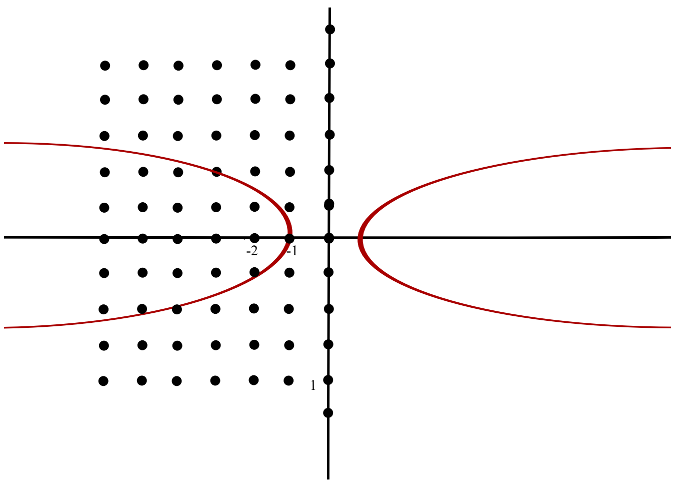
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Álgebra conmutativa: tarea 5

Fecha de entrega: 8 de marzo, 2023

EJERCICIO 1

Considere la hipérbola definida como $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ x^2 - 5y^2 = 1\}$. Demuestre que existen una infinidad de coordenadas enteras $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ sobre dicha hipérbola H.



Pista: ¿Qué unidades tiene el anillo de enteros algebraicos del campo $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$*?*

EJERCICIO 1 BIS

Si $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ es solución de $a^2 - 5b^2 = 1$, mostrar que $a/b \in \mathbb{Q}$ es una aproximación a $\sqrt{5}$. Es decir, mostrar que para cualquier $\epsilon > 0$ es posible encontrar un racional a/b tal que

$$|\tfrac{a}{b} - \sqrt{5}| < e.$$

EJERCICIO 2

Denotemos por $\mathcal{O}_K$ al anillo de enteros algebraicos del campo real $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Mostrar que K tiene una cantidad infinita numerable de unidades. Deducir que los enteros del campo ciclotómico $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ tienen una cantidad infinita numerable de unidades.

EXAMEN GENERAL: JUNIO 2018

Si R denota un anillo y N es el conjunto de todos los elementos nilpotentes ($i.e.$ los elementos $x \in R$ tal que $x^k = 0$ para algún k), demostrar que N es la intersección de todos los ideales primos de R.

EJERCICIO 4

Si $A \subset B$ es una extensión integral de dominios, entonces A es un campo si y solo si B es un campo. ¿Cómo se podría usar este ejercicio para mostrar lo siguiente? Si $P \subset \mathcal{O}$ es un ideal primo en los enteros algebraicos de una extensión finita de $\mathbb{Q}$, entonces P es maximal.

ARGUMENTAR A FAVOR O EN CONTRA

Considerar $p \in \mathbb{Z}$ primo impar. Entonces $\frac{1-\zeta^k}{1-\zeta}$, con $(k, p) = 1$ son todas las unidades del anillo de enteros del campo ciclotómico $\mathbb{Q}(\zeta_p)$.