Variedades de conglomerado

Sergio Gerardo Gómez Galicia

Curso Algebras de conglomerado

November 30, 2021

Secciones

Notación

Recordemos los elementos necesarios para definir las variedades de conglomerado ($\mathcal{A}$ y $\mathcal{X}$).

Datos fijos Γ:

- Una latiz con una forma casi-simétrica

$$\{\cdot,\cdot\} : N \times N \to \mathbb{Q};$$

- Una sublatiz $N_{mut} \subset N$ saturada llamada sublatiz mutable;
- Un conjunto de índices I con cardinalidad igual al rango de N, digamos $|I| = n + m$, y una sublatiz $I_{mut} \subset I$ con cardinalidad igual al rango de N_{mut}, digamos $|N_{mut}| = n$;
- Elementos $d_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ para todo $i \in I$, con $gcd(d_i)_{i\in I} = 1$;
- Una sublatiz $N^\circ \subset N$ de índice finito tal que

$$\{N_{mut}, N^\circ\} \subset \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad \{N, N_{mut} \cup N^\circ\} \subset \mathbb{Z};$$

Notación

- Lattices duales

$$M = Hom(N, \mathbb{Z}) \quad \text{y} \quad M^\circ = Hom(N^\circ, \mathbb{Z}).$$

Datos de una semilla: Una tupla $s = (e_i \mid i \in I)$ tal que $\{e_i \mid i \in I\}$ es una base de N; $\{e_i \mid i \in I_{mut}\}$ es una base de N_{mut} y $\{d_i e_i \mid i \in I\}$ es una base de N°.

Las respectivas bases para las latices duales son: $\{e_i^* \mid i \in I\}$ para M, y $\{f_i := d_i^{-1} e_i^* \mid i \in I\}$ para M°.

Se define la mutación de los datos de la semilla s en la dirección $k \in I_{mut}$ como los datos $\mu_k(s) = (e_i \mid i \in I)$, donde

$$e_i' = \begin{cases} e_i + [\epsilon_{ik}]_+ e_k & i \neq k \\ -e_k & i = k \end{cases}$$

Notación

Usando el emparejamiento $\langle \cdot, \cdot \rangle : N \times M^{\circ} \to \mathbb{Q}$ obtenemos una mutación de la base de M° dada por $\{f_i' := e_i' d_i \mid i \in I\}$ donde

$$f_i' = \begin{cases} -f_k + \sum_{j \in I, j \neq k} [-\epsilon_{kj}]_+ f_j & i = k \\ f_i & i \neq k \end{cases}$$

Además, definimos $v_k := \{e_k, \cdot\} \in M^{\circ}$.

Se puede ver que esta mutación corresponde a la mutación usual de una matriz casi-simétrica en las álgebras de conglomerado:

Definimos una forma bilineal en N dada por

$$[\cdot, \cdot]_s : N \times N \to \mathbb{Q} \qquad [e_i, e_j]_s = \epsilon_{i,j} := \{e_i, e_j\} d_j .$$

Obtenemos la matriz asociada

$$\epsilon_s := (\epsilon_{i,j})_{i \in I_{mut}, j \in I} \in \mathbb{Z}^{n \times (n+m)} .$$

La traspuesta ϵ_s^T nos da una matriz extendida casi-simetrizable.

Toros algebraicos asociados

Ahora pasemos a la parte geométrica.

Dados Γ y s la idea es que para cada mutación vamos a copias del toro $(\mathbb{C}^*)^{n+m}$ (en $\mathbb{C}$) cuyas funciones regulares dependen de las variables de conglomerado.

