (1 + z^{e_k})^{-\epsilon_{jk}} = y_j (y_k^{-1} + 1)^{-\epsilon_{jk}} & \epsilon_{jk} > 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

□

Corolario 6.6. Los datos fijos Γ juntos con los datos fijos de una semilla $s = (e_i : i \in I)$ determinan de manera única

1. una semilla $(\tilde{\mathbf{x}}_s, \tilde{B}_s)$ que define un patrón de semillas de tipo geométrico de rango n con m direcciones congeladas;
2. una Y -semilla $(\tilde{\mathbf{y}}_s, \tilde{B}_s)$ que define un Y -patrón de semillas de rango n con m direcciones congeladas;

donde $\tilde{B}_s := \epsilon_s^T$, $\tilde{\mathbf{y}}_s = (y_1, \dots, y_{n+m})$ con $y_i = z^{e_i}$ y $\tilde{\mathbf{x}}_s = (x_1, \dots, x_{n+m})$ con $x_i = z^{f_i}$.

Mucho tiempo la comunidad algebraica ha identificado direcciones congeladas y coeficientes por la relación entre ellos que vimos en la Proposición 5.3. Este punto de vista no se comparte bien en el contexto geométrico donde tenemos Y -patrones con direcciones congeladas. Fomin y Zelevinsky conjeturaron la existencia de la noción de **Y -patrones con coeficientes**, sin embargo no pudieron encontrarla. Esta noción fue descubierta en [BFMN20] y proviene de la interpretación geométrica de los Y -patrones.

Recuerda el árbol n -regular orientado $\vec{\mathbb{T}}_n$ de la Definición 3.16 y las composiciones de mutaciones $\mu_{0t;\mathcal{A}} = \mu_{0t} : T_{N^\circ; s_0} \dashrightarrow T_{N^\circ; s_t}$ donde s_0 es la semilla asociada al vértice $0 \in \vec{\mathbb{T}}_n$ y s_t es la semilla asociada al vértice $t \in \vec{\mathbb{T}}_n$. Sea $0 \xrightarrow{k_0} t_1 \xrightarrow{k_1} \dots \xrightarrow{k_d} t_d = t$ es el único camino de 0 hacia t en $\vec{\mathbb{T}}_n$. Definimos

$$\mu_{0t;\mathcal{X}} := \begin{cases} \text{id} & 0 = t \\ \mu_{k_d, s_d} \circ \dots \circ \mu_{k_0, s_0} & 0 \neq t \end{cases}$$

donde $\mu_{k_i, s_i} := \mu_{k_i;\mathcal{X}} : T_{M; s_i} \dashrightarrow T_{M; s_{i+1}}$ con s_i la semilla en t_i y $0 \leq i \leq d-1$. Para dos vértices $t, t' \in \vec{\mathbb{T}}_n$ que no son 0 definimos $\mu_{tt';\mathcal{X}} := \mu_{0t';\mathcal{X}} \circ \mu_{0t;\mathcal{X}}^{-1}$.

Definición 6.7. La \mathcal{X} -variedad de conglomerado es el esquema asociado a los datos fijos y los datos de una semilla $s = s_0$ que se obtiene pegando los toros $T_{M; s_t}$ para $t \in \vec{\mathbb{T}}_n$ usando los mapeos de transito $\mu_{tt';\mathcal{X}}$

$$\mathcal{X}_s = \bigcup_{t \in \vec{\mathbb{T}}_n} T_{M; s_t}. \quad (6.8)$$

Ejemplo 6.8. Sea $N = \mathbb{Z}^2$ con formal casi-simétrica definida por $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ con respecto a la base estándar $\{e_1, e_2\}$. Sea $I = I_{\text{mut}}$ y $d_1 = d_2 = 1$. Es decir estamos en el caso A_2 . Sea $s = s(0) = (e_1, e_2)$, entonces $B(0)$ es la matriz del carcaj $1 \rightarrow 2$.

Las variedades de conglomerado \mathcal{A} y \mathcal{X} son pegados de cinco copias del toro $(\mathbb{C}^*)^2$. Las coordenadas iniciales para \mathcal{X} son z^{e_1}, z^{e_2} y para \mathcal{A} son z^{f_1}, z^{f_2} . Los demás coordenadas se encuentran en la Figura 14

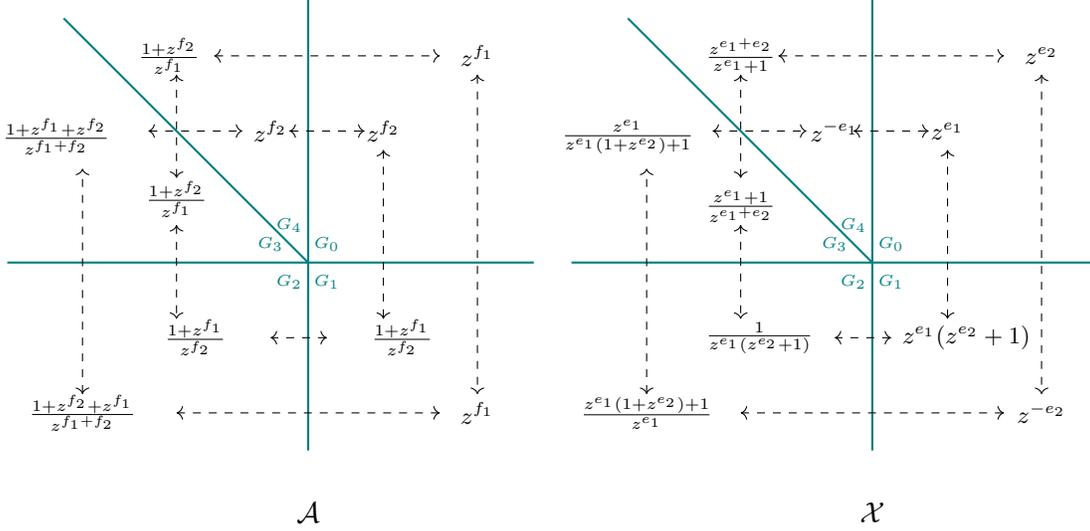


Figura 14: Las variedades \mathcal{A} y \mathcal{X} en tipo A_2 . En el cono σ_0 son las coordenadas iniciales, en los demás conos se encuentran las coordenadas locales expresadas en las coordenadas iniciales bajo pullback $(\mu_{0t}^*)^{-1}$.

Definición 6.9. Sean $s(0) = s = (e_i : i \in I)$ los datos de una semilla que asociamos a $0 \in \vec{\mathbb{T}}_n$ y para cada $t \in \vec{\mathbb{T}}_n$ sean $s(t) = (e_{i;t} : i \in I)$ los datos de una semilla obtenidos a partir de $s(0)$ de una secuencia de mutaciones dada por las etiquetas de flechas en el único camino $0 \rightarrow \dots \rightarrow t$ en $\vec{\mathbb{T}}_n$. El patrón $\{s(t) : t \in \vec{\mathbb{T}}_n\}$ se llama un **patrón de datos de semillas** de rango n con m direcciones congeladas.

El siguiente resultado es un corolario de la Proposición 6.5 y da la Proposición 3.14:

Corolario 6.10. Sean $\{s(t) : t \in \vec{\mathbb{T}}_n\}$ un patrón de datos de semillas definido por $s(0) = s = (e_i : i \in I)$. Entonces,

1. las tuplas

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) := \left((\mu_{0t;\mathcal{A}}^*) \left(z^{f_{1;t}} \right), \dots, (\mu_{0t;\mathcal{A}}^*) \left(z^{f_{n+m;t}} \right) \right)$$

juntas con las matrices extendidas de intercambio $\tilde{B}(t) := \tilde{B}_{s(t)}$ son un patrón de semillas de tipo geométrico de rango n con m direcciones congelados.

2. las tuplas

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) := \left((\mu_{0t;\mathcal{X}}^*) \left(z^{e_{1;t}} \right), \dots, (\mu_{0t;\mathcal{X}}^*) \left(z^{e_{n+m;t}} \right) \right)$$

juntas con las matrices de intercambio extendidas $\tilde{B}(t) := \tilde{B}_{s(t)}$ forman un Y -patrón de rango n con m direcciones congeladas.

Dados los datos de una semilla inicial $s =: s(0)$ llamamos los patrones el **patrón de semillas asociado a s** en el primer caso y el **Y -patrón asociado a s** en el segundo caso.

Recuerda que para las \mathcal{A} -variedades de conglomerado observamos en el Corolario 3.19 una relación íntima entre las funciones en la \mathcal{A} -variedad $\text{up}(\mathcal{A}_s)$, llamada el álgebra de conglomerado superior, y el álgebra de conglomerado $\mathcal{A}(\tilde{B}_s)$:

$$\text{up}(\mathcal{A}_s) \supseteq \mathcal{A}(\tilde{B}_s).$$

Esta relación es una consecuencia del fenómeno de Laurent. En el caso de las \mathcal{X} -variedades de conglomerado tenemos un anillo de funciones similar

$$\text{up}(\mathcal{X}_s) := \Gamma(\mathcal{X}_s, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_s}) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}_n} \mathbb{C}[z^{\pm e_{1;s_t}}, \dots, z^{\pm e_{n+m;s_t}}] \quad (6.9)$$

donde $\{e_{1;s_t}, \dots, e_{n+m;s_t}\}$ es la base de N dado por los datos de la semilla s_t en t .

Ejemplo 6.11. Continuamos con el Ejemplo 6.4. El anillo de funciones en la \mathcal{X} -variedad asociada es

$$\text{up}(\mathcal{X}_T) = \mathbb{C}[y_{13}^{\pm 1}, y_{12}^{\pm 1}, y_{14}^{\pm 1}, y_{23}^{\pm 1}, y_{34}^{\pm 1}] \cap \mathbb{C}[y_{13}^{\pm 1}, y'_{12}{}^{\pm 1}, y'_{14}{}^{\pm 1}, y'_{23}{}^{\pm 1}, y'_{34}{}^{\pm 1}]$$

donde $y'_{12}, y'_{14}, y'_{23}, y'_{34}$ satisfacen las relaciones (6.5). En particular, $y_{12}, y'_{14}, y'_{23}, y_{34} \notin \text{up}(\mathcal{X}_T)$.

Recuerda la Definición 2.33 del álgebra de conglomerado de tipo geométrico con direcciones congeladas: para \mathbf{X} el conjunto de todas las variables de conglomerado (no congeladas) definimos

$$\mathcal{A}(\tilde{B}) = \mathbb{C}[x_{n+1}, \dots, x_{n+m}][\mathbf{X}] \subset \mathcal{F},$$

donde \tilde{B} es una matriz de intercambio extendida y x_{n+1}, \dots, x_{n+m} son las variables congeladas. De manera similar podemos trabajar sobre el anillo de polinomios de Laurent $\mathbb{C}[x_{n+1}^{\pm 1}, \dots, x_{n+m}^{\pm 1}]$ lo cual es más cercano al álgebra de conglomerado superior $\text{up}(\mathcal{A}_s)$ de la \mathcal{A} -variedad de conglomerado asociado. En el contexto geométrico tenemos la misma opción: podemos dejar que las variables de conglomerado congeladas y las Y -variables congeladas sean cero. Nota que en las formulas de mutación ni x_i ni y_i se invierte si $i \notin I_{\text{mut}}$. Nos da la siguiente definición:

Definición 6.12. Sean Γ los datos fijos y s los datos de una semilla con $I = [n + m]$ y $I = [n]$. Sea $\{s(t) : t \in \mathbb{T}_n\}$ el patrón de datos de semillas asociado. Definimos las *variedades de conglomerado parcialmente compactificadas*

$$\bar{\mathcal{A}}_s := \bigcup_{t \in \mathbb{T}_n} T_{N_{\text{mut}}^\circ; s(t)} \times \mathbb{A}_{s(t)}^m \quad \text{y} \quad \bar{\mathcal{X}}_s := \bigcup_{t \in \mathbb{T}_n} T_{M_{\text{mut}}; s(t)} \times \mathbb{A}_{s(t)}^m \quad (6.10)$$

donde $N_{\text{mut}}^\circ := N_{\text{mut}} \cap N^\circ$ y las parches de los esquemas son

$$\begin{aligned} T_{N_{\text{mut}}^\circ; s(t)} \times \mathbb{A}_{s(t)}^m &= \text{Spec}(\mathbb{C}[z^{\pm f_1}, \dots, z^{\pm f_n}, z^{f_{n+1}}, \dots, z^{f_{n+m}}]) \\ T_{N_{\text{mut}}^\circ; s(t)} \times \mathbb{A}_{s(t)}^m &= \text{Spec}(\mathbb{C}[z^{\pm e_1}, \dots, z^{\pm e_n}, z^{e_{n+1}}, \dots, z^{e_{n+m}}]) \end{aligned}$$

que se pegan por los mismos mapas biracionales $\mu_{k;\mathcal{A}}$ y $\mu_{k;\mathcal{X}}$.

