Ejercicios 2 del curso "Álgebras de Conglomerado"

Lara Bossinger

semestre 2022-1

3. El fenómeno de Laurent

3.3. Comentarios

Ejercicio 3.8. Muestra que existe una biyección entre las semillas en el sentido de la Definición 2.27 y los datos semillas con los datos fijos. Es decir, dado un semilla $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{B})$ muestra que determina de manera única los datos fijos y los datos de una semilla.

Ejercicio 3.9. Sean los datos fijos Γ arbitrarios (no necesariamente con $d_i = 1$) y sean $s = (e_i : i \in I)$ los datos de una semilla:

1. muestra que $\mu_k(s) = (e'_i : i \in I)$ son datos de una semilla;

2. verifica que la matriz $\epsilon_{\mu_k(s)}$ con entradas $\epsilon'_{ij} := \{e'_i, e'_j\}d_j$ es igual a la matriz $\mu_k(\epsilon_s) = (\epsilon''_{ij})$ que se obtiene de ϵ_s bajo la mutación de la matriz en la dirección k (como la vimos en (2.6)), es decir:

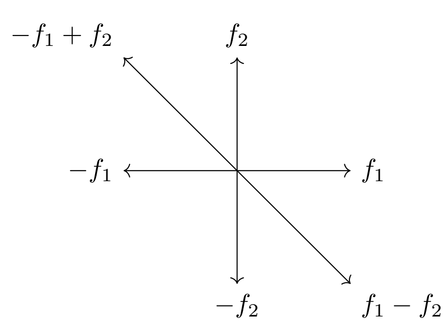
$$\epsilon''_{ij} := \begin{cases} -\epsilon_{ij} & k \in \{i,j\} \\ \epsilon_{ij} + \operatorname{sgn}(\epsilon_{ik})[\epsilon_{ik}\epsilon_{kj}]_+ & \text{lo demás} \end{cases} \tag{1}$$

Ejercicio 3.10. Prueba el Lema 3.12 en el caso general donde no necesariamente tenemos $d_i = 1$ para todas $i \in I$.

Ejercicio 3.11. Los elementos $v_k \in M$ satisfacen $v_k = \sum_{i\in I} \epsilon_{ki} d_i f_i$.

Ejercicio 3.12. Prueba la Proposición 3.14 en el caso general donde no necesariamente tenemos $d_i = 1$ para todas las $i \in I$.

Ejercicio 3.13. Recuerda el Ejemplo 3.13 y la Tabla 1. Dibujando los $f_{i,s}$ en el plano nos damos cuenta que son un abanico completo cuyos conos máximales correspondes a las semillas $s_0, \ldots, s_5$:



Repite el calculo de los $f_{i,s}$ en los siguientes casos y verifica si sale también un abanico completo o no:

1. Fijamos $N = \mathbb{Z}^2$ con forma $\{\cdot, \cdot\}$ definida de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ para la base estándar $\{e_1, e_2\}$. Además fijamos $I = I_{\text{mut}}$ con $(d_1, d_2) = (2, 1)$ y para la semilla inicial fijamos $s_0 = (e_1, e_2)$ (como en los Ejemplo 3.8 y 3.11).

2. Fijamos $N = \mathbb{Z}^3$ con forma $\{\cdot, \cdot\}$ definida de $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ para la base estándar $\{e_1, e_2, e_3\}$. Además fijamos $I = I_{\text{mut}}$ con $d_i = 1$ y para la semilla inicial fijamos $s_0 = (e_1, e_2, e_3)$.

4. La clasificación de tipo finito

4.1. Subálgebras de conglomerado

Ejercicio 4.1. Congelar variables en una semilla conmuta con la mutación de semillas.

Ejercicio 4.2. Restringir una semilla conmuta con la mutación de semillas.

4.2. Plegando Carcajes

Ejercicio 4.3. Prueba el Lema 4.10 usando la formula de la mutación de matrices (2.4) y el Lema 4.9.

Ejercicio 4.4. Consideramos el carcaj Q con 5 vértices mutables.

$$\begin{tikzcd} x_2 \arrow[dr] & & x_3 \arrow[dl] \\ & x_1 & \\ x_3' \arrow[ur] & & x_2' \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

con la acción del grupo $G = \mathbb{Z}_2$ que actua con una rotación de 180° en Q. Las G-orbitas son $\{x_1\}, \{x_2, x_2'\}$ y $\{x_3, x_3'\}$.

1. Verifique que Q es G-admisible y calcula la matriz plegada $\tilde{B}^G$.

2. Prueba que Q es globalmente plegable con respecto a la acción de G.

Ejercicio 4.5. Verifica que el carcaj Q en el Ejemplo 4.16 es globalmente plegable.

4.3. Matrices de Cartan y Diagramas de Dynkin

Ejercicio 4.6. En este ejercicio vamos a probar que cada patrón de semillas de tipo finito es 2-finito.

1. Considera el grupo $W \subset \mathrm{GL}_2$ generado de $s_1 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ y $s_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b & -1 \end{smallmatrix}\right)$ y muestra que es un grupo finito si y solo si $ab \leq 3$.

Sea $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{smallmatrix}\right)$ con $ab \geq 4$ y sean

$$\mathbf{x}(0) = (x_1, x_2), \quad \mathbf{x}(1) = (x_3, x_2), \quad \mathbf{x}(2) = (x_3, x_4), \ldots \tag{2}$$

los conglomerados en el campo $\mathcal{F}$ asociados al patrón de semillas definido por B. Consideramos el semicampo $U = \{u^r : r \in \mathbb{R}\}$ donde u es una variable formal y U tiene las operaciones

$$u^r \oplus u^s = u^{\text{máx}\{r,s\}}, \quad \text{y} \quad u^r \cdot u^s = u^{r+s}.$$

2. Construye un homomorfismo de semicampos $\psi : \mathcal{F} \to U$ tal que el conjunto $\{\psi(x_t) : t \in \mathbb{Z}\} \subset U$ es infinito. *Tipp:* en el caso $ab = 4$ toma $\psi(x_1) = u$ y $\psi(x_2) = u^a$, para $ab > 4$ toma $\psi(x_1) = u^b$ y $\psi(x_2) = u^{\lambda+1}$ para un eigenvalor λ de la matriz $s_1 s_2$ en 1.

3. Muestra que un patrón de semillas de tipo finito es también 2-finito.

4.4. Tipo A

Ejercicio 4.7. Para probar el Corolario 4.32, pruebe las siguientes afirmaciones:

1. En un $n+3$-ágono hay $\frac{n(n+3)}{2}$ arcos distintos.

2. Sean d y d' dos arcos distintos del $n+3$-ágono. Verifica que las variables de conglomerado asociados son distintos.

3. El número de triangulaciones del $n+3$-ágono es el número de Catalán $C_{n+1} = \frac{1}{n+2}\binom{2n+2}{n+1}$.