Tenemos la siguiente notación

$$\mathbb{C}[M_s^\circ] = \mathbb{C}[z^{\pm f_i} \mid i \in I] \quad \text{y} \quad \mathbb{C}[N] = \mathbb{C}[z^{\pm e_i} \mid i \in I].$$

Y escribimos $x_i = z^{f_i}$ y $y_i = z^{e_i}$ para todo $i \in I$. Obtenemos los toros algebraicos

$$T_{N^\circ,s} = Spec(\mathbb{C}[M_s^\circ]) = Spec(\mathbb{C}[x_i^\pm \mid i \in I]) \cong (\mathbb{C}^*)^{n+m}$$

$$T_{M,s} = Spec(\mathbb{C}[N_s]) = Spec(\mathbb{C}[y_i^\pm \mid i \in I]) \cong (\mathbb{C}^*)^{n+m}$$

Ejemplo

Entonces, al hacer una mutación de los datos de la semilla $s = (e_i \mid i \in I)$ en la dirección $k \in I_{mut}$, obtenemos toros $T_{N^\circ,\mu_k(s)}$ y $T_{M,\mu_k(s)}$, los cuales tienen funciones regulares dadas por sus caracteres

$$\{z^{\pm f_i'} \in \mathbb{C}[M^\circ_{\mu_k(s)}] \mid \mu_k(s) = (e_i' \mid i \in I)\},$$

$$\{z^{\pm e_i'} \in \mathbb{C}[N_{\mu_k(s)}] \mid \mu_k(s) = (f_i' \mid i \in I)\}$$

Note que los toros son afines irreducibles, y por esto se pueden definir mapeos birracionales entre ellos.

Ejemplo dado por el carcaj $1 \longrightarrow 2$

Los datos de Γ y s son:

$N = \mathbb{Z}^2$ con la forma $\{\cdot,\cdot\}$ definida por $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejemplo

En este caso $N = N_{mut}$ y $d_1 = d_2 = 1$, de donde $I = I_{mut} = \{1, 2\}$ y $N^\circ = N$.

Los datos de la semilla inicial son $s_0 = (e_1, e_2)$, de donde tenemos que una base para $M = M^\circ$ es (f_1, f_2), además notemos que

$$v_{1,s_0} = \{e_1, \cdot\} = (1, 0)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -f_2.$$

$$v_{2,s_0} = \{e_2, \cdot\} = (0, 1)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -f_1.$$

Usando las fórmulas anteriores para la mutación en $s_1 = \mu_1(s_0)$ tenemos $s_1 = (-e_1, e_1 + e_2)$ como base de N, y como base de M tenemos $(-f_1 + f_2, f_2)$.

Ejemplo

Para el caso de la $\mathcal{A}-$variedad definimos un mapeo birracional (que conserve la estructura de conglomerado):

$$\mu_{1,\mathcal{A}} : T_{N,s_0} \dashrightarrow T_{N,s_1}$$

$$(x_1, x_2) \longmapsto \left(\frac{1+x_2}{x_1}, x_2 \right)$$

El cual está definido en el abierto donde $x_2 \neq -1$ en T_{N,s_0}.

Notemos que tenemos un isomorfismo entre los campos de funciones racionales de los toros.

Ejemplo

En general definimos el mapeo birracional en términos de su pullback de funciones:

$$\mu_{k,\mathcal{A}}^{*} : \mathbb{C}(M_{\mu_k(s)}^{\circ}) \longrightarrow \mathbb{C}(M_s^{\circ}),$$

$$z^m \longmapsto z^m(1+z^{v_k})^{-\langle d_k e_k, m\rangle}$$

De donde obtenemos

$$\mu_{1,\mathcal{A}}^{*}(z^{f_2}) = z^{f_2}(1+z^{-f_1})^{-1\langle e_1, f_2\rangle} = z^{f_2}$$

$$\mu_{1,\mathcal{A}}^{*}(z^{-f_1+f_2}) = z^{-f_1+f_2}(1+z^{-f_2})^{-\langle e_1, -f_1+f_2\rangle} = z^{-f_1}(1+z^{f_2}).$$

Note que obtenemos la relación $x_2' \mapsto x_2$ y $x_1' \mapsto \frac{1+x_2}{x_1}$.