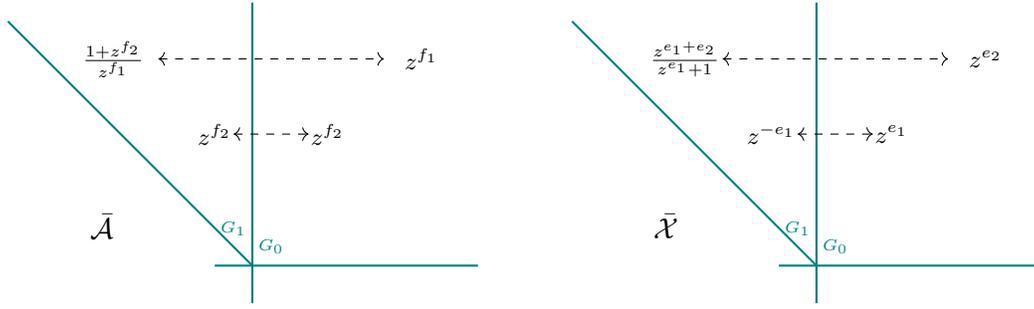


Figura 15: Los parches de las variedades $\bar{\mathcal{A}}$ y $\bar{\mathcal{X}}$ en tipo A_2 . En el cono G_0 son las coordenadas iniciales, en el cono G_1 se encuentran las expresiones de los coordenadas bajo pullback $(\mu_1^*)^{-1}$.

Ejemplo 6.13. Sea $N = \mathbb{Z}^2$ con formal casi-simétrica definida por $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ con respecto a la base estándar $\{e_1, e_2\}$. Sea $I = [2]$, $I_{\text{mut}} = \{1\}$ y $d_1 = d_2 = 1$. Es decir estamos en el caso A_1 con una variable congelada. Sea $s = s(0) = (e_1, e_2)$, entonces $B(0)$ es la matriz del carcaj $1 \rightarrow [2]$. Las variedades de conglomerado parcialmente compactificadas $\bar{\mathcal{A}}$ y $\bar{\mathcal{X}}$ son pegados de dos copias de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Las coordenadas iniciales para $\bar{\mathcal{X}}$ son z^{e_1}, z^{e_1} y para $\bar{\mathcal{A}}$ son z^{f_1}, z^{f_2} . Los demás coordenadas se encuentran en la Figura 15:

Las álgebras de conglomerado superiores son

$$\text{up}(\bar{\mathcal{A}}) = \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, x_2] \quad \text{y} \quad \text{up}(\bar{\mathcal{X}}) = \mathbb{C}[y_1^{\pm 1}, y_2] \cap \mathbb{C}\left[y_1^{\pm 1}, \frac{y_1 + y_2}{y_1 + 1}\right]$$

donde $x_i = z^{f_i}$ y $y_i = z^{e_i}$.

Ejercicio 6.2. Recuerda las triangulaciones del cuadrado y su Y -patrón del Ejemplo 6.4 y el anillo de funciones de la \mathcal{X} -variedad asociado del Ejemplo 6.11. Si tomamos la compactificación parcial $\bar{\mathcal{X}}_T$, ¿cuál es su álgebra de conglomerado superior?

6.2. Mapeos de ensamblajes de conglomerado

Los patrones de semillas y los Y -patrones del Corolario 6.6 también interactúan y su relación se puede observar al nivel de las latiz N y M° . La forma casi-simétrica $\{\cdot, \cdot\}$ en N define de manera natural dos mapeos. Recuerda que $\{N_{\text{mut}}, N^\circ\} \subset \mathbb{Z}$, entonces para $n \in N_{\text{mut}}$ tenemos $\{n, \cdot\} : N^\circ \rightarrow \mathbb{Z}$ es un elemento en M° . Definimos

$$p_1^* : N_{\text{mut}} \rightarrow M^\circ, \quad n \mapsto \{n, \cdot\}, \quad \text{donde } n \in N^\circ \quad (6.11)$$

La sublatiz $N_{\text{mut}} \subset N$ induce una sublatiz de M :

$$N_{\text{mut}}^\perp := \{m \in M : \langle n, m \rangle = 0 \forall n \in N_{\text{mut}}\}.$$

La latiz dual de una sublatiz de N es naturalmente un cociente de la latiz dual M . Tenemos $N_{\text{mut}}^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N_{\text{mut}}, \mathbb{Z})$. Elementos $m \in M$ que son funciones $N \rightarrow \mathbb{Z}$ se pueden restringir a N_{mut} . La restricción nos da un mapeo $\text{res}_{N_{\text{mut}}}^N : \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N_{\text{mut}}, \mathbb{Z})$ que manda todos los $m \in N_{\text{mut}}^\perp$ al cero. En particular, N_{mut}^\perp es el núcleo de $\text{res}_{N_{\text{mut}}}^N$ y

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})/N_{\text{mut}}^\perp = M/N_{\text{mut}}^\perp \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N_{\text{mut}}, \mathbb{Z}) = N_{\text{mut}}^*.$$

De manera similar tenemos $(N_{\text{mut}} \cap N^\circ)^* \cong M^\circ / N_{\text{mut}}^\perp$. Recuerda la condición $\{N, N_{\text{mut}} \cap N^\circ\} \subset \mathbb{Z}$ que implica $\{n, \cdot\} : N_{\text{mut}} \cap N^\circ \rightarrow \mathbb{Z}$ es un elemento en $M^\circ / N_{\text{mut}}^\perp$. Definimos

$$p_2^* : N \rightarrow M^\circ / N_{\text{mut}}^\perp, \quad n \mapsto \{n, \cdot\}. \quad (6.12)$$

Fijamos los datos de una semilla $s = (e_i : i \in I)$ nos da la base $\{e_i : i \in I_{\text{mut}}\}$ para N_{mut} y la base $\{e_i^* : i \in I\}$ de M . Tenemos para $i \in I_{\text{mut}}$

$$\{e_i, \cdot\} = \sum_{j=1}^{n+m} \{e_i, e_j\} e_j^* \stackrel{d_j^{-1} e_j^* = f_j}{=} \sum_{j=1}^{n+m} \{e_i, d_j e_j\} f_j = \sum_{j=1}^{n+m} \epsilon_{ij} f_j \quad (6.13)$$

Entonces, con respecto a la base $\{e_i : i \in I_{\text{mut}}\}$ y $\{f_i : i \in I\}$ de M° la matriz que representa p_1^* es

$$\epsilon_s^T = \tilde{B}_s = \begin{pmatrix} B_s \\ \hat{B}_s \end{pmatrix}. \quad (6.14)$$

Sea $i \in I_{\text{mut}}$ y $j \in I \setminus I_{\text{mut}}$. La entrada (i, j) de la matriz que representa p_2^* es

$$\{e_j, d_i e_i\} = -d_j^{-1} \{e_i, d_j e_j\} d_i = -d_j^{-1} b_{ji} d_i.$$

Entonces, la matriz que representa p_2^* es la $n \times (n+m)$ -matriz rectangular de la forma

$$\begin{pmatrix} B_s & - \left(D_{\text{cong}}^{-1} \hat{B}_s D_{\text{mut}} \right)^T \end{pmatrix}, \quad (6.15)$$

donde D_{cong} es la matriz diagonal con entradas d_{n+1}, \dots, d_{n+m} y D_{mut} es la matriz diagonal con entradas d_1, \dots, d_n . Nota que \hat{B}_s es una matriz $m \times n$ pues todos los productos son bien definidos.

Ejemplo 6.14. Sea $N = \mathbb{Z}^4$ con forma casi-simétrica definida con respecto a la base estándar $\{e_1, \dots, e_4\}$ por la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea $I_{\text{mut}} = [2]$. Para los multiplicadores fijamos $(2, 1, 2, 3)$ y sean $s = (e_1, \dots, e_4)$ los datos de una semilla. Calculamos la matriz para p_1^* : para $i \in [2]$ su columna i tiene entradas $\{e_i, d_j e_j\}$ donde $j \in [4]$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para la matriz que define p_2^* la columna i con $i \in [4]$ tiene entradas $\{e_i, d_j e_j\}$ para $j \in [2]$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.16)$$

Las matrices diagonales son $D_{\text{cong}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $D_{\text{mut}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Verificamos que las matrices para p_1^* y p_2^* satisfacen (6.12):

$$-\left(D_{\text{cong}}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} D_{\text{mut}}\right)^T = -\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definición 6.15. Cualquier homomorfismo de lattices $p^* : N \rightarrow M^\circ$ que cumple

1. la restricción a N_{mut} es $p^*|_{N_{\text{mut}}} = p_1^*$ de (6.11);
2. la composición con el mapeo cociente $\pi_{\text{mut}} : M^\circ \rightarrow M^\circ/N_{\text{mut}}^\perp$ satisface $\pi_{\text{mut}} \circ p^* = p_2^*$ de (6.12).

se llama **un mapeo de ensamble de conglomerado**.

Nota que los puntos 1. y 2. de la Definición 6.15 no determinan p^* de manera única. Fijando los datos de una semilla $s = (e_i : i \in I)$ los observaciones anteriores (6.14) y (6.15) nos dicen que p^* corresponde a una matriz de cuatro bloques

$$\widetilde{B}_s := \begin{pmatrix} B_s & -\left(D_{\text{cong}}^{-1} \hat{B}_s D_{\text{mut}}\right)^T \\ \hat{B}_s & * \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

Donde los bloques de las columnas corresponden a descomposición $N = N_{\text{mut}} \oplus N/N_{\text{mut}}$ y los bloques de las filas corresponden a $M^\circ = M^\circ/N_{\text{mut}}^\perp \oplus N_{\text{mut}}^\perp$. Cualquier matriz $A_s \in \mathbb{Z}^{m \times m}$ puede substituir la $*$ en (6.17) y así define **un mapeo de ensamble de conglomerado**. Las distintas opciones de mapeos difieren justo por un mapeo $N/N_{\text{mut}} \rightarrow N_{\text{mut}}^\perp$ representado por A_s . Nota que en el caso $I = I_{\text{mut}}$ el mapeo de ensamble de conglomerado es único definido por la matriz de intercambio B_s con respecto a los datos de una semilla s .

Ejercicio 6.3. Sea s los datos de una semilla y definimos un mapeo $p^* : N \rightarrow M^\circ$ con respecto a s por la matriz

$$\widetilde{B}_s := \begin{pmatrix} B_s & -\left(D_{\text{cong}}^{-1} \hat{B}_s D_{\text{mut}}\right)^T \\ \hat{B}_s & A_s \end{pmatrix}.$$

Si $\mu_k(s) = s'$ muestra que la matriz $\widetilde{B}_{s'}$ que representa p^* con respecto a s' se obtiene de \widetilde{B}_s por la regla de mutación de matrices (2.4). **Tipp: Calcula las matrices del cambio de la base de s a $\mu_k(s)$.**

Dado un mapeo $p^* : N \rightarrow M^\circ$ definimos (abusando un poco la notación) un homomorfismo entre los anillos de polinomios de Laurent $p^* : \mathbb{C}[N] \rightarrow \mathbb{C}[M^\circ]$ por $\sum_{n \in N} c_n z^n \mapsto \sum_{p^*(n) \in M^\circ} c_n z^{p^*(n)}$. Sean $s = (e_i : i \in I)$ los datos de una semilla. Para $j \in I_{\text{mut}}$ tenemos

$$p^*(y_j) = p^*(z^{e_j}) = z^{\sum b_{ij} f_i} = \prod_{i \in I} x_i^{b_{ij}} = \hat{y}_j. \quad (6.18)$$

Donde x_i y y_i son como en Corolario 6.6 y \hat{y}_i como en el Teorema 5.4. Cada mapeo de ensamble de conglomerado nos da un generalización del \hat{Y} -patrón de Fomin y Zelevinsky:

Proposición 6.16. Sea $\{s(t) : t \in \vec{\mathbb{T}}_n\}$ un patrón de datos de semillas definido por $s(0) := s = (e_i : i \in I)$. Fijamos $p^* : N \rightarrow M^\circ$ un mapeo de ensamble de conglomerado dado por las matrices $\{\widetilde{B}_{s(t)} : t \in \mathbb{T}_n\}$. Para $0 \in \mathbb{T}_n$ un vértice inicial arbitrario las tuplas

$$\hat{y}_{p^*}(t) := \left((\mu_{0t;\mathcal{A}}^*)^{-1} \left(z^{p^*(e_{1;t})} \right), \dots, (\mu_{0t;\mathcal{A}}^*)^{-1} \left(z^{p^*(e_{n+m;t})} \right) \right)$$

juntas con las matrices $\widetilde{B}_{s(t)}$ forman un Y -patrón de rango n con m direcciones congeladas en $\mathbb{Q}_{\text{sf}}(M^\circ)$. Además, el Y -subpatrón de las direcciones mutables coincide con el Y -patrón $\{(\hat{y}_{1;t}, \dots, \hat{y}_{n;t}), B_{s(t)}\}$ del patrón de semillas $(\tilde{x}(t), \tilde{B}(t))$ asociado a s .

