UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Álgebra conmutativa: tarea 13

Fecha de entrega: 22 de mayo, 2023

EJERCICIO 1

Si $P \subset A$ es un ideal primo entonces el cociente de la localización por el ideal distinguido $k = A_P/PA_P$ es un campo. Si M es un A-módulo, entonces M_P/PM_P es un espacio vectorial sobre k.

EJERCICIO 2

Si $A \subset B$ es una extensión finita de anillos y $P \subset A$ es un ideal primo, entonces existe al menos uno y a lo más una cantidad finita de ideales $Q \subset B$ tal que

$$Q \cap A = P.$$

ARGUMENTAR A FAVOR O EN CONTRA

Si $A = k[V]$ es el anillo coordenado de una variedad $V \subset k^n$ y $S = \{1, f, f^2, \ldots\}$ es un conjunto multiplicativo cerrado de A, mostrar que $A[1/f]$ es el anillo coordenado de una variedad en k^{n+1}. Se deduce que existe una relación uno a uno

$$Spec(A_f) \to Spec(A)$$

con el complemento del cerrado $V(f)$. Es decir: *toda variedad V tiene un abierto que está en biyección con una hipersuperficie.*

Fibración de cuádricas

Considerar $S = \{(x, y, z, w) \mid x^3 + y^3 + z^3 + z^3 = 0\} \subset \mathbb{A}^4$ una cúbica y la proyección

$$\pi : S \to \mathbb{A}^2,$$

donde el centro de proyección es $L = \{(x, y, z, w) \mid x + z = y + w = 0\} \subset \mathbb{A}^4$. Mostrar que el homomorfismo de k-álgebras inducido

$$\pi^* : k[a, b] \to k[S]$$

es injectivo. Mostrar que existen una infinidad de ideales primos $H \subset k[S]$ tal que

$$H \cap k[a, b] = (a + b).$$

Ejercicio 5

Considerar A un anillo Noetherian y $I \subset A$ un ideal propio. Si la descomposición primaria minimal de I la escribimos

$$I = \bigcap^{n} Q_i,$$

y donde cada Q_i es P_i - primario minimal, entonces

$$Q_i = IA_P \cap A.$$