Variedades de conglomerado

Queremos pegar los toros obtenidos de cada mutación en cada dirección por medio de los mapeos birracionales.

$$\mu_{k,\mathcal{A}} : T_{N^\circ,s} \dashrightarrow T_{N^\circ,\mu_k(s)},$$

$$\mu_{k,\mathcal{X}} : T_{M,s} \dashrightarrow T_{M,\mu_k(s)}$$

definidos por sus pullbacks de funciones (a nivel de caracteres).

$$\mu^*_{k,\mathcal{A}} : \mathbb{C}(M^\circ_{\mu_k(s)}) \longrightarrow \mathbb{C}(M^\circ_s) \qquad \mu^*_{k,\mathcal{X}} : \mathbb{C}(N_{\mu_k(s)}) \longrightarrow \mathbb{C}(N_s)$$

$$z^m \longmapsto z^m(1+z^{v_k})^{-\langle d_k e_k, m\rangle} \qquad z^n \longmapsto z^n(1+z^{e_k})^{-[n,e_k]_s}$$

Con $n \in N$ y $m \in M^\circ$

Variedades de conglomerado

Consideremos un patrón de semillas en el árbol regular $\mathbb{T}_n$, en el cual consideramos como semilla inicial a $s = (e_i \mid i \in I)$.
Orientamos al árbol $\mathbb{T}_n$ de tal modo que el vértice 0 sea la raíz del árbol y que haya un único camino desde 0 a cualquier otro vértice.

Definimos mapeos birracionales $\mu_{s_0,s} : T_{N^\circ,s_0} \dashrightarrow T_{N^\circ,s_t}$ para todos los vértices $t \in \mathbb{T}_n$, los cuales estan dados por el único camino del vértice 0 a otro vértice t con secuencia
$0 \to t_1 \to t_2 \to \cdots \to t_l = t$:

$$\mu_{s_0,s} = \begin{cases} Id & \text{if } s = s_0 \\ \mu_{k_l,s_l} \circ \cdots \circ \mu_{k_0,s_0} & \text{if } s \neq s_0 \end{cases}$$

De forma análoga se hace para los toros $T_{M,s}$.

Variedades de conglomerado

Se define la $\mathcal{A}$-variedad y $\mathcal{X}$-variedad de conglomerado como

$$\mathcal{A}_s = \bigcup_{t \in \mathbb{T}_n} T_{N^\circ, s_t} \qquad \mathcal{X}_s = \bigcup_{t \in \mathbb{T}_n} T_{M, s_t}$$

Por [GHK, Proposition 2.4] sabemos que estas variedades existen (como esquemas).

$$\begin{tikzcd}
T_{N^\circ,s_2} & & T_{N^\circ,s_1} \\
& T_{N^\circ,s_0} \arrow[ul, dashed, "\mu_2"] \arrow[ur, dashed, "\mu_1"'] \arrow[dl, dashed, "\mu_3"] \arrow[dr, dashed, "\mu_4"'] & \\
T_{N^\circ,s_3} & & T_{N^\circ,s_4}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{C}(M^\circ_{s_2}) \arrow[dr, "\mu_2^*"] & & \mathbb{C}(M^\circ_{s_1}) \arrow[dl, "\mu_1^*"'] \\
& \mathbb{C}(M^\circ_{s_0}) & \\
\mathbb{C}(M^\circ_{s_3}) \arrow[ur, "\mu_3^*"] & & \mathbb{C}(M^\circ_{s_4}) \arrow[ul, "\mu_4^*"']
\end{tikzcd}$$

Variedades con coeficientes

Fijemos $\mathbb{P} = Trop(t_1, \cdots, t_r)$.
Datos iniciales Γ y $s_0 = (e_i \mid I)$ los datos iniciales.

Un $Y-$patrón $v \mapsto (\mathbf{p}_v, B_v)$ de rango $|I_{mut}|$ se dice compatible con Γ y s_0 si la matriz inicial es de la forma $B_{t_0} = (b_{i,j}) = \epsilon_s^T$.