Prueba. Tenemos que verificar que para cada arista $t \xrightarrow{k} t'$ en \mathbb{T}_n la tupla $\hat{y}_{p^*}(t')$ se obtiene de $\hat{y}_{p^*}(t)$ por la mutación de Y -patrones (5.7). Procedemos por inducción: supongamos que todas las tuplas asociadas a vértices con distancia menor o igual a las distancia de t a 0 son relacionados bajo la mutación de Y -semillas. Basta verificar que $\hat{y}_{p^*}(t')$ se obtiene de $\hat{y}_{p^*}(t)$ de la misma manera. Nota que

$$(\mu_{0t';\mathcal{A}}^*)^{-1} : \mathbb{C}(M_{s(t')}^\circ) \rightarrow \mathbb{C}(M_{s(0)}^\circ)$$

satisface $(\mu_{0t';\mathcal{A}}^*)^{-1} = (\mu_{k;\mathcal{A}}^*)^{-1} \circ (\mu_{0t;\mathcal{A}}^*)^{-1}$. En particular nos permite trabajar en las coordenadas de $s(t)$ lo cual simplifica los cálculos. Sean $s = s(t) = (e_i : i \in I)$ y $s' = s(t') = (e'_i : i \in I)$ dos datos de semillas en el patrón donde Sea $\widetilde{B}_s = (b_{ij})_{i,j \in I}$ la matriz que representa p^* con respecto a las bases $\{e_i : i \in I\}$ de N y $\{f_i : i \in I\}$ de M° . De manera similar sea $\widetilde{B}_{s'} = (b'_{ij})_{i,j \in I}$ la matriz representa p^* con respecta a las bases definidos por s' . Tenemos que mostrar que las tuplas $(z^{p^*(e_1)}, \dots, z^{p^*(e_{n+m})})$ y $(z^{p^*(e'_1)}, \dots, z^{p^*(e'_{n+m})})$ son relacionadas como

$$\mu_{k;\mathcal{A}}^* \left(z^{p^*(e'_j)} \right) = \begin{cases} z^{-p^*(e_k)} & j = k \\ z^{p^*(e_j)} (1 + z^{p^*(e_k)} \text{sgn}(-b_{kj}))^{-b_{kj}} & j \neq k \end{cases} \quad (6.19)$$

Distinguiamos dos casos: para $j \neq k$ calculamos primero $p^*(e'_j)$ con el Ejercicio 6.3

$$\begin{aligned} p^*(e'_j) &= \sum_{i \in I} b'_{ij} f'_i \stackrel{j \neq k}{=} -b_{kj} f'_k + \sum_{i \neq k} (b_{ij} + \text{sgn}(b_{kj}) [b_{ik} b_{kj}]_+) f_i \\ &= b_{kj} f_k + \sum_{i \neq k} (b_{ij} + \text{sgn}(b_{kj}) [b_{ik} b_{kj}]_+ - [-b_{ik}]_+ b_{kj}) f_i \\ \stackrel{\text{Ejercicio 6.4}}{=} &\begin{cases} \sum_{i \in I} b_{ij} f_i + \sum_{i \neq k} b_{ik} b_{kj} f_i & = p^*(e_j) + b_{kj} p^*(e_k) & b_{kj} > 0 \\ \sum_{i \in I} b_{ij} f_i & = p^*(e_j) & b_{kj} \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Entonces, con esta calculo avanzamos a

$$\begin{aligned} \mu_{k;\mathcal{A}}^* \left(z^{p^*(e'_j)} \right) &\stackrel{v_k = p^*(e_k)}{=} z^{p^*(e'_j)} \left(1 + z^{p^*(e_k)} \right)^{-\langle d_k e_k, p^*(e'_j) \rangle} \\ &= \begin{cases} z^{p^*(e_j) + b_{kj} p^*(e_k)} \left(1 + z^{p^*(e_k)} \right)^{-b_{kj}} & b_{kj} > 0 \\ z^{p^*(e_j)} \left(1 + z^{p^*(e_k)} \right)^{-b_{kj}} & b_{kj} \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

En el caso que $j = k$ tenemos

$$p^*(e'_k) = \sum_{i \in I} b'_{ik} f'_i = - \sum_{i \neq k} b_{ik} f_i = -p^*(e_k)$$

lo cual nos da

$$\mu_{k;\mathcal{A}}^* \left(z^{p^*(e'_k)} \right) = z^{-p^*(e_k)} \left(1 + z^{p^*(e_k)} \right)^{-\langle d_k e_k, -p^*(e_k) \rangle} = z^{-p^*(e_k)}.$$

□

Ejercicio 6.4. Verifica el último paso en el calcula de $p^*(e'_j)$ en la prueba de la Proposición 6.16.

Corolario 6.17. Cada mapeo de ensamble de conglomerado $p^* : N \rightarrow M^\circ$ define un morfismo $p : \mathcal{A}_s \rightarrow \mathcal{X}_s$ que también lo vamos a llamar un **mapeo de ensamble de conglomerado** donde p^* induce el pullback de p .

Prueba. Nota que el homomorfismo $p^* : \mathbb{C}[N] \rightarrow \mathbb{C}[M^\circ]$ nos da un morfismo de toros $p : T_{N^\circ} = \text{Spec}(\mathbb{C}[M^\circ]) \rightarrow T_M = \text{Spec}(\mathbb{C}[N])$. Para verificar que nos da un mapeo global $\mathcal{A}_s \rightarrow \mathcal{X}_s$ basta verificar que el siguiente diagrama es conmutativa

$$\begin{array}{ccc} T_{N^\circ;s} & \xrightarrow{p} & T_{M;s} \\ \downarrow \mu_{k;\mathcal{A}} & & \downarrow \mu_{k;\mathcal{X}} \\ T_{N^\circ;s'} & \xrightarrow{p} & T_{M;s'} \end{array}$$

donde $s = (e_i : i \in I)$ son los datos de una semilla y $s' = (e'_i : i \in I) = \mu_k(s)$. Equivalentemente vamos a mostrar que el diagrama de los pullback es conmutativo, pero como $\mu_{k;\mathcal{A}}$ y $\mu_{k;\mathcal{X}}$ son mapeos biracionales (no morfismos de toros) tenemos que extender a los campos de funciones racionales:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}(M_s^\circ) & \xleftarrow{p^*} & \mathbb{C}(N_s) \\ \mu_{k;\mathcal{A}}^* \uparrow & & \uparrow \mu_{k;\mathcal{X}}^* \\ \mathbb{C}(M_{s'}^\circ) & \xleftarrow{p^*} & \mathbb{C}(N_{s'}) \end{array} \quad (6.20)$$

donde $p^* : \mathbb{C}(N) \rightarrow \mathbb{C}(M^\circ)$ es definido por $p^* \left(\frac{f}{g} \right) := \frac{p^*(f)}{p^*(g)}$, $f, g \in \mathbb{C}[N]$. Nota que la ecuación (6.19) escrita de otra manera es

$$(\mu_{k;\mathcal{A}}^* \circ p^*) (z^{e_i}) = (p^* \circ \mu_{k;\mathcal{X}}^*) (z^{e_i})$$

En particular, la prueba de la Proposición 6.16 muestra que (6.20) es conmutativo. □

Corolario 6.18. Sea $p^* : N \rightarrow M^\circ$ un isomorfismo de latices. En esta caso $p^* : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X}$ es un isomorfismo de esquemas.

Ejercicio 6.5. Verifica el Corolario 6.18.

6.2.1. Ejercicios

Ejercicio 6.6. Definimos la **tropicalización** de un polinomio $f \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[z_1^{\pm 1}, \dots, z_{n+m}^{\pm 1}]$ con $f = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m t^m$ como

$$f^{\text{Trop}} : \mathbb{Z}^{n+m} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad a \mapsto \text{máx}\{a, m\} : c_m \neq 0\}.$$

De manera similar una función racional libre de substracciones $\frac{f}{g}$ con $f, g \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[z_1^{\pm 1}, \dots, z_{n+m}^{\pm 1}]$ se tropicaliza a

$$f^{\text{Trop}} - g^{\text{Trop}} : \mathbb{Z}^{n+m} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad a \mapsto f^{\text{Trop}}(a) - g^{\text{Trop}}(a).$$

Para un mapeo $\phi : (\mathbb{C}^*)^{n+m} \rightarrow (\mathbb{C}^*)^{n+m}$ definido por $a = (a_1, \dots, a_{n+m}) \mapsto (\phi_1(a), \dots, \phi_{n+m}(a))$ definimos la tropicalización $\phi^{\text{Trop}} : \mathbb{Z}^{n+m} \rightarrow \mathbb{Z}^{n+m}$ como

$$p \mapsto \left(\phi_1^{\text{Trop}}(p), \dots, \phi_{n+m}^{\text{Trop}}(p) \right).$$

1. Calcula la tropicalización de $\mu_{k;\mathcal{A}} : T_{N_s^\circ} \dashrightarrow T_{N_{s'}^\circ}$.
2. Calcula la tropicalización de $\mu_{k;\mathcal{X}} : T_{M_s} \dashrightarrow T_{M_{s'}}$.
3. Sea $p : T_{N^\circ} \rightarrow T_M$ un mapeo de ensamble de conglomerado. Para s' los datos de la semilla obtenida de s por mutación en la dirección k muestra que el diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} N_s^\circ & \xrightarrow{p^{\text{Trop}}} & M_s \\ \mu_{k;\mathcal{A}}^{\text{Trop}} \downarrow & & \downarrow \mu_{k;\mathcal{X}}^{\text{Trop}} \\ N_{s'}^\circ & \xrightarrow{p^{\text{Trop}}} & M_{s'} \end{array} \quad (6.21)$$

Ejercicio 6.7. Definimos el **dual de Langlands** Γ^\vee de los datos fijos Γ :

- $N^\vee := N^\circ$ con sublatiz saturada $D \cdot N =: (N^\vee)^\circ$ donde $D := \text{mmc}(d_1, \dots, d_{n+m})$ es el mínimo múltiple común;
- la forma bilineal casi-simétrica es $\{\cdot, \cdot\}^\vee : N^\vee \times N^\vee \rightarrow \mathbb{Q}$, donde $\{\cdot, \cdot\}^\vee := D^{-1}\{\cdot, \cdot\}$;
- $I^\vee := I$ y $I_{\text{mut}}^\vee := I_{\text{mut}}$;
- para cada $i \in I^\vee$ definimos $d_i^\vee := d_i^{-1}D$;
- las latices duales son $M^\vee = M^\circ$ y $(M^\vee)^\circ = D^{-1}M$.

Nota que en el caso casi-simétrico donde $d_i = 1$ en Γ tenemos $\Gamma^\vee = \Gamma$. Dado los datos de una semilla $s = (e_i : i \in I)$ para Γ definimos los **datos de una semilla dual** para Γ^\vee

$$s^\vee := (e_i^\vee : i \in I), \quad e_i^\vee := d_i e_i$$

1. ¿Cuales son las bases de $N^\vee, (N^\vee)^\circ, M^\vee$ y $(M^\vee)^\circ$ obtenidos de los datos s^\vee ?
2. Sea $\epsilon = (\epsilon_{ij})_{i \in I_{\text{mut}}, j \in I}$ la matriz asociada a los datos Γ y s . Muestra que la matriz $\epsilon^\vee := (\epsilon_{ij}^\vee)_{i \in I_{\text{mut}}^\vee, j \in I^\vee}$ donde $\epsilon_{ij}^\vee := \{e_i^\vee, d_j^\vee e_j^\vee\}^\vee$ coincide (bajo un signo) con la matriz que determina p_2^* para Γ con respecto a s .

3. Dado un mapeo de ensamble de conglomerado $p^* : N \rightarrow M^\circ$ para Γ definido con respecto a los datos de una semilla s por la matriz \widetilde{B}_s . ¿Cuál sea una matriz asociada \widetilde{B}_{s^\vee} que determina un mapeo de ensamble de conglomerado para Γ^\vee ?

Las variedades de conglomerado asociado a los datos fijos Γ^\vee son

$$\mathcal{A}_{\Gamma^\vee} := \bigcup T_{(N^\vee)^\circ} \quad \text{y} \quad \mathcal{X}_{\Gamma^\vee} = \bigcup T_{M^\vee}.$$

4. Muestra que los \mathbf{g} -vectores asociados a las datos fijos Γ satisfacen la mutación obtenida de la tropicalización de $\mu_k; \mathcal{X}_{\Gamma^\vee} : T_{M_{s^\vee}^\vee} \dashrightarrow T_{M_{s^\vee}^\vee}$. **Tipp:** Usa el **Ejercicio 6.6** y el **Corolario 5.40**.

7. Grassmannianas

Recuerda que la Grassmanniana es el conjunto de todos los subespacios vectoriales de dimensión k en \mathbb{C}^n . Fijamos la base estándar de \mathbb{C}^n y para cada $V \in \text{Gr}(k, n)$ encojemos una base $\{v_1, \dots, v_k\}$. Definimos

$$\begin{aligned} \iota : \text{Gr}(k, n) &\rightarrow \mathbb{P}\left(\bigwedge^k \mathbb{C}^n\right) \\ V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle &\mapsto [v_1 \wedge \dots \wedge v_k] \end{aligned}$$

Recuerda que $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ es un espacio vectorial de dimensión $\binom{n}{k}$. Cada base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de \mathbb{C}^n induce una base para $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ cuyos elementos están en biyección con secuencias $i_1 < \dots < i_k$ de números en $[n]$

$$\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}.$$

Nota que es suficiente considerar secuencias aumentadas por la antisimetría: $w_1 \wedge \dots \wedge w_i \wedge w_{i+1} \wedge \dots \wedge w_k = -w_1 \wedge \dots \wedge w_{i+1} \wedge w_i \wedge \dots \wedge w_k$.

Las coordenadas de $\mathbb{P}\left(\bigwedge^k \mathbb{C}^n\right)$ por lo tanto son dadas por la base dual:

$$p_{i_1 \dots i_k} := (e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k})^* \in \left(\bigwedge^k \mathbb{C}^n\right)^*$$

que se llaman las **coordenadas de Plücker**. Dado $V \in \text{Gr}(k, n)$ con base $\{v_1, \dots, v_k\}$ sea M_V es la matriz cuyas filas corresponden a las expresiones de v_1, \dots, v_k en $\{e_1, \dots, e_n\}$. Entonces, $p_{i_1 \dots i_k}(\iota(V))$ es la determinante de la submatriz de M_V con columnas i_1, \dots, i_k .

