Conjuntos afínmente conmutativos y clases laterales de subgrupos abelianos

Omar Antolín Camarena (IMATE UNAM - CDMX)

Bienvenida

La situación

- Esta plática es sobre espacios asociados a un grupo G, espacios que saben algo sobre cuales elementos de G conmutan y cuales no.
- Los espacios serán definidos combinatoriamente como complejos simpliciales.
- Algunos de esos complejos simpliciales estarán definidos a través de *copos* (conjuntos parcialmente ordenados).
- Los espacios nos interesarán solo salvo equivalencia homotópica.

El plan

Les voy a platicar un poco sobre complejos simpliciales, copos y unos resultados de topología algebraica para complejos simpliciales.

Complejos simpliciales

Definición

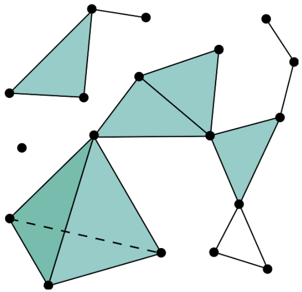
Un *complejo simplicial* K es una familia de conjuntos finitos no vacíos tal que $\emptyset \neq \sigma \subset \tau \in K \implies \sigma \in K$.
Los *vértices* son los elementos de los singuletes:

$$V(K) := \{v : \{v\} \in K\} = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma.$$

Realización geométrica $|K|$

Pensamos en los elementos de K como *simplejos.*

- $\{u\} \in K$ es un vértice
- $\{u, v\} \in K$ es una arista
- $\{u, v, w\} \in K$ es un triángulo
- etc.



Funciones simpliciales

- Una *función simplicial* $f : K \to L$ es una función $V(K) \to V(L)$ que manda simplejos en simplejos, es decir, tal que $\sigma \in K \implies f(\sigma) \in L$.
- Una función simplicial induce una función continua $|f| : |K| \to |L|$ (lineal por trozos) entre las realizaciones geométricas.
- Nótese que f puede «aplastar» simplejos: por ejemplo, si $f(u) = f(v) \neq f(w)$, la imagen del triángulo $\sigma = \{u, v, w\}$ es una arista de $f(u) = f(v)$ a $f(w)$.
- Si $f, g : K \to L$ son *contiguas*, es decir si $\sigma \in K \implies f(\sigma) \cup g(\sigma) \in L$, entonces $|f|$ y $|g|$ son homotópicas.

El complejo de orden de un copo

Definición

Dado un conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$, podemos formar su *complejo de orden* ΔP, que es un complejo simplicial con:

- **vértices** los elementos de P
- **simplejos** las *cadenas* ($=$ subconjuntos totalmente ordenados)

Funciones monótonas

Si $f : P \to Q$ es *monótona*, o sea, si $x \leq_P y \implies f(x) \leq_Q f(y)$, entonces f induce una función simplicial $\Delta f : \Delta P \to \Delta Q$.

Homotopías

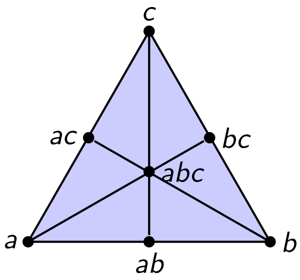
Si $f, g : P \to Q$ monótonas cumplen que $f \leq g$, es decir que $\forall x \in P, f(x) \leq_Q g(x)$, entonces $|\Delta f|$ y $|\Delta g|$ son homotópicas.

Subdivisión baricéntrica

Si K es un complejo simplicial, $(K, \subseteq)$ es un copo y $\Delta(K, \subseteq)$ es la subdivisión baricéntrica de K. Hay un homeomorfismo $|K| \cong |\Delta(K, \subseteq)|$.

De la figura se intuye el homeomorfismo.

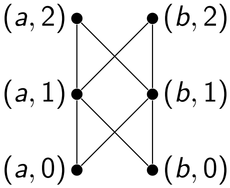
- cada $\sigma \in V(\Delta(K, \subseteq))$ corresponde al baricentro del simplejo $\sigma \in K$
- los simplejos de $\Delta(K, \subseteq)$ son por definición cadenas de simplejos de K, por ejemplo, $\{c\} \subset \{a, c\} \subset \{a, b, c\}$ es un triángulo.



