Teorema R es Noetheriano sii todos sus ideales son finitamente generados.

Argumento: Asumamos R Noetheriano &

$$I \underset{\text{ideal}}{\subseteq} R.$$

$$E_I = \left\{ \begin{array}{c} \text{ideales finitamente} \\ \text{generados contenidos} \\ \text{en } I \end{array} \right\} \neq \emptyset$$

¿ordenado?

$J \in E_I$ elemento maximal

¿Existe?

$J \subseteq I$ por construcción, mostremos la contención inversa.

Si $a \in I$, entonces $J + R \cdot a \in E_I$

$\underset{\text{maximalidad}}{\Longrightarrow}$ $R \cdot a + J = J$

$\Rightarrow$ $a \in J$ y por tanto $J = I$.

Asumamos ahora todos los ideales son finitamente generados. Si

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_k \subseteq \cdots$$ sucesión creciente.

$\Rightarrow$ $\bigcup_{k \geq 1} I_k = J$ es un ideal.

Considerar $\{r_1, \ldots, r_e\}$ generadores de J. $\exists\, m$ tal que $r_1, \ldots, r_e \in I_m$ $\Rightarrow$ $J = I_m$ y por tanto $I_n = I_m$ si $n \geq m$ $\blacksquare$

—————— // ——————

Teorema (Hilbert) Si A es Noetheriano entonces $A[x]$ es Noetheriano.

<u>Argumento</u>: $J \subseteq A[x]$ ideal, $\boxed{\text{Veamos que es finitam generado}}$

Estrategia $\longrightarrow$

$$I_n = \left\{ a \in A \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \text{ elemento en } J, \text{ digamos } P, \\ \text{con } \operatorname{coef}(P) = a \\ \& \ \deg(P) = n. \end{array} \right\}$$

Notar: $\underbrace{I_n \subseteq I_{n+1}}_{\text{sucesión creciente de ideales en } A.}$ pues $f \in J \Rightarrow xf \in J$

Entonces $I_m = I_n$ si $n \geq m$ para algún m.

Para cada $i \leq m$, considerar los generadores de I_i: $(a_{i1}, \ldots, a_{in_i})$.

· Consideremos

$$\left\{ (P_{i1}, \ldots, P_{im_i}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \deg(P_{ij}) = i \\ \operatorname{Coef}(P_{ij}) = a_{ij} \end{array} \right\}$$

Para todo $i \leq m$.

<u>Afirmación</u>: El conjunto de arriba (para todo $i \leq m$) genera a J, & es finito.

Inducción: (en $\deg(P)$ para algún $P \in J$)

si $\deg(P) = 0$ para algún $P \in J$

entonces

$$P = a_{01} A + \cdots + a_{0m_0} A \in I_0$$

el cual es fin generado pues A es Noetheriano.

si $\deg(P) = t > 0$ & $a = \operatorname{Coef}(P) \in A$

$t \leq m$, $\exists$ la descomposición ($a \in I_t$ el cual es fin gen)

$$a = b_1 a_{t1} + \cdots + b_{m_t} a_{tm_t}$$

Observemos

$$P - (b_1 P_{t1} + \cdots + b_{n_t} P_{tn_t}) \quad \in A[x]$$

$$= P - (b_1 a_{t1} + \cdots + b_{n_t} a_{tn_t}) x^t + \begin{pmatrix}\text{términos}\\ \text{de grado} < t\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\text{términos de}\\ \text{grado} < t\end{pmatrix}$$

← este polinomio en J se puede expresar como combinación finita de $\{P_{i,j}\}$ por inducción.

$\Rightarrow$ P es combinación lineal finita de los $\{P_{i,j}\}$.

Si $t \geq m$, $\operatorname{coef}(P) = a \in I_t$ y existe

$$a = b_1 a_{m1} + \cdots + b_{n_m} a_{mn_m}.$$

Repetimos el argumento anterior. $\blacksquare$

(6

CORO: A noetheriano, entonces
$A[x_1, \dots, x_n]$ es noetheriano.

CORO: $I \subseteq k[x_0, \dots, x_n]$ ideal.

$$V(I) := \{ (a_0, \dots, a_n) \in k^n \mid f(a_0, \dots, a_n) = 0 \ \forall f \in I \} \subseteq k^n$$

entonces $V(I) = V(g_1) \cap \cdots \cap V(g_r)$ donde
$g_1, \dots, g_r$ son generadores de I. $\boxed{\leq}$

Moraleja:
Todos los conjuntos algebraicos en k^n no vacíos son los ceros de un número finito de ecuaciones.

Notación: Si $Z \subseteq k^n$ conjunto no vacío.

$$I(Z) = \{ f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid f(z) = 0 \text{ con } z \in Z \} \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$$

ideal

Este ideal podría ser $(0) \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ (si z no es algebraico) (7

Def.- El conjunto de ceros en k^n de un número finito de polinomios en $k[x_1, \dots, x_n]$ se dice algebraico.

i.e. $\{P_1, \dots, P_r\} \in k[x_1, \dots, x_n]$

$$\underbrace{Z(P_1, \dots, P_r)}_{\text{Conjunto algebraico}} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in k^n \;\middle|\; P_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \ \forall\, i = 1, \dots, r \right\}.$$

Nota(1): si $Z \neq \emptyset \Rightarrow I(Z) \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ ideal $\neq$ total

$\boxed{k = \overline{k}}$

Teorema: si $I \subsetneq k[x_1, \dots, x_n] \Longrightarrow Z(I) \neq \emptyset$.

Argumento: I ideal propio. $\exists\, m \supseteq I$ maximal.

1) $Z(\mathfrak{m}) \subset Z(I)$ Veamos que $Z(\mathfrak{m}) \neq \emptyset$.

$$
\begin{tikzcd}
k \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend left, "\varphi"] & k[x_1, \dots, x_n] \arrow[r, two heads, "\pi"] & \underbrace{k[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{m}}_{\text{campo}} =: K
\end{tikzcd}
$$

Tenemos una extensión de campos

$$
\begin{array}{c} K \\ | \\ k \end{array} \qquad \text{¿algebraica?} \qquad (\text{i.e. integral})
$$

Algebraica $\underset{k=\bar{k}}{\Longrightarrow}$ $k = K$.

$b_i := x_i \pmod{\mathfrak{m}} \in K$

$\alpha_i := \varphi^{-1}(b_i) \in k$

$\Rightarrow$ $x_i - \alpha_i \in \ker(\pi)$ para cada $i = 1, \dots, n$.

Por tanto

¡ideal maximal!

$$
\langle x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n \rangle \leq \ker(\pi) = \mathfrak{m}
$$

$$\Rightarrow \quad \langle x_1-\alpha_1, \ldots, x_n-\alpha_n\rangle = \mathfrak{m}$$

$$y \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in Z(\mathfrak{m}) \subseteq k^n$$

$$\neq \emptyset$$

Falta mostrar que $K = k[\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n]$ | k es algebraica.
i.e. ~~cada~~ x_i es alg$/k$

$\boxed{\text{Tarea: } A \subseteq B \text{ extensión entera de anillos. } A \text{ es campo ssi } B \text{ es campo.}}$