UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Álgebra conmutativa: tarea 10

Fecha de entrega: 19 de abril, 2023

DESCOMPOSICIÓN PRIMARIA NO TRIVIAL

En el plano $\mathbb{Q}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ considerar las líneas

$$l_1 = \{x = 0\}, \quad l_2 = \{x = y\}, \quad l_3 = \{x = -10\}, \quad l_4 = \{y = 3\}.$$

y los siguientes 4 puntos

$$p_1 = (0, 1),\ p_2 = (2, 2),\ p_3 = (5, 2),\ p_4 = (2, 3).$$

1. Mostrar que existe una única cónica C que pasa por p_1, p_2, p_3, p_4 y que es tangente a l_1.
2. Si $a \in \mathbb{Q}$ es un racional fijo, entonces exhibir una única cónica que es tangente a l_1 en el punto $(0, a)$ y además también es tangente a l_2, l_3, l_4.
3. Mostrar que existe una única cónica C_1 tangente a l_1, l_2, l_3, l_4 y además tangente a
$$l_5 = \{y = x + 1\}.$$
4. Mostrar que existe una única cónica C_1' que pasa por los puntos
$$q_1 = (0, 0),\ q_2 = (-1, 0),\ q_3 = (0, 10),\ q_5 = (-1, 1),$$
y además tiene a l_4 como asíntota.
5. Mostrar que existe una única parábola C' que pasa por q_1, q_2, q_3 y es tangente a
$$\{x + y = 0\}.$$
6. ¿Qué relación existe entre C y C' y entre C_1 y C_1'?

EJERCICIO 2

Considerar t un parámetro en el disco unitario $t \in \Delta = \{t \in \mathbb{C} : |t| \leq 1\}$ y los siguientes conjuntos algebraicos en $\mathbb{C}^4$

$$C = V(y^2 - zx, yw - z^2, yz - xw),$$
$$C_t = V(y^2 - zx, yw - z^2 + tx^2).$$

Si L denota un 2-plano, mostrar que $C_t = C \cup L$, cuando $t = 0$. Escribir la descomposición primaria de la intersección $L \cap C$.

EJERCICIO 3

Consideremos la cúbica alabeada $C \subset \mathbb{C}^3$ definida por $C = \{[x^3 : x^2 : x) \mid x \in \mathbb{C}\})$ y su ideal $I_C = (Q_1, Q_2, Q_3)$. Si denotamos

$$W := \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \mid aQ_1 + bQ_2 + cQ_3\},$$

entonces escribir la ecuación del conjunto $D \subset W$ cuyos puntos parametrizan las cuádricas singulares que contienen a C. ¿Es primo el ideal $I(C) \subset \mathbb{C}[a, b, c]$?

EJERCICIO 4

Mostrar que en un anillo Noetheriano A cada divisor de cero es nilpotente si y solo A tiene un único ideal primo asociado.

EJERCICIO DE EXAMEN

Teorema: Si denotemos por $I = \bigcap_1^n Q_i$ a la descomposición primaria minimal del ideal $I \subset A$, y $P \subset A$ a un ideal primo, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Existe un entero i tal que Q_i es P-primario,
2. Existe un element $x \in A$ tal que $P = (I : x)$.

EJERCICIO DE EXAMEN

Denotemos como M a un A-módulo y a N un submódulo de M. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. M es Noetheriano
2. N y M/N son Noetherianos.