UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Álgebra conmutativa: tarea 11

Fecha de entrega: 26 de abril, 2023

ARGUMENTAR A FAVOR O EN CONTRA

1. Considerar A un anillo Noetheriano y M un A-módulo libre de rango finito $k > 0$. Si $N \subset M$ es un submódulo, entonces N es libre.

2. Considerar M un $\mathbb{Z}$-módulo libre de rango finito $k > 0$. Si $N \subset M$ es un submódulo, entonces N es libre.

3. Si ζ_p es una raíz p-ésima primitiva de la unidad con p primo y $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ el campo ciclotómico, entonces todos los ideales del anillo de enteros $\mathcal{O}_K \subset K$ son generados por a lo más $p-1$ elementos.

EJERCICIO 2

Considerar $S = \{(x, y, z, w) \mid x^3 + y^3 + z^3 + z^3 = 0\} \subset k^4$ una cúbica y un 2-plano contenido en ella

$$L = \{(x, y, z, w) \mid x + z = y + w = 0\} \subset S.$$

Mostrar que la inclusión $L \to S$ induce un homomorfismo de anillos

$$k[x, y, z, w]/(x^3 + y^3 + z^3 + z^3) \longrightarrow k[x, y, z, w]/(x + z, y + w).$$

¿Cuál es el kernel? ¿Es este homomorfismo suprayectivo?

EJERCICIO 3

Considerar el anillo $A = k[x, y, z]$ y el siguiente morfismo de A-módulos $u : A \to A^3$

$$f \mapsto (xf, yf, (x-y)f).$$

Calcular $(0 : T)$ donde $T := coker(u)$. Calcular los ideales asociados $Ass(T)$.

EJERCICIO 4

Denotemos como C a la imagen del morfismo $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^3$ definido como $t \mapsto (t, t^2, t^4)$. Consideremos el siguiente lugar geométrico de $\mathbb{C}^3$:

$$\mathrm{Tan}(C) := \bigcup_{p \in C} T_p C,$$

donde $T_p C$ denota la recta tangente a C en p. Mostrar que $\mathrm{Tan}(C)$ es un conjunto algebraico y calcular la ecuación que satisface en $\mathbb{C}^3$. Verificar, por su puesto, que $C \subset \mathrm{Tan}(C)$.

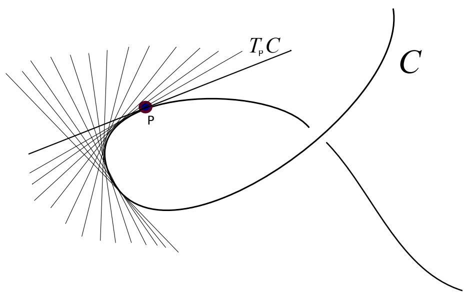

Figure 0.1: Lugar geométrico $\mathrm{Tan}(C) \subset \mathbb{C}^3$.