Sea R= igual a $\mathbb{C}[t_1, \cdots, t_r]$ ó $\mathbb{C}[t_1^{\pm}, \cdots, t_r^{\pm}]$, Entonces $Spec(R) = \mathbb{A}^r_{\mathbb{C}}$ ó $Spec(R) = (\mathbb{C}^*)^r$.

Sea L una latiz. Denotamos el producto fibrado

$$T_L(R) = T_L \times_{\mathbb{C}} Spec(R)$$

Entonces $\mathcal{O}_{T_L(R)}(T_L(R)) \cong R[L^*] = \mathbb{C}[L^*] \otimes_{\mathbb{C}} R$ donde $L^* = Hom(L, \mathbb{Z})$.

Variedades con coeficientes

$\mathcal{A}$−mutación y $\mathcal{X}$−mutación de conglomerado con coeficientes

Sea $t = \prod_{i=1}^{r} t_i^{a_i} \in \mathbb{P}$. Definimos los mapeos birracionales dados por pull back

$$\mu_{k;s;t} : T_{N^\circ}(R) \dashrightarrow T_{N^\circ}(R)$$

$$\mu_{k;s;t}^* : (z^m) \longmapsto z^m(t^- + t^+ z^{v_k})^{-\langle d_k e_k, m\rangle}$$

donde $m \in M^\circ$, $t^- = \frac{1}{t \oplus 1}$ y $t^+ = \frac{t}{t \oplus 1}$.

Análogamente

$$\mu_{k;s;t} : T_M(R) \dashrightarrow T_M(R)$$

$$\mu_{k;s;t}^* : (z^n) \longmapsto z^n(t^- + t^+ z^{e_k})^{-[n, e_k]_s}$$

para $n \in N$.

Variedades con coeficientes

Sean Γ y $s = (e_i \mid i \in I)$, un $Y-$patrón compatible $v \mapsto (\mathbf{p}_v, B_v)$ con s en $\mathbb{T}^n$ (orientado), obtenemos mapeos birracionales $\mu_{s_0,s} : T_{N^\circ,s_0}(R) \dashrightarrow T_{N^\circ,s_t}(R)$.

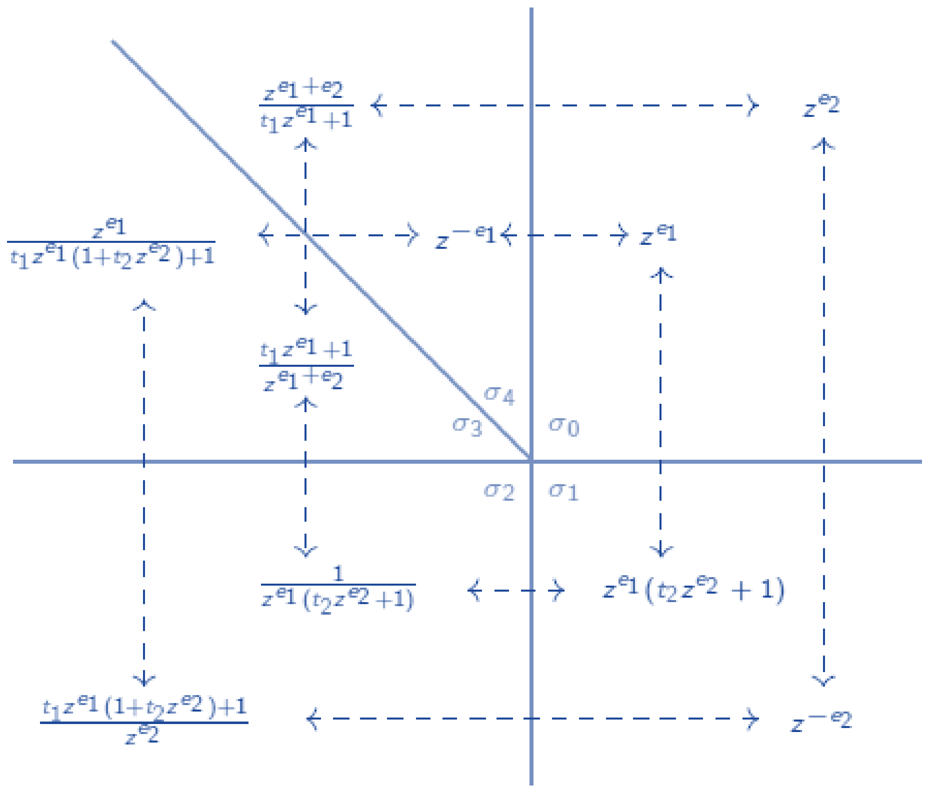
$$\mu_{s_0,s} = \begin{cases} Id & \text{if } s = s_0 \\ \mu_{k_l,s_l,t_{k_l,s_l}} \circ \cdots \circ \mu_{k_0,s_0,p_{k_l,s_l}} & \text{if } s \neq s_0 \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_{\Gamma,s_0,\mathbf{p}_{v_0}} = \bigcup_{s \in \mathbb{T}^n} T_{N^\circ,s}(R) \quad \mathcal{X}_{\Gamma,s_0,\mathbf{p}_{v_0}} = \bigcup_{s \in \mathbb{T}^n} T_{M,s}(R)$$