Un ejemplo de complejo de orden

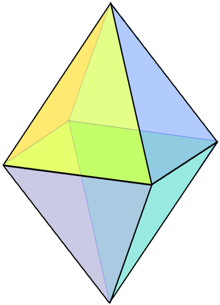
Sea $P = \{a, b\} \times \{0, 1, 2\}$ con
$(x, i) < (y, j) \iff i < j$.

Así, (a, i) y (b, j) son incomparables cuando $i = j$.



El complejo de orden de P tiene 6 vértices y 8 triángulos de la forma $\{(x_0, 0), (x_1, 1), (x_2, 2)\}$ con $x_i \in \{a, b\}$.

¡Es un octaedro hueco!
¡Tiene el tipo de homotopía de S^2!



Abuso de lenguaje

Como consideramos

- a los copos como una forma de construir complejos simpliciales, y
- a los complejos simpliciales como una forma de construir espacios topológicos,

vamos a omitir Δ y $|\cdot|$ de la notación.
Por ejemplo, diremos que si $f, g : P \to Q$ son funciones monótonas entre copos y $f \leq g$, entonces f y g son homotópicas, o diremos cosas como que el copo P es contráctil o que el complejo simplicial K es simplemente conexo.

Un copo con elemento mínimo es contráctil

Primer prueba

Si $m \in P$ es mínimo, la función constante $\underline{m} : P \to P$ con valor m cumple que $\underline{m} \leq \mathrm{id}$, de modo que la identidad es homotópica a una constante.

Segunda prueba

El complejo de orden de P tiene la siguiente propiedad: si σ es un simplejo, entonces $\sigma \cup \{m\}$ también lo es.
Eso quiere decir que el complejo de orden es un *cono*, específicamente, el cono sobre el complejo de orden de $P \setminus \{m\}$.

¿Esto es una buena noticia?

No para mí: soy topólogo algebraico, así que pienso:

$$\text{«contráctil} = \text{aburrido».}$$

Copos de subgrupos

- Sea G un grupo. Podemos formar copos tomando una familia de subgrupos de G ordenados por inclusión.
- Muchas familias naturales tienden a tener elemento mínimo o máximo:

  subgrupos propios 1 es mínimo
  subgrupos abelianos 1 es mínimo
  subgrupos no triviales G es máximo

- Esos copos no me interesan.

El copo de clases laterales de subgrupos propios

Sale más interesante tomar copos de clases laterales.
Por ejemplo, Kenneth Brown estudió el *coset poset*, el copo $\mathcal{C}(G)$ de clases laterales de subgrupos propios de G, en *The Coset Poset and Probabilistic Zeta Function of a Finite Group*.

Teorema

Si G es soluble $\mathcal{C}(G)$ es homotópicamente equivalente a una cuña de esferas todas de la misma dimensión. La dimensión y el número de las esferas tienen una descripción explícita.
Sea $1 = N_0 \lhd \cdots \lhd N_k = G$ una cadena maximal de subgrupos normales de G, sea c_i el número de complementos de N_i/N_{i-1} en G/N_{i-1} y sea d el número de índices i tales que $c_i \neq 0$. Entonces las esferas son de dimensión $d-1$ y hay $\left|\prod_{i=1}^{k}(c_i[N_i : N_{i-1}] - 1)\right|$ de ellas.

El copo de clases laterales de subgrupos abelianos

Sea G un grupo. Definimos $\mathcal{C}^{ab}(G)$ como el copo de clases laterales de subgrupos abelianos de G.

Los grupos abelianos son aburridos

Si G es abeliano, $G \in \mathcal{C}^{ab}(G)$ es un elemento máximo, por lo que $\mathcal{C}^{ab}(G)$ es contráctil.

Un ejemplo «chico»

El grupo no abeliano más pequeño es $G = S_3$. Tiene 5 subgrupos abelianos, todos cíclicos, uno de orden 3, tres de orden 2, y el trivial.
Esto nos da un total de $1 \cdot 6/3 + 3 \cdot 6/2 + 1 \cdot 6/1 = 17$ clases laterales. El diagrama de Hasse de $\mathcal{C}^{ab}(G)$ tiene dos pisos: abajo las 6 clases laterales de 1, arriba las otras 11 clases laterales. Hay $2 \cdot 3 + 9 \cdot 2 = 24$ aristas.
$\mathcal{C}^{ab}(S_3)$ es una gráfica con 17 vértices y 24 aristas, así que $\mathcal{C}^{ab}(S_3) \simeq \bigvee^8 S^1$, pues $24 - 17 + 1 = 8$.