Teorema 7.1. El mapeo ι es un encaje de la Grassmanniana como una variedad proyectiva irreducible. El imagen de ι es el conjunto de ceros del **ideal de Plücker** $I_{k,n} \subset \mathbb{C}[p_{i_1 \dots i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n]$ que es el kernel del mapeo de anillos de polinomios:

$$\mathbb{C}[p_{i_1 \dots i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n] \rightarrow \mathbb{C}[x_{ij} : 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n].$$

Definimos el **álgebra de Plücker** como el cociente $\mathbb{C}[p_{i_1 \dots i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n]/I_{k,n}$. Scott provó en [Sco06] que $A_{k,n}$ es un álgebra de conglomerado generalizando el resultado de Fomin y Zelevinsky sobre el álgebra de Plücker $A_{2,n}$.

7.1. Realización geométrica de álgebras de conglomerado

En esta subsección vamos a revisar la idea atrás de la prueba de Scott: un criterio de Fomin y Zelevinsky en [FZ03a] sobre cuando un álgebra de conglomerado es el anillo de una variedad racional casi-afín irreducible algebraica sobre \mathbb{C} . Refinamos la definición de un álgebra de conglomerado de tipo geométrico

Definición 7.2. Sea A un álgebra de conglomerado de rango n con coeficientes en un semicampo (\mathbb{P}, \oplus) y sea \mathcal{P} el conjunto de los coeficientes $p_{k;t}^+ = \frac{y_{k;t}}{y_{k;t} \oplus 1}$ y $p_{k;t}^- = \frac{1}{y_{k;t} \oplus 1}$ que aparecen en las relaciones de intercambio (5.9) para cada k mutable y $t \in \mathbb{T}_n$. Entonces, A es de **estrictamente del tipo geométrico** si satisface lo siguiente:

$$(7.1) \quad \mathbb{P} = \text{Trop}(p_j : i \in J);$$

$$(7.2) \quad \text{cada } p_{k;t}^\pm \in \mathcal{P} \text{ es un monomio con todos los exponentes no negativos en los } p_j, j \in J;$$

$$(7.3) \quad p_j \in \mathcal{P} \text{ para todas las } j \in J.$$

El siguiente resultado nos dice cuando la \mathbb{Z} -forma de un anillo de coordenadas $\mathbb{C}[X]$ de una variedad algebraica X es un álgebra de conglomerado. Vamos a suponer que X satisfaga las siguientes condiciones

$$(7.4) \quad X \text{ es irreducible; en este caso } \mathbb{C}[X] \text{ es un dominio entero y su campo de fracciones es bien definido.}$$

$$(7.5) \quad X \text{ es casi-afín, es decir es un abierto a dentro de una variedad afín; en este caso el campo de fracciones de } \mathbb{C}[X] \text{ coincide con el campo de funciones racionales } \mathbb{C}(X).$$

$$(7.6) \quad X \text{ es racional, es decir hay un mapeo biracional } X \dashrightarrow \mathbb{A}^{\dim X}; \text{ en este caso } \mathbb{C}(X) \text{ es isomorfo al anillo de funciones racionales en } \dim X \text{ variables.}$$

Proposición 7.3 (Proposición 11.1 en [FZ03a]). Sea A un álgebra de conglomerado en \mathcal{F} estrictamente de tipo geométrico (Definición 7.2) y sea X una variedad racional casi-afín irreducible algebraica tal que $\dim X = n + |J|$. Supongamos que

$$(7.7) \quad \text{para } \mathcal{X} \text{ el conjunto de las variables de conglomerado de } A \text{ existe una familia funciones regulares en } \mathbb{C}[X] \text{ en biyección con } \mathcal{X} \cup J: \{\varphi_x : x \in \mathcal{X}\} \cup \{\varphi_j : j \in J\};$$

$$(7.8) \quad \text{las funciones } \varphi_x \text{ y } \varphi_j \text{ generan el álgebra } \mathbb{C}[X];$$

$$(7.9) \quad \text{si reemplazamos } x \mapsto \varphi_x \text{ y } p^\pm = \prod_{j \in J} p_j^{a_j} \mapsto \prod_{j \in I} \varphi_j^{a_j} \text{ en las relaciones de intercambio (5.9) en } \varphi_x \text{ y } \varphi_j \text{ obtenemos identidades en } \mathbb{C}[X].$$

En este caso la asignación

$$x \mapsto \varphi_x \quad \text{y} \quad p_j \mapsto \varphi_j \tag{7.10}$$

se extiende de manera única a un isomorfismo entre las álgebras A y la \mathbb{Z} -forma de $\mathbb{C}[X]$.

Prueba. Sea \mathbf{x} un conglomerado de A y sea $\tilde{\mathbf{x}} := \mathbf{x} \cup \{p_j : j \in J\}$. Recuerda que \mathbf{x} es una base trascendental de \mathcal{F} sobre $\mathbb{Z}\mathbb{P}$. En particular $\mathcal{F} = \mathbb{Q}\mathbb{P}(\mathbf{x}) = \mathbb{Q}(\mathbf{x}, p_j : j \in I)$. Entonces $\tilde{\mathbf{x}}$ es una base trascendental de \mathcal{F} sobre \mathbb{Q} . Además, cada elemento en \mathcal{X} es una función racional en $\tilde{\mathbf{x}}$ obtenida de una iteración de las relaciones de intercambio (5.9) a partir de la semilla que contiene \mathbf{x} . La suposición (7.3) implica que de la misma manera podemos encontrar expresiones de las funciones φ_x y φ_j en $\mathbb{C}(X)$ como funciones racionales en

$$\varphi(\tilde{\mathbf{x}}) := \{\varphi : x \in \mathbf{x}\} \cup \{\varphi_j : j \in J\}.$$

Nota que por las suposiciones (7.1) y (7.3) junto con el hecho que $\dim X = n + |J| = |\varphi(\tilde{\mathbf{x}})|$ tenemos que $\varphi(\tilde{\mathbf{x}})$ es una base trascendental de $\mathbb{C}(X)$. Por lo tanto la asignación (7.10) extiende a un encaje de campos $\mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}(X)$ tal que A se encaje en $\mathbb{C}[X]$. \square

Ejemplo 7.4. Aún ya sabemos que álgebra de Plücker $A_{2,5}$ es un álgebra de conglomerado vamos a verificarlo otra vez usando la Proposición 7.3.

Recuerda que $A_{2,5}$ es el cociente de $\mathbb{C}[p_{ij} : 1 \leq i < j \leq 5]$ por el ideal de Plücker generado por

$$p_{ij}p_{kl} - p_{ik}p_{jl} + p_{il}p_{jk}$$

para todas las $1 \leq i < j < k < l \leq 5$. $A_{2,5}$ es el anillo de coordenadas de la variedad afín $\widetilde{\text{Gr}}(2, 5)$ que es el cono afín de la Grassmanniana $\text{Gr}(2, 5)$. En particular, $\widetilde{\text{Gr}}(2, 5)$ es una variedad racional irreducible algebraica casi-afín, es decir satisface (7.4), (7.5) y (7.6).

El álgebra de conglomerado A_T asociada a una triangulación T del pentágono tiene variables de conglomerado x_{ij} donde $1 \leq i < j - 1 \leq 4$ y coeficientes $c_i := x_{i, i+1}$ para $1 \leq i \leq 4$ que generan el semicampo tropical ambiente. En particular A_T satisface (7.1), (7.2) y (7.3).

Tenemos que verificar las suposiciones de la Proposición 7.3:

(7.7) Tenemos la biyección

$$\{p_{ij} : 1 \leq i < j \leq 5\} \Leftrightarrow \{x_{ij} : 1 \leq i < j \leq 5\} = \mathcal{X} \cup \{c_i : i \in [4]\}.$$

(7.8) $A_{2,5}$ es generado por $\{p_{ij} : 1 \leq i < j \leq 5\}$ módulo el ideal $I_{2,5}$.

(7.9) Las relaciones de intercambio son para cada $1 \leq i < j < k < l \leq 5$ de forma $x_{ik}x_{jl} = x_{ij}x_{kl} + x_{il}x_{jk}$. Evaluando en las p_{ij} 's obtenemos las relaciones de Plücker que son validas en $A_{2,5}$.

Por lo tanto podemos usar la Proposición para establecer $A_{2,5} \cong A_T \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$.

Scott aplica la Proposición 7.3 a la Grassmanniana $\text{Gr}(k, n)$. Nota que el cono afín $\widetilde{\text{Gr}}(k, n)$ es una variedad algebraica afín cuya anillo de coordenadas es $A_{k,n}$. Por lo tanto se satisfacen (7.4), (7.5) y (7.6).

La estrategia de Scott para probar que $A_{k,n}$ es un álgebra de conglomerado es la siguiente:

1. Primero define un conjunto objetos combinatorios llamados **diagramas** $\pi_{k,n}$ que definen semillas: es decir a cada diagrama $\pi_{k,n}$ se asocia un conjunto de $k(n-k) + 1 = \dim \widetilde{\text{Gr}}(k, n)$ coordenadas de Plücker que son una \mathbb{C} -base trascendental de $\mathbb{C}(\widetilde{\text{Gr}}(k, n))$, y un carcaj Q con n vértices congelados y $(k-1)(n-k-1)$ vértices mutables.

2. Entre los diagramas $\pi_{k,n}$ existe una noción de mutación o **movimiento local** que transforma un diagrama $\pi_{k,n}$ a otro. Scott pruebe en [Sco06, Theorem 2] que este cambio coincide con la mutación de la semillas asociadas.
3. De los diagramas $\pi_{k,n}$ Scott entonces obtiene un álgebra de conglomerado $A(\pi_{k,n})$. Como $A(\pi_{k,n})$ se define desde un carcaj con vértices congelados uno obtiene que cumple (7.1), (7.2) y (7.3).
4. Para probar que $A(\pi_{k,n}) = A_{k,n}$ usando la Proposición 7.3 Scott pruebe en el Teorema 3 que establece:
 - a) Cada coordenada de Plücker se obtiene de algún diagrama $\pi_{k,n}$. En particular, eso implica (7.8).
 - b) Para cada variable de conglomerado $x \in \mathcal{X}$ de $A(\pi_{k,n})$ la expresión φ_x en las coordenadas de Plücker de un diagrama $\pi_{k,n}$ obtenida de una secuencia de relaciones de intercambio en una función regular en $\widetilde{\text{Gr}}(k, n)$, es decir $\varphi_x \in A_{k,n}$. Por lo tanto nos da (7.7) y (7.9).

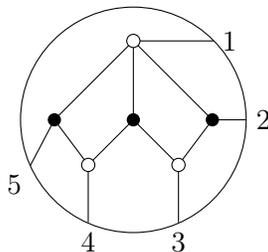
7.2. Gráficas plabic y la \mathcal{A} -variedad

Aún Scott usa los $\pi_{k,n}$ diagramas (una clase particular de **disposiciones de Postnikov** (Postnikov arrangements) o **diagramas de filamentos alternos** (alternating strand diagram)) en su artículo nos vamos a enfocar en otra clase de objetos combinatorios— las **gráficas plabic**— que son en biyección con ellos. Una referencia importante es [Pos06] donde Postnikov establece mucho de la teoría combinatoria relacionada a las Grassmannianas y sus partes totalmente no-negativas/positivas. También dicha biyección se encuentra allá. Para aplicaciones posteriores seguimos la notación Rietsch y Williams en [RW17].

Definición 7.5. Una **gráfica plabic** G es una gráfica plana bicolor no dirigida en un disco con n vértices en la frontera del disco que se llaman los **vértices frontera** que son etiquetadas $1, \dots, n$ en el sentido de las agujas del reloj. La gráfica G además tiene *vértices interiores* que se encuentran en el interior del disco. Los vértices interiores son o blancos o negros.

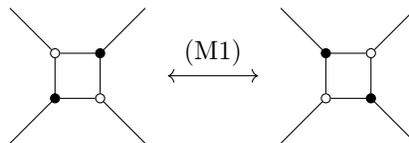
Las **caras** de G son las componentes conectadas del complemento de G dentro del disco. A las caras adyacentes a la frontera del disco las llamamos las **caras frontera**, las demás se llaman **caras interiores**.