Nuevamente existen por [GHK, Proposition 2.4].

Variedades con coeficientes

Ejemplo para el caso A_2



Variedades con coeficientes

Sean los datos iniciales Γ, s_0 y un $Y-$patrón compatible $v \mapsto (\mathbf{p}_v, B_v)$.
Tenemos morfismos planos dados por la segunda proyección

$$T_L(R) = T_L \times Spec(R) \longrightarrow Spec(R)$$

pues el el homomorfismo de anillos $R \to R[L^*]$ es plano.
El concepto de planaridad nos ayuda a tener mapeos que conserven estructura.

Entonces tenemos una familia de morfismos planos, más aún obtenemos un morfismo plano de esquemas para cada variedad

$$\pi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}_{\Gamma, s_0, \mathbf{p}_{v_0}} \longrightarrow Spec(R) \quad \text{y} \quad \pi_{\mathcal{X}} : \mathcal{X}_{\Gamma, s_0, \mathbf{p}_{v_0}} \longrightarrow Spec(R)$$

Podemos pensar en deformaciones?

$Y-$patrones con coeficientes

$Y-$semillas etiquetadas

Una $Y-$semilla etiquetada con coeficientes en un semicampo $\mathbb{P}$ es un triple $(\mathbf{y}, \mathbf{p}, B)$, donde

- $(\mathbf{p}, B)$ es una $Y-$semilla en $\mathbb{P}$;
- $(\mathbf{y}, B)$ es una $Y-$semilla en $\mathbb{QP}_{sf}(u_1, \cdots, u_r)$.

Sean $\mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_n), \mathbf{p} = (p_1, \cdots, p_n)$ y $B = (b)_{ij}$. La mutación en la dirección $k \in [1, n]$ de $(\mathbf{y}, \mathbf{p}, B)$ es la $Y-$semilla con coeficientes $(\mathbf{y}', \mathbf{p}', B')$ donde

- $(\mathbf{p}', B')$ es la mutación de la $Y-$semilla $(\mathbf{p}, B)$.
- $\mathbf{y}' = (y_1', \cdots, y_n')$, donde

$$y_j' = \begin{cases} y_j^{-1} & \text{if } j = k \\ y_j \left(p_k^{[[b_{kj}]]} + p_k^{[[-b_{kj}]]} y_k^{-sgn(b_{kj})} \right)^{-b_{kj}} & \text{if } j \neq k \end{cases}$$

$Y-$patrones con coeficientes

[BFMN, Lemma 3.24]

La $\mathcal{A}-$mutación con coeficientes corresponde a la mutación con coeficientes geométricos. La $\mathcal{X}-$mutación corresponde a la $Y-$mutación con coeficientes geométricos.