Conmutatividad afín

Sea G un grupo y sean $g_0, \ldots, g_n \in G$.
Las siguientes son equivalentes:

- $\{g_0, \ldots, g_n\}$ está contenido en alguna clase lateral de algún subgrupo abeliano.
- $\{g_0^{-1}g_1, \ldots, g_0^{-1}g_n\}$ conmutan dos a dos.
- $\{g_i^{-1}g_j : 0 \leq i, j \leq n\}$ conmutan dos a dos.

Si se cumplen estas condiciones decimos que $\{g_0, \ldots, g_n\}$ es un conjunto *afínmente conmutativo*.
Cualquier conjunto de 2 elementos o menos es afínmente conmutativo.
Un conjunto de 3 o más elementos es afínmente conmutativo si y solo si todos sus subconjuntos de 3 elementos lo son.

El complejo de conmutatividad afín

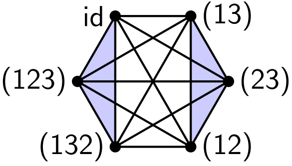
Dado un grupo G, sea $\mathrm{AfCom}(G)$ el complejo simplicial con:

vértices los elementos de G

simplejos los conjuntos afínmente conmutativos

$\mathrm{AfCom}(G)$ siempre tiene todas las aristas posible; y $S \subseteq G$ es un simplejo de $\mathrm{AfCom}(G)$ si y solo si todos los subconjuntos de S con 3 elementos son triángulos de $\mathrm{AfCom}(G)$.

Si $G = S_3$, los únicos simplejos de dimensión > 1 son triángulos: las clases laterales del subgrupo de orden 3. Colapsando los dos triángulos y una aristas que los une, obtenemos $\bigvee^8 S^1$.



El teorema del nervio

El nervio de una cubierta

Si $\mathcal{U} = \{U_j : j \in J\}$ es una cubierta de un espacio X, el *nervio* de $\mathcal{U}$ es un complejo simplicial $N_{\mathcal{U}}$ con:

vértices los elementos de J

simplejos los $\{j_0, \ldots, j_n\}$ tales que $U_{j_0} \cap U_{j_1} \cap \cdots \cap U_{j_n} \neq \emptyset$.

El teorema del nervio

Si $\mathcal{U}$ cumple que para cualquier $\{j_0, \ldots, j_n\} \subseteq J$ la intersección $U_{j_0} \cap U_{j_1} \cap \cdots \cap U_{j_n} \neq \emptyset$ es *vacía o contráctil*, entonces X es homotópicamente equivalente a $N_{\mathcal{U}}$.

Las letras pequeñas

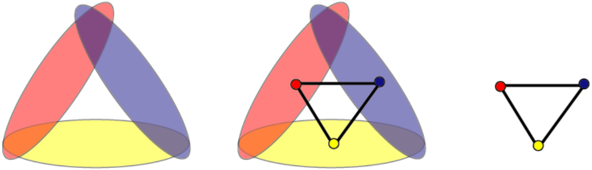
El teorema se cumple si:

- $\mathcal{U}$ es una cubierta *abierta* de un espacio X, o
- $\mathcal{U}$ es una cubierta *por subcomplejos* de un complejo simplicial.

Demostración del teorema del nervio

~~Demostración~~ Ejemplo del teorema del nervio

- Supongamos que $X = U_1 \cup U_2 \cup U_3$ con:
  - U_i contráctil,
  - $U_i \cap U_j$ contráctil, y
  - $U_1 \cap U_2 \cap U_3$ vacío.



- Entonces $N\{U_1, U_2, U_3\}$ es un triángulo sin relleno.
- Sea $x_{ij} \in U_i \cap U_j$.
- Como $x_{ij}, x_{ik} \in U_i$ hay una curva γ_i en U_i que los conecta.
- $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3$ es un lazo en X, que induce una equivalencia homotópica $S^1 \simeq X$.

