UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Álgebra conmutativa: tarea 7

Fecha de entrega: 22 de marzo, 2023

TEOREMA DE LA BASE DE HILBERT

Si A es un anillo Noetheriano, entonces $A[x]$ es Noetheriano.

EJERCICIO 2

Si A es un anillo Noetheriano, mostrar que cualquier homomorfismo suprayectivo $\phi : A \to A$ es también inyectivo.

EJERCICIO 3

Teorema: Un A-módulo es Noetheriano si y solo si todos sus submódulos son finitamente generados.

EJERCICIO 4

Asumir que A es un anillo Noetheriano y M un A-módulo finitamente generado.

1. Mostrar que M tiene una presentación

$$M_1 \xrightarrow{C} M_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

donde M_0 y M_1 son libres de rango finito y por tanto el homomorfismo C se puede representar como una matriz.

2. Escribir la presentación (la matriz C) del ideal

$$(xz - y^2, xw - yz, yw - z^2) \subset k[x, y, z, w] = A$$

como A-módulo.

EJERCICIO 5

Considerar el ideal $I = (xz - y^2, xw - yz, yw - z^2) \subset R := k[x, y, z, w]$.

1. Mostrar que el R-módulo
$$N := Hom_R(I, R/I) \subset R^3$$
está generado por 6 homomorfismos. Por ejemplo uno de ellos es $\phi_2(f, g, h) = yf - wh$. Escribirlos los 5 restantes.

2. Escribir una presentación para el R-módulo N. Es decir, escribir relaciones entre los 6 generadores de N
$$R^? \xrightarrow{\phi} R^6 \longrightarrow N \longrightarrow 0,$$
donde ϕ se puede escribir como una matrix. Por ejemplo, una relación es:
$$x\phi_2 - y\phi_4(f, g, h) = x(yf - wh) - y(xf - zh).$$