Ejemplo 7.6. Lo siguiente es una gráfica plabic con cinco vértices frontera, cinco caras frontera y dos caras interiores:

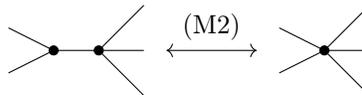


Solemos identificar los vértices de la frontera del disco con el grupo cíclico \mathbb{Z}_n y las permutaciones en S_n se consideran permutaciones de \mathbb{Z}_n . Para nuestros propósitos asumimos que las gráficas plabic son conectados y que cada vértice univalente de una gráfica plabic es un vértice de frontera. Definimos los siguientes cuatro movimientos locales que transformen a una gráfica plabic a otra:

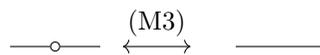
- (M1) **Movimiento del cuadrado (renovación urbana):** Si una gráfica plabic contiene un cuadrado de cuatro vértices internos con colores alternos, cada uno de los cuales es trivalente, entonces los colores se pueden intercambiar. Así, cada vértice negro del cuadrado se convierte en blanco y cada vértice blanco en negro:



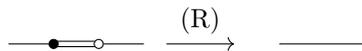
- (M2) **Contracción/expansión de un vértice:** Si dos vértices internos del mismo color están conectados por una arista, ésta puede contraerse y los dos vértices pueden fusionarse. A la inversa, cualquier vértice interno blanco o negro puede dividirse en dos vértices adyacentes del mismo color:



- (M3) **Inserción/extracción de un vértice en medio:** Si una gráfica plabic contiene un vértice interno de grado dos (es decir es adyacente a dos aristas), éste puede ser eliminado. De forma equivalente, se puede insertar un vértice interno blanco o negro en medio de cualquier arista:



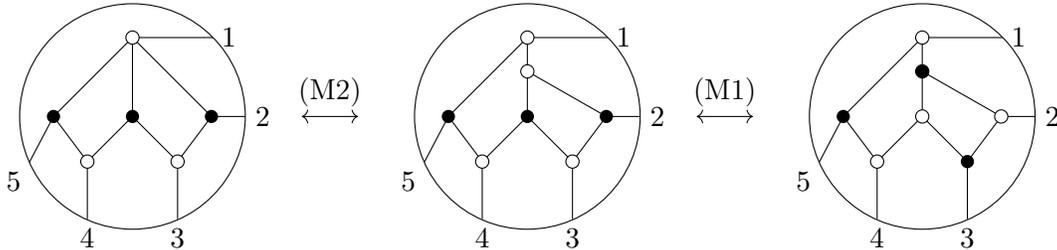
- (R) **Reducción de aristas paralelas:** Si dos vértices internos de color opuesto están conectados por dos aristas paralelas, pueden reducirse a una sola arista. Este movimiento no puede hacerse a la inversa:



La *clase de equivalencia* de una gráfica plabic G se define como el conjunto de todos las gráficas plabic que se pueden obtener a partir de G aplicando (M1)-(M3). Si en la clase de equivalencia no hay ningún grafo al que se pueda aplicar (R), decimos que G es *reducida*. A partir de ahora sólo consideraremos gráficas plabic reducidas.

Ejercicio 7.1. Muestra que cada gráfica plabic G se puede transformar en una gráfica trivalente o una gráfica bipartida usando los movimientos locales (M2) y (M3).

Ejemplo 7.7. Consideramos la gráfica plabic del Ejemplo 7.6. Nota que ya es bipartida. Podemos aplicar el movimiento (M2) en el vértice blanco adyacente al vértice frontero uno para obtener una gráfica trivalente. Además después de la aplicación de (M2) podemos hacer el movimiento (M1) lo cual lo fue posible anteriormente:

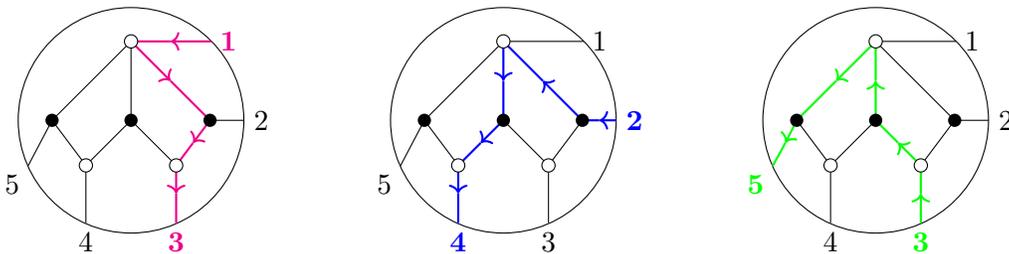


Definición 7.8. Sea G una gráfica plabic reducida. Definimos la **permutación de viaje** $\pi_G \in S_n$ como sigue. Comenzamos en un vértice frontera $i \in \mathbb{Z}_n$ y formamos un camino a lo largo de las aristas de G siguiendo las **reglas del camino**:

- girando al máximo a la derecha en un vértice negro;
- y al máximo a la izquierda en un vértice blanco interno.

El camino resultante es el **viaje** T_i . Terminamos en un vértice frontera $j \in [n]$ y así definimos $\pi_G(i) = j$. Entonces, $\pi_G = (\pi_G(1), \dots, \pi_G(n))$.

Ejemplo 7.9. Calculamos la permutación del viaje de la gráfica plabic del Ejemplo 7.6. Empezamos en el vértice frontera uno y seguimos las reglas del camino:



Repetiendo para los vértices 4 y 5 obtenemos la permutación $\pi_G = (3, 4, 5, 1, 2) = \pi_{3,5}$.

Lema 7.10. [Lemma 13.1 en [Pos06]] Sean G' gráfica plabic que se obtiene de la gráfica plabic G de una secuencia de movimientos locales (M1)-(M3). Entonces, $\pi_G = \pi_{G'}$. Es decir, la permutación de viaje es una invariante de la clase de equivalencia de una gráfica plabic reducida.

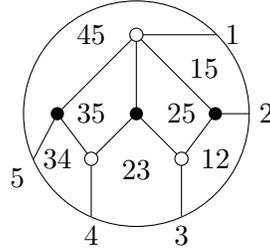
Nota que el movimiento de reducción (R) si cambia la permutación del viaje.

Ejercicio 7.2. Verifica que los movimientos locales (M1)-(M3) no cambian la permutación del viaje.

Sea $\pi_{k,n} := (n - k + 1, n - k + 2, \dots, n, 1, 2, \dots, n - k)$. En otras palabras, $\pi_{k,n}$ es la permutación de \mathbb{Z}_n que envía i a $i + (n - k)$. A partir de ahora nos centramos en las gráficas plabic G con permutación de viaje $\pi_G = \pi_{k,n}$. Los viajes T_i se pueden usar para definir etiquetas de las caras de G :

Definición 7.11. Para cada i el viaje T_i de i a $\pi_{k,n}(i)$ definido anteriormente, divide el disco en dos regiones. Etiquetamos cada cara en la región al lado izquierda de la trayectoria por i . Después de repetir este proceso para cada $1 \leq i \leq n$, todas las caras son etiquetadas por un subconjunto de $n - k$ elementos de $[n]$.

Ejemplo 7.12. Del Ejemplo 7.9 ya conocemos los viajes T_1, \dots, T_5 . Según la Definición 7.11 nos da los siguientes etiquetas de las caras:



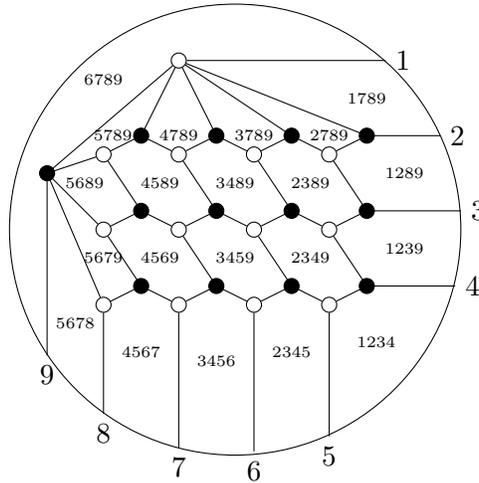
Para una gráfica plabic G con $\pi_G = \pi_{k,n}$ definimos

$$\tilde{\mathcal{P}}_G := \left\{ I \in \binom{[n]}{k} : I \text{ es etiqueta de una cara de } G \right\}.$$

Proposición 7.13. Sea G una gráfica plabic G con $\pi_G = \pi_{k,n}$ entonces $|\tilde{\mathcal{P}}_G| = k(n - k) + 1$. Además todos los intervalos $[i + 1, i + n - k]$ se encuentran en el conjunto de etiquetas $\tilde{\mathcal{P}}_G$ para todas las $i \in \mathbb{Z}_n$. Además G es reducida.

Para probar la Proposición introducimos una gráfica plabic especial:

Definición 7.14. La **gráfica plabic rectangular** $G_{k,n}^{\text{rec}}$ es la gráfica plabic que tiene la siguiente forma:



En este caso tenemos $n = 9$ y $k = 5$. En el caso general tenemos los vértices frontera $1, \dots, n - k$ en el lado derecho los vértices $n - k + 1, \dots, n$ abajo.

Ejercicio 7.3. Muestra que la gráfica plabic rectangular $G_{k,n}^{\text{rec}}$ satisface $\pi_{G_{k,n}^{\text{rec}}} = \pi_{k,n}$ y que las etiquetas de las caras en la frontera son todos los intervalos $[i + 1, i + n - k]$.

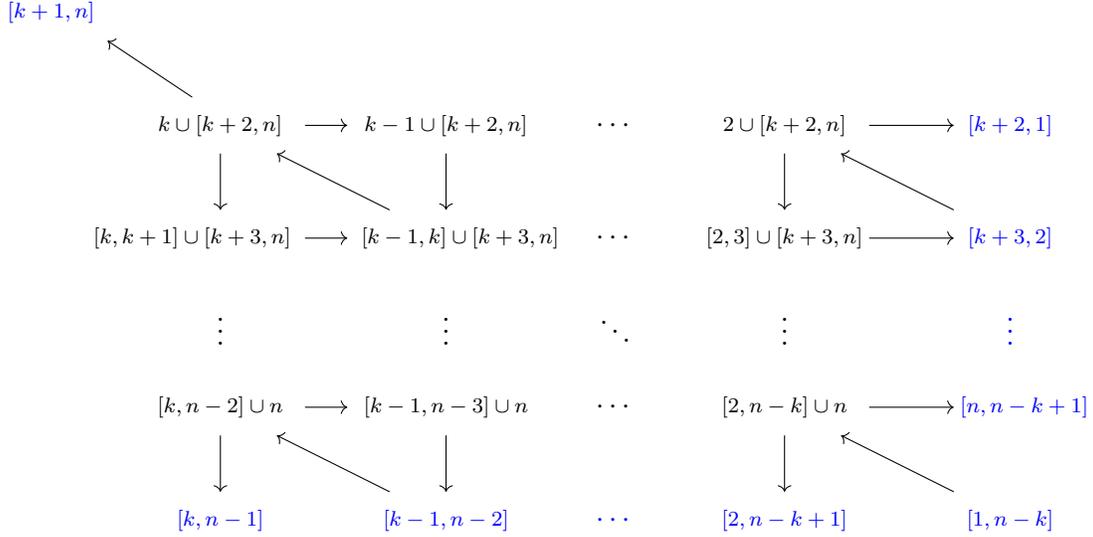


Figura 16: El carcaj $\tilde{Q}_{G_{k,n}^{\text{rec}}}$ y los índices del conglomerado asociado.

Prueba de la Proposición 7.13. Primero nos enfocamos en la gráfica plabic rectangular. Nota que $G_{k,n}^{\text{rec}}$ tiene $(n-k)k+1$ muchas caras. Por el Ejercicio anterior también satisface la segunda afirmación. Para verificar que cada gráfica plabic reducida con la permutación del viaje $\pi_{k,n}$ satisface la Proposición basta observar que los movimientos locales (M1)-(M3) ni cambian las etiquetas de las caras en la frontera ni el número total de caras (por el Lema 7.10). \square

Ejercicio 7.4. Aplica el Teorema 13.2 de [Pos06] para verificar que $G_{k,n}^{\text{rec}}$ es reducida, pues todas las gráficas en su clase de equivalencia también lo son.

Dado una gráfica plabic queremos asociar una semilla. Primero definimos un carcaj asociado:

Definición 7.15. Sea G una gráfica plabic reducida con permutación del viaje $\pi_{k,n}$. Supongamos además que G es bipartita y no contiene vértices bivalentes, lo cual es posible conseguir haciendo uso repetido de los movimientos (M2) y (M3). Definimos el **carcaj asociado a G** \tilde{Q}_G como sigue:

1. El conjunto de vértices de \tilde{Q}_G está en correspondencia con las caras de G , por lo que $(\tilde{Q}_G)_0 \equiv \tilde{\mathcal{P}}_G$; el conjunto de vértices congeladas está formado por las caras adyacentes a la frontera.
2. Las flechas corresponden a las aristas de G que no son adyacentes a la frontera. Como asumimos que G está en forma bipartita, un extremo de una arista es blanco y el otro es negro. La flecha está orientada de forma que el vértice blanco aparece a su lado *derecho* respecto a la orientación.

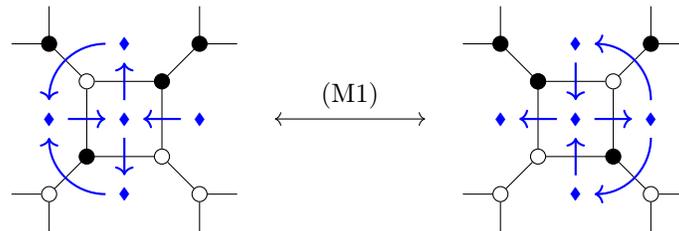
La **semilla asociada a G** consiste en el carcaj \tilde{Q}_G y el conglomerado $\{\Delta_I : I \in \tilde{\mathcal{P}}_G\}$.

Ejercicio 7.5. Sean G y G' dos gráficas plabic con permutación $\pi_G = \pi_{G'} = \pi_{k,n}$ tal que G' se obtiene de G de una secuencia de movimientos (M2) y (M3). Muestra que las semillas asociadas a G y G' coinciden.

En lo que sigue vamos a probar que las semillas asociadas a las gráficas plabic son bien definidas, es decir que el movimiento del cuadro (M1) corresponde a la mutación de semillas.

Proposición 7.16. El movimiento del cuadro en una gráfica plabic corresponde a la mutación en el vértice correspondiente en el carcaj.