Cubiertas canónicas

Dado un complejo simplicial K hay varias cubiertas que automáticamente cumplen la hipótesis del teorema del nervio, es decir, que intersecciones de varios miembros de la cubierta son siempre vacías o contráctiles. Podemos cubrir K con sus simplejos, con sus simplejos maximales, o con las estrellas de sus vértices.

La *estrella* de un simplejo $\sigma \in K$ es el subcomplejo de K que resulta de la unión de todos los simplejos que contienen a σ. La intersección de las estrellas de varios vértices v_i es vacía si $\{v_i\}$ no es un simplejo, y es la estrella de $\{v_i\}$ si sí lo es.

Usaremos las notaciones $N^{\Delta}K$, $N^{\text{máx}}K$ y $N^{\star}K$ para los nervios de estas tres cubiertas. Por el teorema del nervio,

$$K \simeq N^{\Delta}K \simeq N^{\text{máx}}K \simeq N^{\star}K.$$

Clases laterales vs conmutatividad afín

Teorema

Para cualquier grupo G, el copo $\mathcal{C}^{ab}(G)$ y el complejo simplicial $\mathrm{AfCom}(G)$ *son homotópicamente equivalentes.*

Demostración.

Sean $U_g := \{C \in \mathcal{C}^{ab}(G) : g \in C\}$ y $\mathcal{U} := \{U_g : g \in G\}$.
$U_{g_0} \cap \ldots \cap U_{g_n} \neq \emptyset \iff \{g_0, \ldots, g_n\}$ es afínmente conmutativo.
Además, si $\{g_0, \ldots, g_n\}$ es afínmente conmutativo, entonces $U_{g_0} \cap \ldots \cap U_{g_n} = \{g_0 A \in C^{ab}(G) : \langle g_0^{-1} g_i \rangle \subseteq A\}$. Así que $g_0 \langle g_0^{-1} g_i \rangle$ es un elemento mínimo de la intersección, que por lo tanto es contráctil.
Por el teorema del nervio, $\mathcal{C}^{ab}(G) \simeq N_{\mathcal{U}} \cong \mathrm{AfCom}(G)$. $\square$

$\mathrm{AfCom}(G)$ es similar, pero no exactamente igual a $N^{\star}\mathcal{C}^{ab}(G)$.

Varios modelos

En resumen, a cualquier grupo G le asociamos varios complejos simpliciales homotópicamente equivalentes incluyendo:

- $\mathrm{AfCom}(G)$ cuyos simplejos son los subconjuntos afínmente conmutativos de G.
- el complejo de orden de $\mathcal{C}^{ab}(G)$, el copo de clases laterales de subgrupos abelianos de G,
- $N^{\text{máx}}\mathrm{AfCom}(G)$, el nervio de la cubierta formada por las clases laterales de subgrupos abelianos maximales,
- el complejo de orden de $\mathcal{C}^{abmax}(G)$, el copo de clases laterales de subgrupos que son intersección de subgrupos abelianos maximales de G. Este es muy similar al anterior pero hay diferencias si un mismo subgrupo abeliano se puede escribir como intersección de subgrupos abelianos maximales de dos maneras distintas.

Pero… ¿no son contráctiles, verdad? Si sí, esto sería aburrido.

El caso trivial

Si G es abeliano sí son contráctiles, desde luego, y es fácil probarlo para cualquiera de los tres modelos (aunque como son homotópicamente equivalentes basta probarlo para uno).

- $\mathcal{C}^{abmax}(G)$ y $N^{\text{máx}}\text{AfCom}(G))$, ¡son un punto!, pues G es el único abeliano maximal.
- $\mathcal{C}^{ab}(G)$ tiene elemento máximo G.
- $\text{AfCom}(G)$ tiene la propiedad de que dado un simplejo σ, también $\sigma \cup \{1\}$ es simplejo, así que AfCom(G) es el cono de $\text{AfCom(G)} \setminus 1$.

El grupo fundamental de un complejo simplicial

Sea X un complejo simplicial conexo y sea T un árbol generador del 1-esqueleto.

El grupo fundamental de la realización geométrica de X tiene una presentación como sigue:

generadores un generador x_{uv} por cada $\{u, v\} \in X$.

relaciones

- $x_{vv} = 1$
- $x_{uv} = x_{vu}^{-1}$
- $x_{uv} = 1$ si $\{u, v\} \in T$
- $x_{uv}x_{vw} = x_{uw}$ si $\{u, v, w\} \in X$

(En particular, el grupo fundamental solo depende de los vértices aristas, y triángulos en X, no de los simplejos de dimensión mayor).

