UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Álgebra conmutativa: tarea 2

Fecha de entrega: 15 de febrero, 2023

EJERCICIO 1

Considerar R un domino entero. Un elemento $x \in A$ se dice *irreducible* si no es invertible y

$$x = yz$$

con $x, y \in A$, implica que y es invertible o z es invertible. Un elemento $x \in A$ se dice *elemento primo* si no es unidad y

$$x \mid yz$$

implica que $x \mid y$ ó $x \mid z$. Es sencillo mostrar que primo implica irreducible; el recíproco es falso en general (irreducible implica primo): exhibir tres ejemplos.

EJERCICIO 2

Considerando un entero primo impar $p \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$, mostrar que

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]/(p) \cong \mathbb{F}_p \oplus \mathbb{F}_p \quad \text{si} \quad p \equiv 1 \mod 6,$$

ó

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]/(p) \cong \mathbb{F}_{p^2} \quad \text{si} \quad p \equiv 5 \mod 6.$$

Si $p = 2$, ¿ qué estructura tiene el cociente $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]/(p)$?

Ejercicio 3

Si $\omega = exp(2\pi i/3)$, considerar el anillo

$$\mathbb{Z}[\omega] := \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Mostrar que $\mathbb{Z}[\omega]$ es domino Euclidiano. Deduce de esto que también es un dominio de ideales principales. Describir todos los elementos primos de $\mathbb{Z}[\omega]$. Si $p = 2$, ¿ qué estructura tiene el cociente $\mathbb{Z}[\omega]/(p)$?

Ejercicio 4

Considerar una extensión de anillos $A \subset B$. Un elemento $y \in B$ se dice *entero* sobre A si existe un polinomio mónico $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in A[x]$ con $n > 0$, tal que

$$f(y) = 0.$$

La extensión $A \subset B$ se dice *entera* si todo $y \in B$ es entero sobre A. Mostrar que

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[\omega],$$

donde $\omega = (1 + \sqrt{5})/2$ es entera. ¿Es la extension $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[\omega]$ con $\omega = exp(2\pi i/3)$ entera?

Ejercicio 5

Describir todos los elementos primos de $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ y compararlos con los de $\mathbb{Z}[\omega]$, donde ω es una raíz cúbica primitiva de 1. ¿Es la contensión $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] \subset \mathbb{Z}[\omega]$ una extensión entera?