Prueba. El movimiento del cuadro es local en el sentido que afecta solo a la cara que corresponde al cuadro y a sus vecinos. Lo mismo vale en el caso de la mutación del carcaj: afecta solo a las flechas incidentes al vértice de la mutación. Sea G una gráfica plabic y G' obtenida de G por el movimiento (M1). Por lo tanto basta ver que localmente el carcaj asociado a G' coincide con la mutación correspondiente en Q_G . Supongamos que G es trivalente y que localmente se ve así (los demás casos son muy similar):



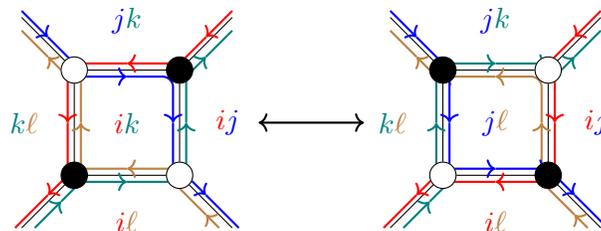
□

Para establecer que también la mutación de semillas es compatible con los movimientos locales en las gráficas plabic el siguiente Lema va a ser muy útil:

Lema 7.17 (p. 47 en [Pos06]). Cada arista de una gráfica plabic reducida es parte de exactamente dos viajes T_i y T_j que pasan por la arista en sentidos opuestos.

Proposición 7.18. El movimiento del cuadro en gráficas plabic de tipo $\pi_{k,n}$ corresponde a la mutación de semillas. Más precisamente, (M1) corresponde a las relaciones de Plücker de tres términos en $A_{n-k,n}$.

Prueba. Sean G y G' dos gráficas plabic con permutación del viaje $\pi_{k,n}$ tal que G' se obtiene de G por un movimiento del cuadro en la cara con etiqueta μ . Del Lema anterior sabemos que en cada arista adyacente entra exactamente un viaje. Por lo tanto localmente obtenemos las siguientes etiquetas:



Los demás índices de las etiquetas tienen que coincidir pues por el Lema anterior no hay más espacio para viajes que podrían determinar etiquetas distintas en las caras adyacente del cuadrado. Sea $I \in \binom{[n]}{k-2}$ el conjunto de índices que tiene en común. Por lo tanto

$$\tilde{\mathcal{P}}_{G'} = \tilde{\mathcal{P}}_G \setminus \{Iik\} \cup \{Ijl\},$$

donde $Iik := I \cup \{i, k\}$ etc. Lo cual induce la siguiente relación de intercambio entre las semillas asociadas:

$$\Delta_{Iik} \Delta_{Ijl} = \Delta_{Iij} \Delta_{Ikl} + \Delta_{Ikj} \Delta_{Iil}. \quad (7.11)$$

Esta relación justo corresponde a una relación de Plücker de tres términos que es válida en $A_{n-k,n}$. \square

Las Propositiones 7.16 y 7.18 son las ingredientes claves para la prueba del siguiente resultado:

Teorema 7.19 (Teorema 3 en [Sco06]). Sea G una gráfica plabic reducida con $\pi_G = \pi_{k,n}$. Definimos el \mathbb{C} -álgebra de conglomerado $A_{n-k,n}^G$ asociada a la semilla $(\tilde{Q}_G, \{\Delta_I : I \in \tilde{\mathcal{P}}_G\})$. Entonces, existe un isomorfismo $\varphi^* : A_{n-k,n}^G \rightarrow A_{n-k,n}$ de $\mathbb{C}[p_{[i+1, i+n-k]} : i \in [n]]$ -álgebras tal que $\varphi^*(\Delta_I) = p_I$ (donde identificamos $p_{[i+1, i+n-k]} = \Delta_{[i+1, i+n-k]}$).

El Teorema 7.19 tiene la formulación geométrica. La segunda parte es una consecuencia de la construcción del mapeo φ^* en la prueba de Scott.

Corolario 7.20. Sea $\tilde{\mathcal{A}}_{n-k,n}$ la \mathcal{A} -variedad de conglomerado asociado al álgebra de conglomerado $A_{n-k,n}^G$. Entonces, existe un encaje

$$\varphi : \tilde{\mathcal{A}}_{n-k,n} \hookrightarrow \widetilde{\text{Gr}}_{n-k}(\mathbb{C}^n) = \text{Spec}(A_{n-k,n}).$$

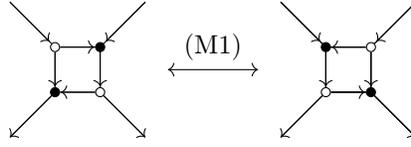
definido por el pullback $\varphi^* : \text{up}(\tilde{\mathcal{A}}_{n-k,n}) \rightarrow A_{n-k,n}$. De hecho el mapeo φ^* del Teorema 7.19 es un isomorfismo entre el álgebra de conglomerado superior $\text{up}(\tilde{\mathcal{A}}_{n-k,n}) \cong A_{n-k,n}$.

7.3. Flujos y la \mathcal{X} -variedad

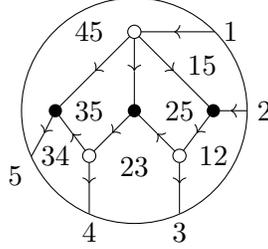
Definición 7.21. Una orientación \mathcal{O} de una gráfica plabic G se llama *perfecta*, si cada vértice blanco interno tiene exactamente una flecha de entrada y cada vértice negro interno tiene exactamente una flecha de salida. El conjunto de vértices de la frontera que son fuentes se llama *conjunto de fuentes* y se denota por $I_{\mathcal{O}}$.

Lema 7.22 (Lemata 3.2, 4.5 y 14.9 en [Pos06]). Cada gráfica plabic G con $\pi_G = \pi_{k,n}$ tiene una orientación perfecta acíclica. Además podemos escoger \mathcal{O} tal que el conjunto de funestes es $[n-k]$. Esta orientación es única.

De hecho es suficiente escoger una orientación perfecta con $I_{\mathcal{O}} = [n-k]$ para una gráfica plabic G con $\pi_G = \pi_{k,n}$. Si G' es otra gráfica plabic obtenida de G por una secuencia de movimientos (M1)-(M3) entonces la orientación perfecta \mathcal{O}' con $I_{\mathcal{O}'} = [n-k]$ se obtiene de \mathcal{O} por el siguiente **movimiento del cuadrado orientado**:



Ejemplo 7.23. Continuando con el ejemplo anterior, la orientación perfecta única del Lema 7.22 en la gráfica plabic $G_{3,5}^{\text{rec}}$ es la siguiente:



Definición 7.24. Un **flujo** F desde $I_{\mathcal{O}}$ a un conjunto J de vértices en la frontera con $|J| = |I_{\mathcal{O}}|$ es una colección de caminos en \mathcal{O} , todos disjuntos por pares de vértices, tales que los orígenes de estos caminos son $I_{\mathcal{O}} \setminus (I_{\mathcal{O}} \cap J)$ y los destinos son $J \setminus (I_{\mathcal{O}} \cap J)$. Obsérvese que cada camino ρ en \mathcal{O} divide las caras de G en las que están a la izquierda y las que están a la derecha del camino con respecto a su orientación. Sea $I_{\mathcal{O}} - (J \cap I_{\mathcal{O}}) = \{j_1, \dots, j_r\}$ y sea $F = \{\rho_{j_1}, \dots, \rho_{j_r}\}$ un flujo donde cada camino ρ_{j_i} tiene pozo j_i . Definimos el **peso** $\text{wt}(\rho)$ **de un camino** ρ como el producto de parámetros y_I , donde I es una etiqueta de una cara a la izquierda del camino. Y definimos el **peso** $\text{wt}(F)$ **de un flujo** F como el producto de los pesos de todos los caminos del flujo.

Nota que por definición la variable $y_{[k+1,n]}$ que corresponde a la cara de frontera entre los vértices 1 y n nunca aparece al lado derecho de un camino de $[n-k]$ a J para cualquier $J \in \binom{[n]}{n-k}$. Por lo tanto definimos $\mathcal{P}_G := \tilde{\mathcal{P}}_G \setminus \{[k+1, n]\}$.

Dada la orientación perfecta \mathcal{O} con $I_{\mathcal{O}} = [n-k]$ en una gráfica plabic reducida G con $\pi_G = \pi_{k,n}$ definimos para cada $J \in \binom{[n]}{n-k}$ su **polinomio de flujos**

$$P_J^G = \sum_{F \text{ flujo de } I_{\mathcal{O}} \text{ a } J} \text{wt}(F) \in \mathbb{Z}[y_I : I \in \mathcal{P}_G].$$

Ejemplo 7.25. Calculamos algunos polinomios de flujos con respecto a la orientación perfecta de la gráfica $G = G_{3,5}^{\text{rec}}$ del Ejemplo 7.23. Por ejemplo, tenemos

$$\begin{aligned} P_{\{1,2\}}^G &= 1, \\ P_{\{1,5\}}^G &= y_{12}y_{23}y_{34}, \\ P_{\{2,4\}}^G &= y_{12}y_{15}y_{23}(1 + y_{25}). \end{aligned}$$

Ejercicio 7.6. Completa el Ejemplo 7.25 y calcula los demás polinomios de flujos para todos los $J \in \binom{[5]}{2}$.

Recuerda la **Grassmanniana totalmente positiva**

$$\mathrm{Gr}_{n-k}^+(\mathbb{R}^n) = \left\{ V \in \mathrm{Gr}_{n-k}(\mathbb{R}^n) : p_J(V) > 0 \forall J \in \binom{[n]}{n-k} \right\}.$$

Existe una relación íntima entre los parámetros $\{x_I : I \in \mathcal{P}_G\}$ de una gráfica plabic orientada G con $\pi_G = \pi_{k,n}$ y $\mathrm{Gr}_{n-k}^+(\mathbb{R}^n)$. De hecho esta conexión fue la motivación de Postnikov para desarrollar la teoría de las gráficas plabic. Antes de indicar el resultado necesitamos la siguiente noción: el **divisor de la frontera** de $\mathrm{Gr}_{n-k}(\mathbb{C}^n)$ es

$$D := \bigcup_{i \in [n]} D_i, \quad \text{donde } D_i = \{p_{[i+1, i+n-k]} = 0\} \subset \mathrm{Gr}_{n-k}(\mathbb{C}^n).$$

Definimos $\mathrm{Gr}_{n-k}(\mathbb{C}^n)^\circ := \mathrm{Gr}_{n-k}(\mathbb{C}^n) \setminus D$.

Teorema 7.26 (Teorema 12.7 en [Pos06] y Teorema 6.6 en [RW17]). Sea G una gráfica plabic reducida de tipo $\pi_{k,n}$ con la orientación perfecta acíclica \mathcal{O} que satisface $I_{\mathcal{O}} = [n-k]$. Definimos la $(n-k) \times n$ matrix A_G con entradas en $\mathbb{Z}[x_I : I \in \mathcal{P}_G]$ cuya entrada (i, j) es

$$(-1)^{|\{i' \in [n-k] : i < i' < j\}|} \sum_{\rho: i \rightarrow j} \mathrm{wt}(\rho), \quad (7.12)$$

donde la suma es sobre todos los caminos en \mathcal{O} de i a j . Definimos el mapeo

$$\begin{aligned} \Phi_G : (\mathbb{C}^*)^{\mathcal{P}_G} &\rightarrow \mathrm{Gr}_{n-k}(\mathbb{C}^n)^\circ \\ (y_I)_{I \in \mathcal{P}_G} &\mapsto A(y_I)_{I \in \mathcal{P}_G}, \end{aligned}$$

donde $A(y_I)_{I \in \mathcal{P}_G}$ es la matrix en $\mathbb{C}^{(n-k) \times n}$ obtenida de A_G evaluando en $(y_I)_{I \in \mathcal{P}_G} \in (\mathbb{C}^*)^{\mathcal{P}_G}$. La restricción de Φ_G a $(\mathbb{R}_{>0})^{\mathcal{P}_G}$ es una parametrización de la Grassmanniana totalmente positiva $\mathrm{Gr}_{n-k}^+(\mathbb{R}^n)$ y se llama una **carta de la red** (G, \mathcal{O}) . El toro $T_{M;G'} := (\mathbb{C}^*)^{\mathcal{P}_G}$ con coordenadas $(y_I)_{I \in \mathcal{P}_G}$ se llama el **toro de la red**.

Ejemplo 7.27. Para la gráfica plabic $G = G_{3,5}^{\mathrm{rec}}$ con su orientación como en el Ejemplo 7.23 la matrix A_G es la siguiente

$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -y_{12}y_{15} & -y_{12}y_{15}y_{23}(1+y_{25}) & -y_{12}y_{15}y_{23}y_{34}(1+y_{25}+y_{25}y_{35}) \\ 0 & 1 & y_{12} & y_{12}y_{23} & y_{12}y_{23}y_{34} \end{pmatrix}$$

Nota que todos los menores $p_{i,i+1}$ de A_G son monomios en los coordenadas y_{ij} . En particular, para cada $(y_{ij})_{ij \in \mathcal{P}_G}$ la matrix A_G esta contenido en

$$\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^5) \setminus D = \mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^5)^\circ$$

donde $D = \bigcup_{i \in [5]} D_i$ y $D_i = \{p_{i+1, i+2} = 0\}$.

En su artículo [RW17] Rietsch y Williams prueban el siguiente Teorema que conecta el anterior con los polinomios de flujos. Es una aplicación del Lema de Lindström–Gessel–Viennot que es tema del Proyecto A.2 y se puede generalizar a todas las gráficas plabic reducidas orientadas según el Teorema 1.1 en [Tal08].