El grupo fundamental de AfCom(G)

Como AfCom(G) tiene todas las posibles aristas, podemos escoger como árbol generador la estrella con centro en $1 \in G$. Obtenemos la siguiente presentación para $\pi_1(\mathrm{AfCom}(G))$:

generadores x_{gh} con $g, h \in G$

relaciones

- $x_{g1} = x_{1g} = 1$
- $x_{gh}x_{hk} = x_{gk}$ si $\{g, h, k\}$ es afínmente conmutativo.

El homomorfismo conmutador

Lema

$\{g, h, k\}$ es afínmente conmutativo $\implies [g, h][h, k] = [g, k]$.

Demostración.

$$\begin{aligned}(g^{-1}h^{-1}gh)(h^{-1}k^{-1}hk) &= g^{-1}(h^{-1}g)(k^{-1}h)k \\ &= g^{-1}(k^{-1}h)(h^{-1}g)k = [g, k]\end{aligned}$$

$\square$

Por lo tanto, hay un homomorfismo $c : \pi_1(\mathrm{AfCom}(G)) \to [G, G]$ definido en los generadores como $c(x_{gh}) := [g, h]$.

Obviamente c es suprayectivo: su imagen incluye a todos los generadores de $[G, G]$. Por lo tanto, si $[G, G] \neq 1$, entonces $\pi_1(\mathrm{AfCom}(G)) \neq 1$.

Teorema

Si $\mathrm{AfCom}(G)$ es simplemente conexo, entonces G es abeliano.

Más ejemplos

- $Q_{2^n} = \langle \exp(2\pi i/2^{n-1}), j \rangle$ es el grupo de los cuaterniones generalizados de orden 2^n. Se tiene que $\mathrm{AfCom}(\mathrm{Q}_{2^n}) \simeq \bigvee^{2^{2n-4}-1} S^1$.
- Hay dos grupos de orden 32 llamados *extraespeciales*. Para cualesquiera de esos dos grupos G, Cihan Okay demostró que $\pi_1(\mathrm{AfCom}(G)) \cong \mathbb{Z}/2$ y que el cubriente universal de $\mathrm{AfCom}(G)$ es homotópicamente equivalente a $\bigvee^{151} S^2$.

Esto implica que:

- $\pi_2(\mathrm{AfCom}(G)) \cong \mathbb{Z}^{151}$, y
- $\pi_3(\mathrm{AfCom}(G)) \cong \mathbb{Z}^{11476}$. (!)

Espacios de Eilenberg–MacLane

Un espacio X es un *espacio de Eilenberg–MacLane* si $\pi_n(X) \neq 0$ para un único valor de n. Si para esa n tenemos $\pi_n(X) = \pi$, se dice que X es «un $K(\pi, n)$».

Como AfCom(G) para G no abeliano nunca es simplemente conexo, si acaso AfCom(G) es un espacio de Eilenberg–MacLane, tendría que ser un $K(\pi, 1)$ donde $\pi = \pi_1(\mathrm{AfCom}(G))$.

Alejandro Adem, Fred Cohen y Enrique Torres Giese preguntaron si era cierto que para G finito, AfCom(G) era siempre un $K(\pi, 1)$.

Los cálculos para grupos extraespeciales de Cihan muestran que la respuesta es no.

Torsión en el grupo fundamental

Si π tiene torsión, ningún $K(\pi, 1)$ tiene dimensión finita.
Por lo tanto, si G cumple que $\pi_1(\mathrm{AfCom}(G))$ tiene torsión, entonces $\mathrm{AfCom}(G)$ no puede ser un espacio de Eilenberg–MacLane.
Usando los resultados de Cihan sobre grupos extraespeciales, Luis Eduardo García y yo probamos que para cualquier primo p y cualquier $n \geq p^5$, hay elementos de orden p en el grupo fundamental de $\mathrm{AfCom}(S_n)$. En particular ningún $\mathrm{AfCom}(S_n)$ es un espacio de Eilenberg–MacLane para $n \geq 32$.
Sospechamos que la cota de 32 se puede reducir a 5.