UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Álgebra conmutativa: tarea 12

Fecha de entrega: 15 de mayo, 2023

EJERCICIO 1

1. Si $f : V \to W$ es un morfismo dominante de variedades afines irreducibles ¿es $k[V]$ un $k[W]$-módulo finitamente generado? Demostrar o exhibir un contra ejemplo.
2. Si $f : V \to W$ es un morfismo finito entre variedades afines irreducibles ¿es $k[V]$ un $k[W]$-módulo finitamente generado? Demostrar o exhibir un contra ejemplo.

EJERCICIO 2

Considerar un morfismo entre variedades afines

$$f : V \to W.$$

Si f^* es suprayectivo, mostrar que f es inyectivo y además su imagen $Im(f)$ es un conjunto cerrado. ¿El recíproco es cierto? $i.e.$ si f es inyectivo, ¿es f^* suprayectivo?

ARGUMENTAR A FAVOR O EN CONTRA

Si $f : V \to W$ es un morfismo dominante entre variedades afines irreducibles, entonces

$$\dim W \leq \dim V.$$

Fibración de cuádricas

Considerar $S = \{(x,y,z,w) \mid x^3+y^3+z^3+z^3 = 0\} \subset \mathbb{A}^4$ una cúbica y la proyección

$$\pi : S \to \mathbb{A}^2,$$

donde el centro de proyección es $L = \{(x,y,z,w) \mid x+z = y+w = 0\} \subset \mathbb{A}^4$. Mostrar que el homomorfismo de k-álgebras inducido

$$\pi^* : k[a,b] \to k[S]$$

es injectivo. Mostrar que el ideal primo$(a+b) \subset k[a,b]$ decompone en $k[S]$ en tres componentes:

$$(y+w, x+z), \quad (y+z, x+w), \quad (z+w, x+y) \quad \subset k[S].$$

Ejercicio 5

Denotemos como V a la imagen del morfismo $\phi : \mathbb{A}^2_{(s,t)} \to \mathbb{A}^5_{x_1,\ldots,x_5}$ definido como

$$(s,t) \mapsto (s^2, t^2, st, s, t).$$

Mostrar que la variedad secante de V es –contra todos los pronósticos– una hipersuperficie en $\mathbb{A}^5$. Calcular la ecuación que satisface. Es decir, calcular la ecuación en $\mathbb{A}^5$ que satisface

$$Sec(V) = \bigcup_{q,p \in V} \overline{pq}.$$

Ejercicio 6

Si $f \in k[x_1,\ldots,x_n]$ es un polinomio distinto de cero, entonces la dimensión de sus ceros es

$$\dim V(f) = n-1.$$