Teorema 7.28 (Teorema 6.8 en [RW17]). Sea G una gráfica plabic reducida de tipo $\pi_{k,n}$ con la orientación perfecta acíclica \mathcal{O} que satisface $I_{\mathcal{O}} = [n - k]$ y sea $J \in \binom{[n]}{n-k}$. Entonces,

$$p_J(A_G) = P_J^G.$$

Es decir, la coordenada de Plücker p_J de la matriz A_G definida en (7.12) es el polinomio de flujo P_J^G .

Ejemplo 7.29. Calculamos los menores de la matriz $A_{G_{3,5}^{\text{reg}}}$ del Ejemplo 7.27 y comparamos con los polinomios de flujos que calculamos en el Ejemplo 7.25:

$$\begin{aligned} p_{12}(A_{G_{3,5}^{\text{reg}}}) &= 1 = P_{\{1,2\}}^G \\ p_{15}(A_{G_{3,5}^{\text{reg}}}) &= y_{12}y_{23}y_{34} = P_{\{1,5\}}^G \\ p_{24}(A_{G_{3,5}^{\text{reg}}}) &= y_{12}y_{15}y_{23}(1 + y_{25}) = P_{\{2,4\}}^G \end{aligned}$$

Ejercicio 7.7. Verifica el Teorema 7.28 para $G_{3,5}^{\text{reg}}$.

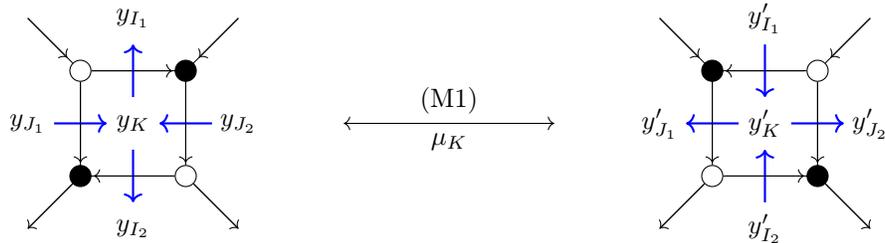
Estamos preparados para el resultado clave que conecta los polinomios de flujo con la teoría de álgebras y variedades de conglomerado. A cada gráfica plabic G de tipo $\pi_{k,n}$ asociamos el carcaj $Q(G)$ que se obtiene de $\tilde{Q}(G)$ eliminando el vértice con la etiqueta $[k + 1, n]$ y la matriz del carcaj $\tilde{B}_G := \tilde{B}(Q(G))$. Definimos la **Y -semilla asociada a G** de rango $(n - k - 1) \times (k - 1)$ con n direcciones congeladas: $(\tilde{B}_G, \mathbf{y}_G)$ donde $\mathbf{y}_G = (y_I)_{I \in \mathcal{P}_G}$. En el lenguaje geométrico identificamos $y_I = z^{e_I}$ donde $(e_I : I \in \mathcal{P}_G)$ son los datos de la semilla.

Teorema 7.30 (Lema 6.15 en [RW17]). Sea G una gráfica plabic de tipo $\pi_{k,n}$ con orientación perfecta \mathcal{O} tal que $I_{\mathcal{O}} = [n - k]$. Para una cara de cuadrado $K \in \mathcal{P}_G$ sea G' la gráfica plabic obtenida de G por el movimiento del cuadrado (M1) en K . Entonces, para cada $J \in \binom{[n]}{n-k}$ tenemos

$$\mu_{K; \mathcal{X}}^*(P_J^{G'}(\mathbf{y}_{G'})) = P_J^G(\mathbf{y}_G)$$

donde $(\tilde{B}_G, \mathbf{y}_G)$ y $(\tilde{B}_{G'}, \mathbf{y}_{G'})$ son dos Y -semillas relacionadas por la mutación en dirección K .

Prueba. La idea de la prueba es analizar localmente lo que pasa con flujos que están cerca de la cara K y como se transforman bajo el cambio de la orientación local:



donde $\mu_{K; \mathcal{X}}^*$ identifica $y'_K \mapsto y_K^{-1}$, $y'_{I_i} \mapsto y_{I_i}(1 + y_K)$, $y'_{J_i} \mapsto \frac{y_{J_i}y_K}{1 + y_K}$ para $i \in \{1, 2\}$. Si tenemos un flujo en G' cuyo polinomio de flujo contiene un monomio $y'_{J_2}(\mathbf{y}')^n$ pues también existe un

monomio $y'_{J_2} y'_{K'} (\mathbf{y}')^n$. Sin perder de generalidad podemos suponer que $(\mathbf{y}')^n$ es un monomio en $\{y_I : I \in \mathcal{P}_G, b_{IK} = 0\}$. En particular, bajo mutación tenemos

$$y'_{J_2} (1 + y'_{K'}) (\mathbf{y}')^n \mapsto \frac{y_{J_2} y_K}{1 + y_K} (1 + y_K^{-1}) \mu_{K'; \mathcal{X}}^* (\mathbf{y}'^n) = y_{J_2} \mathbf{y}^n$$

lo cual coincide con la observación que en G no existe el camino que corresponde al monomio divisible por $y_{J_2} y_K$, pero solo el camino del monomio divisible por y_{J_2} . Los demás casos se resuelven de manera similar. \square

Definición 7.31. Sea G una gráfica plabic de tipo $\pi_{k,n}$ con orientación \mathcal{O} que satisface $I_{\mathcal{O}} = [n - k]$. Definimos

$$\mathcal{X}^{\text{red}} := \bigcup_{G' \sim G} T_{M; G'}$$

como el esquema obtenido de pegar copias de $(\mathbb{C}^*)^{k(n-k)+1}$, una para cada gráfica plabic G' tal que $Q_{G'}$ se obtiene de Q_G por una secuencia de mutaciones que corresponden a movimientos (M1). Los mapeos para pegar los toros son inducidas por los mapeos de \mathcal{X} -mutación.

Nota que \mathcal{X}^{red} esta incluido de manera natural en la variedad de conglomerado $\mathcal{X}_{n-k,n}$ que se obtiene de la Y -semilla $(\tilde{B}_G, \mathbf{y}_G)$.

Proposición 7.32 (Proposición 7.6 en [RW17]). El encaje $\mathcal{X}^{\text{red}} \hookrightarrow \text{Gr}_{n-k}(\mathbb{C}^n)^\circ$ inducido por las cartas de la red ϕ_G se extiende de manera natural a un encaje $\mathcal{X} \hookrightarrow \text{Gr}_{n-k}(\mathbb{C}^n)^\circ$. Además, cada variable de Plücker p_J con $J \in \binom{[n]}{n-k}$ es un polinomio de Laurent en las coordenadas de cada toro $T_{M;s}$ para una semilla s en \mathcal{X} .

Idea de la Prueba: Nota que *a priori* el encaje $\mathcal{X}^{\text{red}} \hookrightarrow \text{Gr}_{n-k}(\mathbb{C}^n)^\circ$ se extiende solo a un mapeo racional $\mathcal{X}_{n-k,n} \dashrightarrow \text{Gr}_{n-k}(\mathbb{C}^n)^\circ$. El ingrediente principal de la prueba de la Proposición 7.32 es un mapeo de ensamble de conglomerado que es un isomorfismo entre las variedades de conglomerado $\mathcal{A}_{n-k,n}$ y $\mathcal{X}_{n-k,n}$. Acá $\mathcal{A}_{n-k,n}$ es la \mathcal{A} -variedad de conglomerado asociado a la semilla $(\tilde{B}_G, \mathbf{x}_G)$ donde $\mathbf{x}_G = \{p_I : I \in \mathcal{P}_G\}$.

Más precisamente, Rietsch y Williams prueban que existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{n-k,n} & \xrightarrow{p} & \mathcal{X}_{n-k,n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Gr}_{n-k}(\mathbb{C}^n)^\circ & \xrightarrow{\tau} & \text{Gr}_{n-k}(\mathbb{C}^n)^\circ \end{array}$$

donde τ es un automorfismo de la Grassmanniana conocido como el **twist** (ver [MS17, MS16]). Como todos los mapeos son encajes o isomorfismo podemos deducir que las funciones regulares en $\text{Gr}_{n-k}(\mathbb{C}^n)^\circ$ por el pullback del mapeo racional son funciones regulares en $\mathcal{X}_{n-k,n}$. Por lo tanto, los pullback de las coordenadas de Plücker son polinomios de Laurent en las coordenadas locales de cada toro $T_{M;s} \subset \mathcal{X}_{n-k,n}$. \square

Ejemplo 7.33. Consideramos el caso de $G = G_{3,5}^{\text{rec}}$. El pullback del mapeo de ensamble de conglomerado en la Prueba de la Proposición 7.32 $p^* : \mathbb{C}[M^\circ] \rightarrow \mathbb{C}[N]$ es definido por la

siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con respecto a las bases de M° y N inducidas por la semilla asociada a G y las coordenadas están en orden 35, 25, 15, 12, 23, 34. Nota que todas las entradas no azules son determinadas de manera única desde el carcaj Q_G .

A. Proyectos

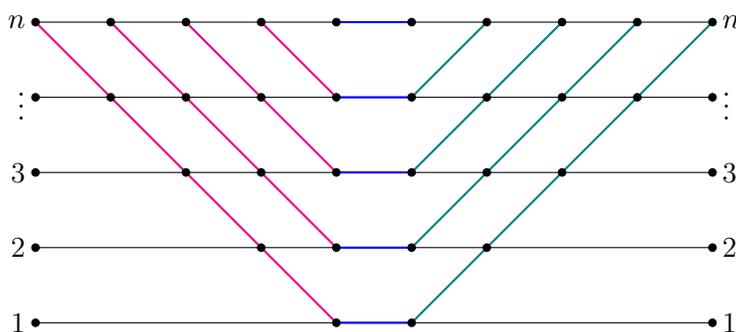
En este apéndice se encuentran posible proyectos que pueden servir como el tema para una tesis o tesina para estudiantes de la licenciatura.

A.1. Aplicaciones de positividad total

En el libro “Totally positive matrices“ [Pin10] el autor Allan Pinkus menciona en el prefacio varios aplicaciones de matrices totalmente positivos (páginas ix y x) y da referencias. Escoge una aplicación que te parece interesante y describe el papel que juegan las matrices totalmente positivas en esta aplicación. ¿También aparecen las álgebras de conglomerado?

A.2. Redes planas y positividad total

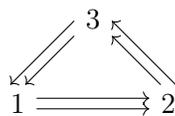
Las matrices totalmente positivas se pueden entender de manera visual desde gráficas planas y orientadas. En la teoría de esas gráficas el Lema de Lindström–Gessel–Vienneot es un resultado clave. En el Ejercicio 1.10 vimos la red Γ_0 . Se puede generalizar para cualquier n :



Existe una biyección entre matrices $n \times n$ totalmente positivas y matrices de caminos de Γ_0 para distintos elecciones de pesos. Fomin y Zelevinsky explican este resultado en su artículo [FZ00].

A.3. Los números de Markov

El álgebra de conglomerado asociado al carcaj de *Markov*:



tiene una conexión peculiar con los *triples de Markov* que son triples de números naturales (a, b, c) que satisfacen la relación de Markov: $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$.

A.4. Triangulaciones de superficies

El primer ejemplo clave de un álgebra de conglomerado es el que obtenemos de las triangulaciones del n -ágono. Viendo el n -ágono como un disco con n puntos marcados en su frontera

es el primer ejemplo de un álgebra de conglomerado asociado a una superficie. ¿Cómo se puede asociar un álgebra de conglomerado a una superficie (con puntos marcados en la frontera y pinchaduras)? Ver, por ejemplo [Sch16].

A.5. Coeficientes universales

Entre las álgebras de conglomerado de un tipo fijo con coeficientes hay una que tiene una propiedad universal: *el álgebra de conglomerado con coeficientes universales* [FZ07]. De esta todos los demás se pueden obtener *especializando* los coeficientes (es decir la estructura de conglomerado no cambia, solo cambian los coeficientes). Calcula el álgebra de conglomerado de tipo C . ¿Puedes describirla como un cociente de un anillo de polinomios?

*Si estas familiar con la teoría de las bases de Gröbner puedes consultar el artículo [BMN21] y ver si puedes generalizar los resultados a este caso.

A.6. Diagramas de Dynkin

Las álgebras de conglomerado de tipo finito son clasificadas de los diagramas de Dynkin. Las diagramas de Dynkin clasifican varios otros objetos matemáticos como las álgebras de Lie simples, singularidades de Klein, álgebras de caminos con un número finito de representaciones indestructibles, grupos de Coxeter y sistemas finitos de raíces entre más. La conexión entre las álgebras de conglomerado y los sistemas de raíces es particularmente interesante: hay una biyección entre las variables de conglomerado y las raíces casi-positivas. Ver, por ejemplo [Mar13], [FZ03a], [FZ03b].

*La conexión utiliza la teoría de representaciones de carcajes.

A.7. Gráficas plabic

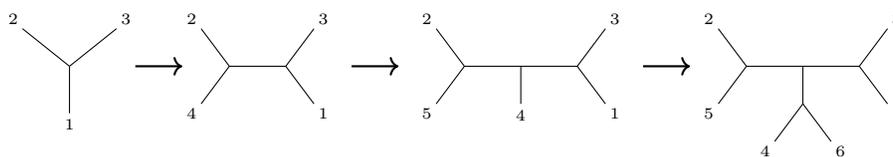
Las gráficas *plabic* (*planas bicolor*) juegan un papel importante en la combinatoria algebraica, en particular para las Grassmannianas y sus subvariedades. Las gráficas plabic que corresponden a la Grassmanniana $Gr(2, n)$ son en biyección con las triangulaciones del n -ágono y las semillas del álgebra de conglomerado de tipo A_{n-3} . Describe el algoritmo que determina esta biyección, [KW11].