Por ejemplo para el caso de la $\mathcal{X}-$variedad:

$$\mu_{k,p}^{*}(z^{e_k'}) = z^{e_k'}(t^{-}+t^{+}z^{e_k})^{-\epsilon_{ik}} = \begin{cases} z^{e_k}(t^{-}z^{-e_k}+t^{+})^{-\epsilon_{ik}} & \text{if } \epsilon_{ik}>0, \\ z^{e_k}(t^{-}+t^{+}z^{e_k})^{-\epsilon_{ik}} & \text{if } \epsilon_{ik}\leq 0 \end{cases}$$

Relación con variedades tóricas

Vamos a restringirnos al caso de la $\mathcal{X}-$variedad con coeficientes.

Recordatorio de variedades tóricas

Sean $N \cong \mathbb{Z}^n$ y $M = Hom_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$. Consideremos $A = \{v_1, \ldots, v_r\} \subset N$ un conjunto finito.

$$\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i, \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}.$$

Cono dual de σ como:

$$\check{\sigma} = \{u \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle u, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \sigma\}.$$

Trabajaremos con conos σ fuertemente convexos (i.e. $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$) y racionales (con generadores en N).

Relación con variedades tóricas

- (Lema de Gordan) $S_\sigma = \check{\sigma} \cap M$ es un monoide fg.
- Obtenemos una $\mathbb{C}-$algebra f.g $\mathbb{C}[S_\sigma]$.
- Variedad tórica afín asociada al cono: $X_\sigma = Spec(R_\sigma)$.

En resumen, para la construcción afín:

$$\sigma \quad \mapsto \quad \check{\sigma} \quad \mapsto \quad S_\sigma \quad \mapsto \quad R_\sigma \quad \mapsto \quad X_\sigma .$$

Construcción de una VT (no necesariamente afín):

Sea Δ un abanico, sea $\sigma \in \Delta$ y sea τ una cara de σ (i.e $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp$ con $\lambda \in \check{\sigma} \cap M$), entonces:

Relación con variedades tóricas

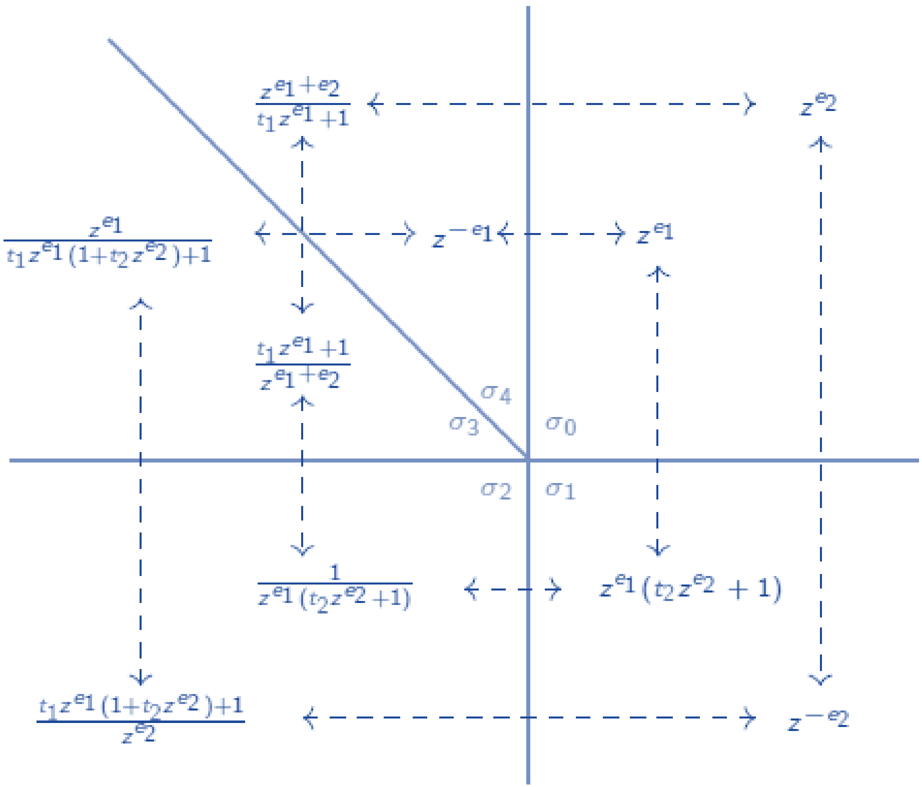
1. Obtenemos una inclusión $\mathbb{C}[S_\sigma] \subset \mathbb{C}[S_\tau]$ como subconjuntos de N.
2. Obtenemos una localización de σ en τ, es decir,
$$\mathbb{C}[S_\tau] = \mathbb{C}[S_\sigma]_{\chi^\lambda} \quad \text{, donde} \quad \chi^\lambda \in \mathbb{C}[S_\sigma].$$
3. Obtenemos una inclusión (abierta) $X_\tau \to X_\sigma$ de variedades tóricas afínes.

Entonces, si τ es cara de dos conos $\sigma, \sigma' \in \Delta$, podemos pegar las partes afines X_σ y $X_{\sigma'}$, a lo largo de X_τ. Al hacer este pegado en todas las partes afines obtenemos la variedad tórica

$$X_\Delta = \bigcup_{\sigma \in \Delta} X_\sigma.$$

Relación con variedades tóricas

Regresemos al caso de A_2. Pregunta: ¿Qué pasa si $t_1, t_2 = 0$?



Relación con variedades tóricas

Del abanico anterior, veamos un ejemplo del pegado de X_{σ_0} y X_{σ_1}:

Notemos que S_{σ_0} está generado por e_1^*, e_2^* y S_{σ_1} está generado por $e_1^*, -e_2^*$. Luego, tenemos

$$X_{\sigma_0} = Spec(\mathbb{C}[x_1, x_2]) \quad \text{y} \quad X_{\sigma_1} = Spec(\mathbb{C}[x_1, x_2^{-1}])$$

Notemos que $\tau = cone(e_1^*)$ es cara común de σ_0 y σ_1. Entonces pegamos X_{σ_0} y X_{σ_1} a lo largo de X_τ.

Esto nos da $\mathbb{C} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

Relación con variedades tóricas

Podemos especificar los coeficientes al tomar la fibra π^{-1}:

- $\mathcal{A}-$variedad de conglomerado con coeficientes especificos $\mathcal{A}_{\Gamma,s_0,\mathbf{p}_{v_0},\lambda}$ es la fibra $\pi_{\mathcal{A}}^{-1}(\lambda)$.
- $\mathcal{X}-$variedad de conglomerado con coeficientes especificos $\mathcal{X}_{\Gamma,s_0,\mathbf{p}_{v_0},\lambda}$ es la fibra $\pi_{\mathcal{X}}^{-1}(\lambda)$.

Si sustituimos a $T_{M,s}$ por $\mathbb{A}_{M,s}$, es decir $Spec(\mathbb{C}[z^{e_i} \mid i \in])$, y nos enfocamos en $R = \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ (compactificación parcial), entonces podemos hablar de deformaciones tóricas.

Relación con variedades tóricas

Consideremos el pegado con coeficientes.

Entonces podemos relacionar a las variedades de conglomerado con las variedades tóricas.

Teorema [BFMN, Theorem 5.8]

Obtenemos un morfismo plano

$$\pi : \bigcup_{s \in \mathbb{T}^n} \mathbb{A}_{M,s}(R) \longrightarrow A^n_{\mathbb{C}}.$$

La fibra $\pi^{-1}(0)$ es la variedad tórica asociada al $\mathbf{g}-$abanico. La fibra $\pi^{-1}(\mathbf{1})$ es la completación especial.