A.8. Mutación de secuencias biracionales

Una *sibira* (secuencia iterada biracional) es una secuencia de $2(n - 2)$ transposiciones $(i, j) \in S_n$ de la forma

$$((i_n, n), (j_n, n), \dots, (i_k, k), (j_k, k), \dots, (i_3, 3), (j_3, 3))$$

donde $i_k \neq j_k$ y $i_k, j_k \in [k - 1]$ para todos $k \in [3, n]$. Hay un algoritmo combinatoria que asocia a una sibira un árbol trivalente con n hojas [Bos21, Algoritmo 1]. Por ejemplo, para $n = 6$ y la sibira $S = ((46), (56), (25), (35), (24), (34), (13), (23))$ tenemos



El algoritmo solo depende de i_n, i_{n-1}, \dots, i_4 . Entonces podemos trabajar con clases de equivalencia de sibiras. Observa que la hoja n siempre pertenece a una *cereza* del árbol. Nota que un árbol trivalente con n hojas es la grafica dual de una triangulación del n -ágono (donde los vértices del n -ágono no necesariamente son etiquetadas en orden). Ya vimos el flip de triangulaciones que corresponde a la mutación. ¿Es posible traducir la operación flip a sibiras? Es decir, ¿existe una mutación para sibiras que esta compatible con el flip? Para una traducción del flip a una operación en los árboles ver [BFF⁺18, §6].

A.9. Variedades de conglomerado

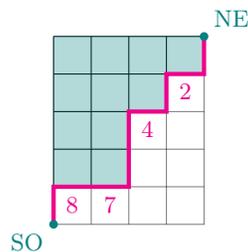
Las variedades de conglomerado son una interpretación geométrica de las álgebras de conglomerado que fueron introducidos de Fock y Goncharov. Cada semilla representa a un toro algebraico $(\mathbb{C}^*)^n$ cuyos coordenadas son las variables de conglomerado. La mutación de la semilla define una aplicación biracional del toro a su mismo. La (\mathcal{A} -)variedad de conglomerado asociada es el esquema obtenido de pegar varias copias del toro (una copia para cada semilla) a través de las aplicaciones biracionales. Revisa la definición de las variedades de conglomerado, por ejemplo en [GHK15]. Prueba que la definición de la mutación en la ecuación (2.6) de *loc.cit* es equivalente a la mutación que conocemos que es la ecuación (2.8) en *loc.cit*.

Un aspecto interesante de las variedades de conglomerado es su tropicalización (ver por ejemplo [GHKK18, §2]) que se obtiene como un functor de puntos. ¿Se puede interpretar la tropicalización de las variedades de conglomerado desde el punto de vista de los blueprints?

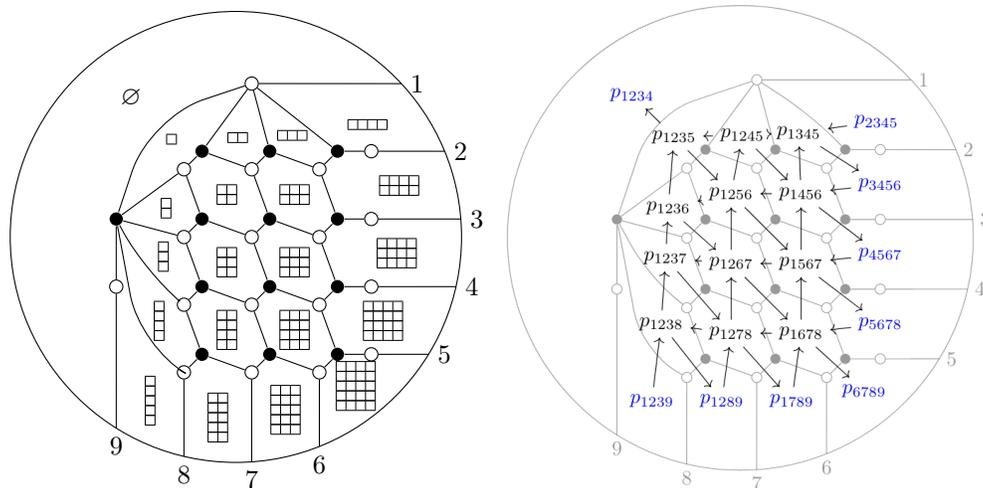
A.10. Diagramas de Young y g -vectores

En [FZ07] Fomin y Zelevinsky estudiaron el concepto de coeficientes en álgebras de conglomerado. Un clase particular son los coeficientes principales. En el caso de un carcaj se pueden realizar agregando un vértice congelado para cada vértice del carcaj y una fleche que conecta el vértice nuevo con el vértice viejo correspondiente. Las formulas de intercambio en esta situación son homogéneos con respecta a una \mathbb{Z}^{n+m} -graduación y el grado de una variable de conglomerado se llama su g -vector. Dichas g -vectores se pueden calcular en ejemplos con el `MutationApp (Cluster \rightarrow Activate \rightarrow g - vectors)`.

Para la Grassmanniana $\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ y la estructura de conglomerado en el anillo de Plücker tenemos la combinatoria de las *gráficas plábicas* a mano (estas gráficas codifican las semillas cuyos conglomerados consisten solo de variables de Plücker). Las variables de Plücker corresponden a diagramas de Young que se encajan en un rectángulo $(n - k) \times k$ (ver por ejemplo [RW17, §3]). Cada $J \in \binom{[n]}{k}$ determina de manera única un camino de la esquina noreste a la esquina suroeste en $(n - k) \times k$ donde las pasos al oeste corresponden a las $j \in J$. Por ejemplo, si $J = \{2, 4, 7, 8\}$ y $n = 9$ tenemos:



La gráfica plábica *rectangular* es tal que todas las variables de Plücker asociados tienen diagramas de Young rectangular. Por ejemplo para $\text{Gr}_4(\mathbb{C}^9)$ la gráfica plábica rectangular y su carcaj asociado son:



donde las variables de Plücker en azul son congeladas. El **MutationApp** conoce las carcajes que corresponden a las gráficas plábicas y las coordenadas asociadas (**Cluster** \rightarrow **Activate** \rightarrow $\text{Gr}(k, n)$: **triangles...**). Una observación curiosa es la siguiente: con respecto a la semilla dada por la gráfica plábica rectangular los g -vectores de las variables de Plücker se pueden calcular en términos de sus diagramas de Young asociados:

Corolario A.1. (Formula de ganchos para g -vectores) Sea $G = G_{k,n}^{\text{rec}}$ la gráfica plábica rectangular y $J \in \binom{[n]}{k}$. Sean $i_1 \times j_1, \dots, i_s \times j_s$ los rectangular que corresponden a las esquinas en el camino del noreste a suroeste del $k \times (n - k)$ -rectángulo determinado por J . Entonces,

$$\mathbf{g}_{s_G}(p_J) = \sum_{p=1}^s f_{i_p \times j_p} - f_{i_p \times j_{p+1}}, \quad (\text{A.1})$$

donde establecemos $f_{i_s \times j_{s+1}} = 0$.

Ilustramos el Corolario A.1 en el ejemplo donde $k = 4$ and $n = 9$. Sea $J = \{2, 4, 7, 8\}$, entonces $\mu_J = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$ y

$$\mathbf{g}_G(p_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}) = f_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}} - f_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}} + f_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}} - f_{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}} + f_{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}}.$$

El Corolario tiene una prueba en términos de módulos de un álgebra asociativo que categorifica el álgebra de conglomerado asociada a la Grassmanniana (va a aparecer en el próximo trabajo de Sarjick Bakshi y Bernhard Keller). El objetivo de este proyecto es dar una prueba alternativa que usa la combinatoria de las gráfica plábicas. ¿Es posible generalizar la formula de ganchos para otras gráfica plábicas?

Referencias

[BFF⁺18] L. Bossinger, X. Fang, G. Fourier, M. Hering, and M. Lanini. Toric degenerations of $\text{Gr}(2, n)$ and $\text{Gr}(3, 6)$ via plabic graphs. *Ann. Comb.*, 22(3):491–512, 2018.

- [BFG⁺18] Karin Baur, Eleonore Faber, Sira Gratz, Khrystyna Serhiyenko, and Gordana Todorov. Conway-Coxeter friezes and mutation: a survey. *Assoc. Women Math. Ser.*, 15:47–68, 2018.
- [BFMN20] Lara Bossinger, Bosco Frías-Medina, Timothy Magee, and Alfredo Nájera Chávez. Toric degenerations of cluster varieties and cluster duality. *Compos. Math.*, 156(10):2149–2206, 2020.
- [BFZ05] Arkady Berenstein, Sergey Fomin, and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras. III. Upper bounds and double Bruhat cells. *Duke Math. J.*, 126(1):1–52, 2005.
- [BMN21] L. Bossinger, F. Mohammadi, and A. Nájera-Chávez. Families of Gröbner degenerations, Grassmannians and universal cluster algebras. *SIGMA*, 17(059):46, 2021.
- [Bos21] Lara Bossinger. Birational sequences and the tropical Grassmannian. *J. Algebra*, 585:784–803, https://www.matem.unam.mx/~lara/birat_published.pdf, 2021.
- [CK06] Philippe Caldero and Bernhard Keller. From triangulated categories to cluster algebras. II. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 39(6):983–1009, 2006.
- [FWZ16] Sergey Fomin, Lauren Williams, and Andrei Zelevinsky. Introduction to cluster algebras. chapters 1–3. *arXiv preprint arXiv:1608.05735*, 2016.
- [FZ00] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Total positivity: tests and parametrizations. *Math. Intell.*, 22(1):23–33, 2000.
- [FZ02] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras. I. Foundations. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(2):497–529, 2002.
- [FZ03a] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras. II. Finite type classification. *Invent. Math.*, 154(1):63–121, 2003.
- [FZ03b] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Y -systems and generalized associahedra. *Ann. Math. (2)*, 158(3):977–1018, 2003.
- [FZ07] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras. IV. Coefficients. *Compos. Math.*, 143(1):112–164, 2007.
- [GHK15] Mark Gross, Paul Hacking, and Sean Keel. Birational geometry of cluster algebras. *Algebr. Geom.*, 2(2):137–175, <https://arxiv.org/pdf/1309.2573.pdf>, 2015.
- [GHKK18] Mark Gross, Paul Hacking, Sean Keel, and Maxim Kontsevich. Canonical bases for cluster algebras. *J. Amer. Math. Soc.*, 31(2):497–608, 2018.
- [HPS18] Christophe Hohlweg, Vincent Pilaud, and Salvatore Stella. Polytopal realizations of finite type \mathfrak{g} -vector fans. *Adv. Math.*, 328:713–749, 2018.
- [Hum80] James E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory. 3rd printing, rev*, volume 9. Springer, New York, NY, 1980.
- [Ip19] Ivan Ip. Introduction to cluster algebras. *Lecture notes*, <https://www.math.ust.hk/~ivanip/teaching/cluster.html>, 2019.
- [KW11] Yuji Kodama and Lauren K. Williams. KP solitons, total positivity, and cluster algebras. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 108(22):8984–8989, 2011.
- [Lus06] George Lusztig. A survey of total positivity. *arXiv preprint arXiv:0705.3842 [math.RT]*, <https://arxiv.org/abs/0705.3842>, 2006.
- [Mar13] Robert J. Marsh. *Lecture notes on cluster algebras*. Zürich: European Mathematical Society (EMS), 2013.
- [MS11] Gregg Musiker and Christian Stump. A compendium on the cluster algebra and quiver package in Sage. *Sémin. Lothar. Comb.*, 65:b65d, 67, 2011.
- [MS16] R. J. Marsh and J. S. Scott. Twists of Plücker coordinates as dimer partition functions. *Comm. Math. Phys.*, 341(3):821–884, 2016.
- [MS17] Greg Muller and David E. Speyer. The twist for positroid varieties. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 115(5):1014–1071, 2017.
- [NZ12] Tomoki Nakanishi and Andrei Zelevinsky. On tropical dualities in cluster algebras. *Contemp. Math.*, 565:217–226, 2012.

- [Pin10] Allan Pinkus. *Totally positive matrices*, volume 181. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [Pos06] Alexander Postnikov. Total positivity, Grassmannians, and networks. *arXiv preprint arXiv:math/0609764*, 2006.
- [Rea14] Nathan Reading. Universal geometric cluster algebras. *Math. Z.*, 277(1-2):499–547, 2014.
- [RS09] Nathan Reading and David E. Speyer. Cambrian fans. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 11(2):407–447, 2009.
- [RW17] Konstanze Rietsch and Lauren Williams. Newton-Okounkov bodies, cluster duality, and mirror symmetry for Grassmannians. *arXiv preprint arXiv:1712.00447*, 2017.
- [Sch16] Ralf Schiffler. Cluster algebras from surfaces. *Lecture notes for the CIMPA School*, <https://schiffler.math.uconn.edu/wp-content/uploads/sites/914/2019/03/LNCIMPA.pdf>, 2016.
- [Sco06] Joshua S. Scott. Grassmannians and cluster algebras. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 92(2):345–380, 2006.
- [Tal08] Kelli Talaska. A formula for Plücker coordinates associated with a planar network. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, pages Art. ID rnn 081, 19, 2008.
- [YZ08] Shih-Wei Yang and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras of finite type via Coxeter elements and principal minors. *Transform. Groups*, 13(3-4):855–895, 2008.